

О групповых кольцах конечных групп II.*

А. И. САКСОНОВ (Харьков)

Групповые алгебры конечных групп над нехарактеристическими полями

§ 1. Предварительные сведения

Пусть K — произвольное поле, характеристика которого не делит порядка группы G (нехарактеристическое поле). Групповая алгебра KG группы G над полем K полупроста и разлагается в ортогональную сумму минимальных двусторонних идеалов:

$$(16) \quad KG \cong \mathfrak{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{A}_t,$$

где каждая подалгебра $\mathfrak{A}_i$ ($i=1, \dots, t$) изоморфна полной матричной алгебре над подходящим телом D_i индекса m_i . Разложение (16) индуцирует разбиение множества всех абсолютно неприводимых характеров группы G на непересекающиеся семейства характеров, алгебраически сопряженных относительно поля K . Если η_i — характер неприводимого K -представления группы G , реализуемого в минимальном левом идеале алгебры $\mathfrak{A}_i$, то разложение этого характера в сумму абсолютно неприводимых имеет вид

$$\eta_i = m_i \sum_{j=1}^{z_i} \chi_{ij},$$

где суммирование ведется по всем характерам i -го семейства. Индекс Шура $m_K(\chi_{ij})$ любого из характеров i -го семейства (т. е. при произвольном $j=1, \dots, z_i$) относительно поля K равен индексу m_i тела D_i , а центр тела D_i изоморфен полю $K(\chi_{ij})$ при любом $j=1, \dots, z_i$.

Поле K мы называем полем расщепления группы G (или ее групповой алгебры), если все компоненты в (16) являются полными матричными алгебрами над некоторыми (коммутативными) расширениями поля K . Характеристическое свойство поля расщепления K группы G : индекс Шура $m_K(\chi)$ любого абсолютно неприводимого характера χ группы G относительно поля K равен 1. Аналогично определяется поле расщепления данного абсолютно неприводимого характера χ группы G .

* 1-ю часть статьи и общий список литературы см. в предыдущем номере журнала.

Известно (см., например, [28], теорема *A*), что групповая алгебра KG конечной группы G над произвольным нехарактеристическим полем K с точностью до изоморфизма определяется рациональной групповой алгеброй QG . При изучении же последней основную трудность представляет выяснение строения тел D_i и, в частности, указание их полей расщепления, алгебраических и локальных. Таким образом, в теории немодулярных групповых алгебр замена числовых полей произвольным нехарактеристическим полем дает лишь иллюзорное обобщение, и в дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением алгебр над числовыми полями.

Необходимые читателю сведения из арифметической теории простых алгебр над числовыми полями можно найти в [18]. Оттуда же заимствованы соответствующие обозначения.

Излагая в этом параграфе некоторые известные результаты арифметической теории представлений конечных групп, мы приводим отдельные доказательства, поскольку ниже ссылаемся на них.

Лемма 2. 1. (О. Шиллинг [37]). Пусть G — группа, K — алгебраическое числовое поле, $\mathfrak{A}$ — произвольная простая компонента разложения (16) алгебры KG . Точками ветвления алгебры $\mathfrak{A}$ могут быть лишь простые дивизоры ее центра, делящие число $|G|$.

Доказательство. Согласно арифметической теории алгебр точками ветвления алгебры $\mathfrak{A}$ могут быть лишь простые дивизоры ее центра, делящие дискриминант $\mathfrak{A}$. Последний делит дискриминант любого порядка алгебры $\mathfrak{A}$ [18, стр. 87]. Легко проверить, что дискриминант (немаксимального) порядка алгебры $\mathfrak{A}$, порожденного элементами $g \in G$, равен $|G|^{|G|}$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Телами вещественных кватернионов мы называем тела 4-го ранга над алгебраическими числовыми полями, не распадающиеся при расширении основного поля до поля вещественных чисел.

Теорема 2. 2. (П. Роккет [30]). Пусть G — нильпотентная группа. Тогда простые компоненты разложения (16) для алгебры QG являются полными матричными алгебрами над полями или над телами вещественных кватернионов. Если $|G|$ нечетно, то алгебра QG расщепляется.

Доказательство. Как известно, если $G \cong G_1 \times G_2$, то любая простая компонента алгебры QG является тензорным произведением соответствующих простых компонент алгебр QG_1 и QG_2 (над пересечением центров этих компонент). Поэтому теорему 2.2 достаточно доказать для групп примарного порядка.

