

Verallgemeinerte Hankel-Funktionen

Von EKKHARD KRÄTZEL und HARTMUT MENZER (Jena)

§ 1. Einleitung

Bei der Untersuchung der Anzahl der Partitionen natürlicher Zahlen in k -te Potenzen stieß Wright [4] auf gewisse Verallgemeinerungen der Bessel-Funktionen, die heute unter der Bezeichnung Wright-Funktionen bekannt sind und die für $0 < \varrho < \infty$, β beliebig, durch

$$(1) \quad \Phi(\varrho, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\varrho n + \beta)}$$

definiert sind. Für $\varrho = 1$ fallen diese Funktionen auf die gewöhnlichen Bessel-Funktionen $J_\nu(z)$ zurück, und es besteht der Zusammenhang

$$\Phi\left(1, \nu + 1; -\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z).$$

Bekanntlich lassen sich die Bessel-Funktionen in eine Summe von Hankel-Funktionen erster und zweiter Art aufspalten. Es gilt

$$(2) \quad 2J_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z).$$

Die Gleichung (2) legt es nahe, bezüglich $\Phi(\varrho, \beta; z)$ Funktionen zu konstruieren, die eine Übertragung von (2) auf die Wright-Funktionen gestatten. Diese Funktionen sind also als Verallgemeinerungen der Hankel-Funktionen aufzufassen, und wir werden sie in folgendem stets als η -Funktionen bezeichnen.

Andererseits spielen diese Funktionen eine Rolle bei folgendem zahlentheoretischen Problem: Mit natürlichen Zahlen a, b, n, m, k bezeichne

$$d(a, b; k) = \sum_{n^a m^b = k} 1$$

und

$$D(a, b; x) = \sum_{1 \leq k \leq x} d(a, b; k).$$

Für große x verhält sich $D(a, b; x)$ in erster Näherung wie

$$\zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{\frac{1}{a}} + \zeta\left(\frac{a}{b}\right) x^{\frac{1}{b}}$$

($a \neq b$, $\zeta(s)$ ist die Riemannsche Zeta-Funktion). Der Rest

$$\Delta(a, b; x) = D(a, b; x) - \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{\frac{1}{a}} - \zeta\left(\frac{a}{b}\right) x^{\frac{1}{b}}$$

läßt sich, wie in [2] dargestellt, in eine unendliche Reihe entwickeln, die noch gewisse Integrale enthält, die sich aber durch die hier zu entwickelnden η -Funktionen ausdrücken lassen.

§ 2. Definition der η -Funktion

Wir beginnen mit einer besonderen Integraldarstellung der durch (1) definierten Wright-Funktion.

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen*

$$(a) \quad \varrho < 1, \beta \text{ beliebig, } |\arg z| < \frac{1-\varrho}{2} \pi, \quad c > 0$$

oder

$$(b) \quad \varrho = 1, \operatorname{Re}(\beta) > 1, \quad z > 0, \quad c = 0$$

gilt

$$(3) \quad \Phi(\varrho, \beta; -z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(-c)} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\varrho s + \beta)} z^s ds.$$

Dabei ist das Integral längs der Vertikalen von $-c - i\infty$ bis $-c + i\infty$ zu führen, und im Falle $c=0$ muß ein Haken um den Nullpunkt geschlagen werden.

BEWEIS. Vermöge der Funktionalgleichung

$$(4) \quad \Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

kann man das Integral (3) in die Form

$$(5) \quad \Phi(\varrho, \beta; -z) = \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{(-c)} \Gamma(-s) \Gamma(1-\varrho s - \beta) \sin \pi(\varrho s + \beta) z^s ds$$

bringen. Da sich die Gammafunktion für $|\tau| \rightarrow \infty$ wie

$$|\Gamma(\sigma + i\tau)| \sim h |\tau|^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2} |\tau|}$$

verhält, folgt für den Betrag des Integranden in (5) mit $s = -c + i\tau$

$$|\Gamma(-s) \Gamma(1-\varrho s - \beta) \sin \pi(\varrho s + \beta) z^s| \sim h_1 |\tau|^{(1+\varrho)c - \operatorname{Re}(\beta)} e^{\left[\frac{\pi}{2}(\varrho-1) + \arg(z)\right] |\tau|}$$

für $|\tau| \rightarrow \infty$. Daraus liest man unmittelbar die Konvergenz des Integrals unter den Bedingungen (a) und (b) ab. Durch Verschieben des Integrationsweges nach rechts über die Polstellen von $\Gamma(-s)$ entsteht ohne weiteres die Reihe (1), womit die Darstellung (3) bewiesen ist.