Пусть G — p -группа. Конечными точками ветвления алгебры $\mathfrak{A}$ могут быть лишь простые дивизоры $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$, делящие p (лемма 2. 1). Имеется в точности один такой простой дивизор $\mathfrak{p}$, так как $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ есть подполе поля p^a -х корней из 1, а в последнем $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{(p^a)}$ [24, стр. 338].

Если p нечетно, то ранг $\mathfrak{A}$ над ее центром нечетен и, следовательно, $\mathfrak{A}$ не имеет бесконечных точек ветвления. Но тогда из теоремы монодромии вытекает, что $\mathfrak{A}$ вообще не имеет точек ветствления, т. е. является полной матричной алгеброй над своим центром.

Если $p=2$ и для всех бесконечных простых дивизоров $3(\mathfrak{A})\left(\frac{\mathfrak{A}}{p}\right)=0$, то в силу тех же соображений $\mathfrak{A}$ расщепляется. Если же для некоторых бесконечных точек $p\left(\frac{\mathfrak{A}}{p}\right)=\frac{1}{2} \bmod 1$, то по теореме монодромии для единственной возможной конечной точки ветвления $p|2\left(\frac{\mathfrak{A}}{p}\right)=\frac{1}{2}$ или $0 \bmod 1$. В этом случае наименьшее общее кратное p -индексов алгебры $\mathfrak{A}$ равно 2. $\mathfrak{A}$ — алгебра индекса 2, не расщепляющаяся над полем Q_∞ . Теорема доказана.

Следствие 2.3 [30]. Любое представление нильпотентной группы G с характером χ реализуется над полем $Q(\chi, \sqrt{-1})$. Если $|G|$ нечетно, то это представление реализуется над полем характера.

При изучении групповых алгебр конечных групп над числовыми полями возможна редукция двух типов. С одной стороны, результаты арифметической теории алгебр позволяют ограничиться рассмотрением вещественной и p -адических (по всем p , делящим порядок группы) групповых алгебр. С другой стороны, изучение немодулярной групповой алгебры произвольной конечной группы сводится к изучению групповых алгебр групп весьма специального строения фундаментальной теоремой Э. Витта [47], формулируемой ниже.

Пусть K — поле нулевой характеристики. K -элементарной (по простому p) подгруппой H группы G называется такое полупрямое произведение циклического p' -холловского нормального делителя A группы H на p -группу P , что группа $\text{Aut}_H(A)$ изоморфна некоторой p -подгруппе группы $\text{Gal}(K(\varepsilon)/K)$. Здесь ε — примитивный $|G|$ -й корень из 1. Q -элементарная подгруппа называется гиперэлементарной. Часто мы будем говорить о гиперэлементарной группе H , не рассматривая ее как подгруппу G . В этом случае H — произвольное полупрямое произведение циклического p' -холловского нормального делителя, A на p -группу P .

Теорема 2.4 (Э. Витт [47]). Для любой простой компоненты $\mathfrak{A}$ алгебры KG существует такая K -элементарная подгруппа H группы G и такая простая компонента $\mathfrak{B}$ алгебры KH , что p -компоненты алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ подобны.

Если в теореме 2.4 потребовать лишь совпадения p -частей индексов алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то получим известную теорему Р. Брауэра [11], [16, § 70].

Следствие 2.5. Если для любой K -элементарной подгруппы H группы G алгебра KH расщепляется, то расщепляется и алгебра KG .

Замечание 2.6. Из результатов Витта [47] и С. Д. Бермана [5] [6] вытекает, что точно представляемая в компоненте $\mathfrak{B}$ (из теоремы 2.4) факторгруппа $\bar{H}$ K -элементарной подгруппы H является расширением самоцентрализующегося нормального делителя с помощью (абелевой) p -группы (см. также [38]). Такую группу мы, следуя С. Д. Берману [6], будем называть K -специальной.

Следующие важные утверждения принадлежат, по существу, Э. Витту [47].

Предложение 2.7 А. Пусть G гиперэлементарна по простому q . Если для нечетного простого $p \neq q$ $K=Q(\varepsilon_p)$, где ε_p — примитивный p -й корень из 1, то алгебра KG расщепляется.

Предложение 2.7 В. Пусть G гиперэлементарна по простому $q \neq 2$. Тогда алгебра Q_2G расщепляется.

Предложение 2.7 С. Пусть G гиперэлементарна по простому $q \neq 2$. Тогда алгебра Q_qG расщепляется.

Предложение 2.7 D. Пусть G гиперэлементарна по простому 2. Если $K = Q_2(\sqrt{-1})$, то алгебра KG расщепляется.

При доказательстве Витт пользуется своим методом сдвига скрещенных произведений [45]. Однако этого можно избежать, оставаясь в рамках тех же идей. Приведем, например, доказательство предложения 2.7 А.

Нам понадобится следующая хорошо известная

Лемма 2.8. Пусть G — циклическая p -группа, σ — p' -элемент группы $\text{Aut}(G)$. Если σ тривиально действует на элементах порядка p группы G , то $\sigma = 1$.

Ввиду замечания 2.6 для доказательства предложения 2.7 А достаточно рассмотреть такую простую алгебру $\mathfrak{B}$, что точно представляемая в ней группа $\bar{G}$ является Q -специальной по простому q . $\bar{G} \cong A \rtimes \Gamma$, где A циклическа, $C_G(A) = A$ и Γ — q -группа. $\mathfrak{B} \cong (L, \Gamma, \{x\})$, где циклотомическое поле L над Q_p есть композит вполне разветвленного поля $V p^a$ — x корней из 1 и неразветвленного поля W .

Так как $e_p \in K \subseteq \mathfrak{Z}(\mathfrak{B})$, то q -группа Γ оставляет на месте элементы p -го порядка мультипликативной группы поля и поэтому в силу леммы 2.8 тривиально действует на элементах поля V . $\mathfrak{B} \sim (W, \{x'\})$. Поскольку W неразветвлено, а $\{x'\}$ — система факторов, состоящая из корней из 1, т. е. единиц в W , то $\mathfrak{B}$ расщепляется [46].

Из предложений 2.7 А–D Витта непосредственно выводятся многие более поздние результаты арифметической теории представлений конечных групп.

Следствие 2.9. Пусть G — произвольная конечная группа, $K = Q_p(e_p)$, где e_p при p нечетном есть примитивный p -й корень из 1, $e_2 = \sqrt{-1}$. Тогда алгебра KG расщепляется.

Следствие 2.10 [6]. Пусть χ — любой абсолютно неприводимый характер группы G . Тогда индекс Шура $m_{Q_p}(\chi)$ при $p \neq 2$ делит $p-1$, $m_{Q_2}(\chi)$ делит 2.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — простая компонента алгебры Q_pG , отвечающая характеру χ . Положим $d = (Q_p(\chi, e_p) : Q_p(\chi))$, где e_p есть примитивный p -й корень из 1 при $p \neq 2$ и $e_2 = \sqrt{-1}$. Так как по следствию 2.9 алгебра $\mathfrak{A} \otimes_{Q_p(\chi)} Q_p(\chi, e_p)$ расщепляется, то индекс $\mathfrak{A}$ делит d . Но из элементов теории полей известно, что d делит

$$(Q_p(e_p) : Q_p) = \begin{cases} p-1 & \text{при } p \neq 2, \\ 2 & \text{при } p = 2. \end{cases}$$

Переходя от локального случая к глобальному, получаем

Следствие 2.11 [39]. Пусть G — группа порядка $\prod_{i=1}^n p_i^{d_i}$, χ — абсолютно неприводимый характер группы G . Тогда $m_Q(\chi)$ делит $2 \prod_{i=1}^n (p_i - 1)$.

Вытекает из следствия 2. 10 и того факта, что $m_Q(\chi)$ равно наименьшему общему кратному чисел $m_{Q_\infty}(\chi)$, $m_{Q_2}(\chi)$, ..., $m_{Q_p}(\chi)$, ..., из которых отличным от 1 могут быть лишь $m_{Q_\infty}(\chi)$ и те $m_{Q_p}(\chi)$, для которых $p \mid |G|$.

Заметим, что в следствии 2. 11 произведение $2 \prod_{i=1}^n (p_i - 1)$ можно заменить соответствующим наименьшим общим кратным.

Следствие 2. 12 [39]. Пусть G — группа порядка $\prod_{i=1}^n p_i^{d_i}$, ε_i — примитивный p_i -й корень из 1, $K = Q(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ при $|G|$ нечетном и $K = Q(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \sqrt{-1})$ при $|G|$ четном. Тогда алгебра KG расщепляется.

Вытекает из следствия 2. 9.