Die Darstellung (5) gibt in Zusammenhang mit (2) den Anlaß, Verallgemeinerungen der Hankel-Funktionen einzuführen.

Definition. Als η -Funktion werde die durch das Integral

$$(6) \quad \eta(\varrho, \beta; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \Gamma(s) \Gamma(\varrho s + 1 - \beta) z^{-s} ds$$

unter den Voraussetzungen $0 < \varrho < \infty$, β beliebig, $|\arg z| < (1 + \varrho)\pi/2$, $c > 0$, $c > (\operatorname{Re}(\beta) - 1)/\varrho$ dargestellte Funktion bezeichnet.

Bei Verwendung von (6) in (5) folgt für $\varrho \leq 1$, $|\arg z| < (1 - \varrho)\pi/2$

$$(7) \quad 2\pi i \Phi(\varrho, \beta; -z) = e^{\pi i \beta} \eta(\varrho, \beta; e^{\pi i \varrho} z) - e^{-\pi i \beta} \eta(\varrho, \beta; e^{-\pi i \varrho} z).$$

Aus den bekannten Integraldarstellungen für die Hankel-Funktionen

$$H_v^{(1)} = -\frac{1}{2\pi^2} e^{-\frac{\pi i v}{2}} \int_{(c)} \Gamma(s) \Gamma(s - v) \left(\frac{-iz}{2}\right)^{v-2s} ds$$

$$\left(c > 0, c > \operatorname{Re}(v), |\arg(-iz)| < \frac{\pi}{2} \right),$$

$$H_v^{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi^2} e^{\frac{\pi i v}{2}} \int_{(c)} \Gamma(s) \Gamma(s - v) \left(\frac{iz}{2}\right)^{v-2s} ds$$

$$\left(c > 0, c > \operatorname{Re}(v), |\arg(iz)| < \frac{\pi}{2} \right)$$

ergibt sich

$$\eta\left(1, v+1; e^{-\pi i} \frac{z^2}{4}\right) = \pi i e^{\pi i v} \left(\frac{z}{2}\right)^{-v} H_v^{(1)}(z),$$

$$\eta\left(1, v+1; e^{\pi i} \frac{z^2}{4}\right) = -\pi i e^{-\pi i v} \left(\frac{z}{2}\right)^{-v} H_v^{(2)}(z),$$

so daß (2) als Spezialfall in (7) enthalten ist.

§ 3. Einige Eigenschaften der η -Funktion

Satz 2. Für $\varrho n + \beta \not\equiv 0 \pmod{1}$, $n=0, 1, 2, \dots$, gilt

$$(8) \quad \eta(\varrho, \beta; z) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(\varrho n + \beta) \sin \pi(\varrho n + \beta)} - \pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{\frac{m+1-\beta}{\varrho}}}{m! \Gamma\left(\frac{m+1-\beta}{\varrho} + 1\right) \sin \pi\left(\frac{m+1-\beta}{\varrho}\right)}.$$

Für $\varrho n + \beta \equiv 0 \pmod{1}$ setze man $m = \varrho n + \beta - 1$ im Sinne eines Grenzüberganges.

BEWEIS. Für $qn + \beta \not\equiv 0 \pmod{1}$ hat der Integrand in (6) nur Pole 1. Ordnung. Durch Abschöpfen der Residuen der Pole ergibt sich

$$\eta(q, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\beta-qn)}{n!} (-z)^n + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta-1-m}{q}\right) (-1)^m}{m!} z^{\frac{m-\beta+1}{q}},$$

und bei Verwendung von (4) erhält man (8).

Überprüft man die Relation (7) mit Hilfe der Reihenentwicklung (8), so erkennt man, daß die dort angegebenen Einschränkungen über q und z weggelassen werden können.