§ 2. Группы с расщепляющимися групповыми алгебрами

Пусть задан некоторый класс $\mathcal{L}$ конечных групп. Поле K назовем минимальным полем расщепления для класса $\mathcal{L}$, если для любой $G \in \mathcal{L}$ алгебра KG расщепляется и в то же время для всякого поля $K_1 \subset K$ найдется $G \in \mathcal{L}$ такая, что алгебра $K_1 G$ не расщепляется.

Почти очевидно следующее

Предложение 2. 13. Пусть θ — теоретико-групповое свойство, наследственное на гиперэлементарные подгруппы. Тогда для того, чтобы поле K было минимальным полем расщепления для класса θ -групп, необходимо и достаточно, чтобы K было минимальным полем расщепления для класса гиперэлементарных θ -групп.

Для доказательства достаточно сослаться на следствие 2. 5 и учесть, что любая K -элементарная подгруппа является гиперэлементарной.

Редукция к гиперэлементарным подгруппам позволяет выделить те классы групп, для которых свойство расщепляемости групповых K -алгебр наследственно на подгруппы. Однако на этом пути нельзя получить полного описания групп с расщепляющимися, скажем, рациональными групповыми алгебрами (соответствующий пример доставляет семейство симметрических групп, имеющих расщепляющиеся групповые Q -алгебры, хотя Q -алгебры их подгрупп могут быть, разумеется, весьма далекими от расщепляющихся). Пока найдены лишь отдельные классы групп, рациональные или p -адические групповые алгебры которых расщепляются.

Результат П. Роккета изложен выше (теорема 2. 2). Ж.-П. Серр показал, что если p и q — различные простые и группа G обладает инвариантной q -силовой подгруппой с циклической факторгруппой, то алгебра $Q_p G$ расщепляется. Этот результат Серра обобщается следующей теоремой С. Д. Бермана [6]:

Если G содержит холловский нормальный делитель N , $p \nmid |N|$, с нильпотентной факторгруппой, то для произвольного абсолютно неприводимого характера χ группы G $m_{Q_p}(\chi) = 1$ при $p \neq 2$ и $m_{Q_2}(\chi) = 1$ или 2. Если, кроме того, 2-силовая подгруппа группы G абелева, то $m_{Q_2}(\chi) = 1$.

Здесь мы укажем более широкие классы групп с расщепляющимися или „почти расщепляющимися” рациональными и p -адическими групповыми алгебрами.

Группа G порядка $\prod_{i=1}^n p_i^{d_i}$, $p_1 < \dots < p_n$, называется дисперсивной, если подгруппа H порядка $\prod_{i=1}^k p_i^{d_i}$ для любого $k=1, \dots, n$ инвариантна в G . G называется CN -группой, если централизатор любого ее неединичного элемента нильпотентен. Как дисперсивность, так и CN -свойство, очевидно, наследственны на подгруппы.

Лемма 2. 14. Пусть G — CN -группа, g — её p' -элемент. Если $C_G(g)$ содержит нетривиальный p -элемент g' , то $C_G(g)$ содержит p -силовскую подгруппу G .

Доказательство. Без нарушения общности g можно считать q -элементом, $g \neq p$, q — простое. Пусть $g'' \neq 1$ принадлежит центру p -силовской подгруппы P , содержащей g' . Очевидно, $g \in C_G(g')$ и $g'' \in C_G(g')$. По CN -свойству отсюда вытекает $g \in C_G(g'')$ и $g \in C_G(P)$. Лемма доказана.

Лемма 2. 15. Гиперэлементарная дисперсивная группа нильпотентна. Гиперэлементарная CN -группа либо нильпотентна, либо является группой Фробениуса с циклическим ядром (и циклическим дополнением).

Доказательство. Пусть H — гиперэлементарная дисперсивная группа. $H = A \rtimes P$, где A — циклическая p' -группа, P — p -группа. Пусть $q \mid |A|$ и A_q — q -силовская подгруппа H . Если $q < p$, то $A_q P$ нильпотентна ввиду $A_q \triangleleft A_q P$ и $p \nmid |\text{Aut}(A_q)|$. Если $q > p$, то $A_q P$ также нильпотентна, ибо $A_q \triangleleft A_q P$, а ввиду дисперсивности $A_q P$ и $P \triangleleft A_q P$. Таким образом, $P \subset C_H(A)$ и $H = A \times P$.

Пусть теперь $H = A \rtimes P$ — CN -группа. Если все неединичные элементы подгруппы P индуцируют регулярные автоморфизмы подгруппы A , то H — группа Фробениуса с циклическим ядром A . Дополнение P изоморфно подгруппе группы автоморфизмов циклической группы, следовательно, абелево и поэтому циклично.

Если H не является группой Фробениуса, то найдется $a \in A^*$ такой, что $C_H(a) \supset A$. Тогда $C_H(a)$ содержит нетривиальный p -элемент и — по лемме 2. 14 — всю подгруппу P . Так как H — CN -группа и $A \subset C_H(a)$, $P \subset C_H(a)$, то A и P поэлементно перестановочны, $H = A \times P$ и H нильпотентна. Лемма доказана.

Для дальнейшего нам нужно выяснить строение рациональных групповых алгебр 2-групп Судзуки [42].

Пусть F — поле из 2^{2n+1} элементов, $\alpha \rightarrow \alpha^*$ ($\alpha \in F$) — произвольный автоморфизм поля F , удовлетворяющий условию: из $\alpha\alpha^* = 1$ следует $\alpha = 1$. 2-группу Судзуки T_n можно определить [42] как мультипликативную группу матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha^* & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, 2-группа Судзуки T_n есть множество пар (α, β) , $\alpha, \beta \in F$, с композицией, задаваемой правилом

$$(17) \quad (\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \alpha\gamma^* + \beta + \delta).$$

Порядок группы T_n равен 2^{4n+2} . Центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и изоморфны элементарной абелевой группе порядка 2^{2n+1} . Все инволюции группы T_n центральны.

Лемма 2. 16. Все нелинейные характеры 2-группы Судзуки не вещественны.

Доказательство. Элемент $g \in G$ называется вещественным, если он сопряжен со своим обратным. По известной теореме Фробениуса—Шура [20] число вещественных характеров конечной группы равно числу классов, состоящих из сопряженных вещественных элементов, коротко: числу вещественных классов. Из сказанного выше о порядке коммутанта 2-группы Судзуки T_n вытекает, что T_n имеет 2^{2n+1} линейных характеров, причем все они вещественны, ибо T_n/T'_n — элементарная абелева. С другой стороны, поскольку экспонента центра группы T_n равна 2, то все 2^{2n+1} центральных классов вещественны. Таким образом для доказательства леммы достаточно убедиться в том, что любой нецентральный класс сопряженных элементов группы T_n не вещественен.

Пусть ξ — примитивный элемент поля F . Нецентральным элементам группы T_n соответствуют, как нетрудно проверить, пары (α, β) , для которых $\alpha \neq 0$, т. е. $\alpha = \xi^i$, $i = 1, \dots, 2^{2n+1} - 1$. Применяя правило (17), находим, что если $g = (\xi^i, \xi^j)$, то $g^{-1} = (\xi^i, (\xi\xi^*)^i + \xi^j)$. Допустим, что g и g^{-1} сопряжены. Тогда уравнение

$$(18) \quad (\xi^i, \xi^j)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})(\xi^i, (\xi\xi^*)^i + \xi^j)$$

должно иметь решение $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in F$. Из (18) вытекает, что

$$\xi^i \mathbf{u}^* + \xi^j + \mathbf{v} = \mathbf{u} \xi^{*i} + (\xi\xi^*)^i + \xi^j + \mathbf{v},$$

$$\xi^i \mathbf{u}^* + \xi^{*i} + (\xi\xi^*)^i = 0, \quad (\xi^i + \mathbf{u})^*(\xi^i + \mathbf{u}) = 0$$

и, наконец,

$$(19) \quad \frac{\mathbf{u}}{\xi^i + \mathbf{u}} \left(\frac{\mathbf{u}}{\xi^i + \mathbf{u}} \right)^* = 1.$$

Из определения автоморфизма $\alpha \rightarrow \alpha^*$ поля F и равенства (19) следует, что $\frac{\mathbf{u}}{\xi^i + \mathbf{u}} = 1$ и $\xi^i = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие 2. 17. Рациональные групповые алгебры 2-групп Судзуки расщепляются.

В самом деле, из доказательства теоремы 2. 2 видно, что для 2-группы G нерасщепляемость алгебры QG влечет нерасщепляемость алгебры $Q_\infty G$. Однако ввиду леммы 2. 16 вещественные алгебры 2-групп Судзуки расщепляются.