Unter Ausnutzung von (6) oder (8) ergeben sich leicht die folgenden Gleichungen:

$$(9) \quad \eta(q, \beta; z^q) = \frac{1}{q} z^{1-\beta} \eta\left(\frac{1}{q}, 1 + \frac{1-\beta}{q}; z\right),$$

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial z} \eta(q, \beta; z) = -\eta(q, \beta+q; z),$$

$$(11) \quad (1-\beta)\eta(q, \beta; z) = \eta(q, \beta-1; z) - qz\eta(q, \beta+q; z).$$

Die Gleichung (2) gibt eine Darstellung der Bessel-Funktion durch die Hankel-Funktionen. Umgekehrt lassen sich bekanntlich die Hankel-Funktionen durch die Bessel-Funktionen ausdrücken. Es gilt:

$$H_v^{(1)}(z) = \frac{J_{-v}(z) - e^{-\pi i v} J_v(z)}{i \sin \pi v}$$

$$H_v^{(2)}(z) = \frac{e^{\pi i v} J_v(z) - J_{-v}(z)}{i \sin \pi v}$$

Eine Übertragung dieser Gleichungen auf die η -Funktion gelingt nicht, statt dessen ergibt sich nur der folgende Zusammenhang:

Satz 3. Es gilt

$$(12) \quad \begin{aligned} & e^{\pi i \beta} \eta(q, \beta; e^{\pi i(q-1)} z) - e^{-\pi i \beta} \eta(q, \beta; e^{-\pi i(q-1)} z) = \\ & = 2\pi i \left\{ \Phi(q, \beta; z) - \frac{1}{q} z^{\frac{1-\beta}{q}} \Phi\left(\frac{1}{q}, 1 + \frac{1-\beta}{q}; z^{\frac{1}{q}}\right) \right\}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Ersetzt man in (7) q durch $\frac{1}{q}$ und β durch $1 + \frac{1-\beta}{q}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & -e^{\pi i \frac{1-\beta}{q}} \eta\left(\frac{1}{q}, 1 + \frac{1-\beta}{q}; e^{\frac{\pi i}{q}} z\right) + e^{-\pi i \frac{1-\beta}{q}} \eta\left(\frac{1}{q}, 1 + \frac{1-\beta}{q}; e^{-\frac{\pi i}{q}} z\right) = \\ & = 2\pi i \Phi\left(\frac{1}{q}, 1 + \frac{1-\beta}{q}; -z\right) \end{aligned}$$

und vermittelt (9)

$$-\eta(\varrho, \beta; e^{\pi i} z^e) + \eta(\varrho, \beta; e^{-\pi i} z^e) = \frac{2\pi i}{\varrho} z^{1-\beta} \Phi\left(\frac{1}{\varrho}, 1 + \frac{1-\beta}{\varrho}; -z\right).$$

Mit $z \rightarrow (e^{\pi i(\varrho-1)} z)^{\frac{1}{\varrho}}$ wird daraus

$$\begin{aligned} & -e^{\pi i\beta} \eta(\varrho, \beta; e^{\pi i\varrho} z) + e^{\pi i\beta} \eta(\varrho, \beta; e^{\pi i(\varrho-2)} z) = \\ & = -\frac{2\pi i}{\varrho} \left(\frac{e^{\pi i}}{z}\right)^{\frac{\beta-1}{\varrho}} \Phi\left(\frac{1}{\varrho}, 1 + \frac{1-\beta}{\varrho}; (e^{-\pi i} z)^{\frac{1}{\varrho}}\right). \end{aligned}$$

Nach Addition dieser Gleichung und der Gleichung (7) folgt

$$\begin{aligned} & e^{\pi i\beta} \eta(\varrho, \beta; e^{\pi i(\varrho-2)} z) - e^{-\pi i\beta} \eta(\varrho, \beta; e^{-\pi i\varrho} z) = \\ & = 2\pi i \left\{ \Phi(\varrho, \beta; -z) - \frac{1}{\varrho} \left(\frac{e^{\pi i}}{z}\right)^{\frac{\beta-1}{\varrho}} \Phi\left(\frac{1}{\varrho}, 1 + \frac{1-\beta}{\varrho}; (e^{-\pi i} z)^{\frac{1}{\varrho}}\right) \right\}, \end{aligned}$$

und die Substitution $z \rightarrow e^{\pi i} z$ liefert (12).

Satz 4. Unter den Voraussetzungen $0 < \varrho < \infty$, $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ oder $0 < \varrho < \infty$,

$|\arg z| = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re}(\beta) < \varrho + 1$ gilt

$$(13) \quad \eta(\varrho, \beta; z) = \int_0^{\infty} u^{-\beta} e^{-(u+zu^{-\varrho})} du.$$

BEWEIS. Es genügt, sich auf den Fall der absoluten Konvergenz des Integrals zu beschränken. Dann kann man den Faltungssatz der Mellintransformation anwenden. Ist für $v=1, 2$

$$f_v(s) = M\{F_v(t)\} = \int_0^{\infty} t^{s-1} F_v(t) dt,$$

so gilt

$$M\left\{\int_0^{\infty} u^{\alpha} F_1\left(\frac{t}{u}\right) F_2(u) du\right\} = f_1(s) f_2(s + \alpha + 1).$$

Wegen

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du$$

folgt für das Integral in (13)

$$M\left\{\int_0^{\infty} u^{-\beta} e^{-\left(u+\left(\frac{t}{u}\right)^{\varrho}\right)} du\right\} = \frac{1}{\varrho} \Gamma\left(\frac{s}{\varrho}\right) \Gamma(s+1-\beta),$$

und durch Umkehrung der Mellin-Transformation und wegen (6):

$$\int_0^{\infty} u^{-\beta} e^{-\left(u+\left(\frac{t}{u}\right)^{\varrho}\right)} du = \frac{1}{2\pi i \varrho} \int_{(c)} \Gamma\left(\frac{s}{\varrho}\right) \Gamma(s+1-\beta) t^{-s} ds = \eta(\varrho, \beta; t^e).$$

§ 4. Asymptotische Entwicklung

Unter Ausnutzung der Integraldarstellung (13) soll mit Hilfe der Sattelpunktmethode für die η -Funktion eine asymptotische Entwicklung gefunden werden. Aus (13) ergibt sich unmittelbar

$$(14) \quad \eta(\varrho, \beta; z^{\varrho+1}) = z^{1-\beta} \int_0^{\infty} u^{-\beta} e^{-z(u+u^{-\varrho})} du$$

für $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$. Wir setzen

$$z = \xi e^{i\gamma}, \quad h(u) = e^{i\gamma}(u + u^{-\varrho})$$

Die Sattelpunkte sind durch $h'(u)=0$ gegeben. Bestimmt durch die Lage des Integrationsweges verwenden wir den Sattelpunkt

$$u_0 = \varrho^{\frac{1}{\varrho+1}} > 0.$$

Die Falllinien durch u_0 genügen der Gleichung

$$\operatorname{Im}\{h(u)\} - \operatorname{Im}\{h(u_0)\} = 0,$$

woraus sich mit

$$u = r e^{i\varphi}, \quad r \geq 0, \quad |\varphi| < \pi$$

$$(15) \quad r^{\varrho+1} \sin(\gamma + \varphi) + \sin(\gamma - \varrho\varphi) - r^{\varrho} \left(1 + \frac{1}{\varrho}\right) u_0 \sin \gamma = 0$$

ergibt. Mit $\gamma=0$ ist $\varphi=0$ eine Falllinie, und man gelangt zu einer asymptotischen Entwicklung von $\eta(\varrho, \beta; z^{\varrho+1})$ für $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$. Um den Gültigkeitsbereich der Entwicklung auszudehnen, wird man $\gamma \neq 0$ ebenfalls zulassen und eine Deformation des Integrationsweges längs der Falllinie (15) vornehmen. Dies gelingt ohne weiteres unter den Voraussetzungen $|\arg \xi| < \frac{\pi}{2}$, $|\gamma| < \pi$. Aus (14) wird

$$(16) \quad \eta(\varrho, \beta; z^{\varrho+1}) = z^{1-\beta} \int_C u^{1-\beta} e^{-\xi h(u)} du$$

mit dem durch (15) gegebenen Integrationsweg C , wobei für $r \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{\varrho}$ und für $r \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow -\gamma$ gilt. Wegen $|\gamma| < \pi$ und $|\varphi| < \pi$ muß zusätzlich $\varrho \geq 1$ gefordert werden. Bei Verwendung der Funktionalgleichung (9) erkennt man aber, daß das Ergebnis (18) auch für $\varrho < 1$ richtig ist. Auf dem Integrationsweg C ist $h(u) - h(u_0)$ reell, so daß man auf (16) den folgenden Hilfssatz (vgl. [1], S. 85) anwenden kann.

Hilfssatz. Es seien $h(u)$ und $g(u)$ in $u=u_0$ holomorph, $h(u) - h(u_0)$ für $u_0 \leq u \leq u_1$ reellwertig und ≥ 0 und

$$h'(u_0) = h''(u_0) = \dots = h^{(m-1)}(u_0) = 0, \quad h^{(m)}(u_0) \neq 0 \quad (m \geq 1).$$

Läßt sich in dem Integral

$$J(z) = \int_{u_1}^{u_2} g(u) e^{-zh(u)} du$$

die Substitution

$$\tau = [h(u) - h(u_0)]^{\frac{1}{m}} = (u - u_0)[c_m + c_{m+1}(u - u_0) + \dots]^{\frac{1}{m}}$$

mit $\tau > 0$ ausführen, so gilt die asymptotische Entwicklung

$$(17) \quad J(z) \sim \frac{1}{m} e^{-zh(u_0)} \sum_{v=0}^{\infty} a_v \Gamma\left(\frac{v+1}{m}\right) z^{-\frac{v+1}{m}}$$

mit

$$a_v = \frac{1}{v!} \left[\frac{d^v}{du^v} \left\{ g(u) \left(\frac{u - u_0}{(h(u) - h(u_0))^{1/m}} \right)^{v+1} \right\} \right]_{u=u_0}$$

für $z \rightarrow \infty$ in $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Wenden wir diesen Hilfssatz auf (16) an, so müssen wir jenes Integral in zwei Teilintegrale zerlegen, wobei der eine Integrationsweg von 0 längs C nach u_0 und der andere von u_0 längs C nach ∞ verläuft. Das hat zur Folge, daß sich in der asymptotischen Entwicklung (17) Glieder mit ungeradem v wegheben, die mit geradem v dagegen verdoppeln. Für unser Problem setzen wir in dem Hilfssatz also

$$m = 2, \quad g(u) = u^{-\beta}, \quad h(u) = e^{i\gamma}(u + u^{-\varrho}),$$

$$z = \zeta e^{i\gamma}, \quad |\arg \zeta| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad |\gamma| < \pi,$$

$$u_0 = \varrho^{\frac{1}{\varrho+1}} > 0, \quad h(u_0) = e^{i\gamma} \left(1 + \frac{1}{\varrho} \right) \varrho^{\frac{1}{\varrho+1}}.$$

Damit ergibt sich sofort:

Satz 5. Für $z \rightarrow \infty$ mit $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi - \varepsilon < \frac{3}{2}\pi$ gilt die asymptotische Entwicklung

$$(18) \quad \eta(\varrho, \beta; z^{\varrho+1}) \sim z^{1-\beta} \exp \left[-z \left(1 + \frac{1}{\varrho} \right) \varrho^{\frac{1}{\varrho+1}} \right] \sum_{v=0}^{\infty} a_{2v} \Gamma \left(v + \frac{1}{2} \right) z^{-v - \frac{1}{2}}$$

mit

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{\varrho+1}} \varrho^{\frac{1-2\beta}{2(\varrho+1)}},$$

$$a_{2v} = \frac{1}{(2v)!} \left[\frac{d^{2v}}{du^{2v}} \left\{ u^{-\beta} \left(\frac{u - \varrho^{1/(\varrho+1)}}{\sqrt{u + u^{-\varrho} - (1 + 1/\varrho)\varrho^{1/(\varrho+1)}}} \right)^{2v+1} \right\} \right]_{u=\varrho^{1/(\varrho+1)}}.$$

Folgerung. Bei Verwendung des Zusammenhanges (7) erhält man die asymptotische Entwicklung der Wright-Funktion, wenn man in (18) einmal z durch $(e^{\pi i q} z)^{1/(q+1)}$ und einmal z durch $(e^{-\pi i q} z)^{1/(q+1)}$ ersetzt:

$$\begin{aligned} \Phi(q, \beta; -z) &\sim \frac{1}{2\pi} (e^{-\pi i} z)^{\frac{1-\beta}{q+1}} \exp \left[\left(1 + \frac{1}{q} \right) (e^{-\pi i} z)^{\frac{1}{q+1}} \right] \\ &\quad \cdot \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v a_{2v} \Gamma \left(v + \frac{1}{2} \right) (e^{-\pi i} z)^{-\frac{2v+1}{2(q+1)}} + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} (e^{\pi i} z)^{\frac{1-\beta}{q+1}} \exp \left[\left(1 + \frac{1}{q} \right) (e^{\pi i} z)^{\frac{1}{q+1}} \right] \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v a_{2v} \Gamma \left(v + \frac{1}{2} \right) (e^{\pi i} z)^{-\frac{2v+1}{2(q+1)}}. \end{aligned}$$

Diese Entwicklung gilt für $|\arg z| \leq \pi$ und wurde von Wright in [3] angegeben.

§ 5. Darstellung von $D(a, b, x)$

Mit den Bezeichnungen

$$H(a, b; x) = \begin{cases} \zeta \left(\frac{b}{a} \right) x^{\frac{1}{a}} + \zeta \left(\frac{a}{b} \right) x^{\frac{1}{b}} + \frac{1}{4} & \text{für } a \neq b \\ x \log x + (2C - 1)x + \frac{1}{4} & \text{für } a = b = 1, \end{cases}$$

$$\sigma_{v,\mu}(a, b; k) = \sum_{n^\alpha m^\beta = k} n^{av} m^{b\mu}$$

$$\varrho_v(a, b; x) = \int_0^\infty \sin 2\pi t^{\frac{1}{b}} \sin 2\pi \left(\frac{x}{t} \right)^{\frac{1}{a}} \frac{dt}{t^{v+1}}$$

wurde in [2] mit der Einschränkung $\frac{2}{3} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}$ die Entwicklung

$$\frac{D(a, b; x+0) + D(a, b; x-0)}{2} = H(a, b; x) + \frac{x}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{1-\frac{1}{a}, 1-\frac{1}{b}}(a, b; k) \varrho'_0(a, b; kx)$$

bewiesen, wobei die Reihe in jedem abgeschlossenen Intervall, welches keine ganze Zahl enthält, gleichmäßig und für ganzes x gegen den Mittelwert konvergiert. Mit der hier eingeführten η -Funktion können wir $\varrho'_0(a, b; kx)$ ausdrücken. Nach (13) ist

$$(19) \quad \eta(\gamma, \beta; y^\gamma z) = y^{1-\beta} \int_0^\infty u^{-\beta} e^{-yu - zu^{-\gamma}} du,$$

und aus der Definition von $\varrho_0(a, b; x)$ folgt

$$\begin{aligned} \varrho_0(a, b; x) &= -\frac{b}{4\pi^2} \left\{ \int_0^\infty e^{2\pi i(t + x^{1/a} t^{-b/a})} \frac{dt}{t} + \int_0^\infty e^{-2\pi i(t + x^{1/a} t^{-b/a})} \frac{dt}{t} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty e^{2\pi i(t - x^{1/a} t^{-b/a})} \frac{dt}{t} - \int_0^\infty e^{-2\pi i(t - x^{1/a} t^{-b/a})} \frac{dt}{t} \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man in (19) $\beta=1$, $\gamma=\frac{b}{a}$, $y=2\pi e^{\pm\frac{\pi i}{2}}$, $z=2\pi x^{\frac{1}{a}}e^{\pm\frac{\pi i}{2}}$, so wird

$$\varrho_0(a, b; x) = -\frac{b}{4\pi^2} \left\{ \eta\left(\frac{b}{a}, 1; \left(2\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1} x^{\frac{1}{a}}\right) + \eta\left(\frac{b}{a}, 1; \left(2\pi e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1} x^{\frac{1}{a}}\right) - \right. \\ \left. - \eta\left(\frac{b}{a}, 1; e^{\pi i} \left(2\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1} x^{\frac{1}{a}}\right) - \eta\left(\frac{b}{a}, 1; e^{-\pi i} \left(2\pi e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1} x^{\frac{1}{a}}\right) \right\}$$

und wegen (10)

$$\varrho'_0(a, b; x) = \frac{b}{2\pi i a} \left(2\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}} x^{\frac{1}{a}-1} \left\{ \eta\left(\frac{b}{a}, 1+\frac{b}{a}; \left(2\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1} x^{\frac{1}{a}}\right) + \right. \\ \left. + \eta\left(\frac{b}{a}, 1+\frac{b}{a}; e^{\pi i} \left(2\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1} x^{\frac{1}{a}}\right) \right\} - \\ - \frac{b}{2\pi i a} \left(2\pi e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}} x^{\frac{1}{a}-1} \left\{ \eta\left(\frac{b}{a}, 1+\frac{b}{a}; \left(2\pi e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1} x^{\frac{1}{a}}\right) + \right. \\ \left. + \eta\left(\frac{b}{a}, 1+\frac{b}{a}; e^{-\pi i} \left(2\pi e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{\frac{b}{a}+1} x^{\frac{1}{a}}\right) \right\}.$$

Literatur

- [1] G. DOETSCH, Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. II *Basel und Stuttgart*, 1955.
- [2] E. KRÄTZEL, Ein Teilerproblem, *J. Reine Angew. Math.*, **235** (1969), 150—174.
- [3] E. M. WRIGHT, The asymptotic expansion of generalized Besselfunction, *Proc. London Math. Soc.*, 2. ser. **38** (1934), 257—270.
- [4] E. M. WRIGHT, Asymptotic partition formulae, III: Partitions into k -th powers, *Acta Math.*, **63** (1934), 143—191.

(Eingekommen am 6. September 1969.)