Кватернионными телами специального типа мы называем некоммутативные тела, возникающие в разложении (16) для рациональной групповой алгебры группы обычных или обобщенных кватернионов. Имеет место следующее обобщение теоремы Роккета.

Теорема 2.18. *Рациональная групповая алгебра дисперсивной группы или CN-группы является ортогональной суммой полных матричных алгебр над полями или над кватернионными телами специального типа. Если G удовлетворяет любому из следующих условий:*

- 1) G — дисперсивная группа с абелевой 2-силовой подгруппой,
 - 2) G — CN-группа, 2-силовая подгруппа которой абелева или является 2-группой Судзуки,
- то алгебра QG расщепляется.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная простая компонента разложения (16) для алгебры QG . По теореме 2.4 для данного простого p найдется такая гиперэлементарная подгруппа $H \subseteq G$ и такая простая компонента $\mathfrak{B}$ разложения (16) для алгебры QH , что p -компоненты алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ подобны. Так как дисперсивность и CN-свойство наследственны на подгруппы, то в соответствии с леммой 2.15 любая гиперэлементарная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо является группой Фробениуса с циклическим ядром и циклическим дополнением.

Q -алгебра группы Фробениуса указанного типа, очевидно, расщепляется. Если гиперэлементарная подгруппа H нильпотентна, то по теореме 2.2 p -компоненты любого простого двустороннего идеала $\mathfrak{B}$ алгебры QH , отвечающие нечетным p , расщепляются. Что же касается 2-компоненты алгебры $\mathfrak{B}$, то она либо расщепляется, либо подобна некоторому телу вещественных кватернионов, возникающему в разложении рациональной групповой алгебры 2-группы. В силу замечания 2.6 точно представляемая в таком теле кватернионов группа есть расширение самоцентрализующейся циклической 2-группы S с помощью 2-группы T и притом нерасщепляемое расширение. Так как индекс тела равен 2, то $|T|=2$, а так как тело не расщепляется над полем вещественных чисел, то нетривиальный элемент факторгруппы ST/S индуцирует на S автоморфизм, переводящий каждый элемент в его обратный. Таким образом, мы приходим к определяющим соотношениям группы обычных или обобщенных кватернионов.

Если при наших предположениях относительно G 2-силовая подгруппа группы G абелева, то, конечно, 2-компонента рассматривавшейся выше алгебры $\mathfrak{B}$ расщепляется.

Остается рассмотреть случай, когда G — CN-группа, 2-силовая подгруппа которой является 2-группой Судзуки. Если H — нильпотентная гиперэлементарная подгруппа группы G и порядок H четен, то существует нильпотентная подгруппа $H_1 \cong H$, 2-силовая подгруппа которой совпадает с 2-силовой подгруппой группы G . Действительно, пусть $H = U \times T$, где T — 2-силовая подгруппа H , $|T| > 1$. Пусть $T \subseteq T_1$, где T_1 — некоторая 2-силовая подгруппа группы G . Если $t \in (Z(T_1))^{\#}$, то $t \in C_G(T)$, а ввиду нильпотентности $H \cup \langle t \rangle \subseteq C_G(T)$. Но тогда по CN-свойству группы G $t \in C_G(U)$, $U \subseteq C_G(t)$. Так как и $T_1 \subseteq C_G(t)$, то T_1 и U поэлементно перестановочны, $H_1 = U \times T$ нильпотентна, $H_1 \cong H$.

Выше мы показали, что в случае, когда G обладает CN -свойством, всякая гиперэлементарная нильпотентная подгруппа H четного порядка содержится в такой нильпотентной подгруппе $H_1 \subseteq G$, что 2-силовские подгруппы групп H_1 и G совпадают. Таким образом, 2-компонента группы H_1 оказывается 2-группой Судзуки. Учитывая следствие 2.17, получаем, что алгебра QH_1 расщепляется. Доказательство теоремы 2.18 завершается ссылкой на следствие 2.5.

Из теоремы 2.18 вытекают очевидные следствия для индексов Шура характеров групп рассматриваемых типов. В частности получаем

Следствие 2.19. Представления простых неабелевых групп $LF(2, 2^a)$, $a > 1$, (специальные проективные группы) и $Sz(2^{2b+1})$ (простые группы Судзуки) реализуются над полем характера.

Аналог теоремы 2.18 для локальных числовых полей обобщает сформулированные выше результаты Ж.-П. Серра [38] и С. Д. Бермана [6].

Теорема 2.20. Пусть $p \neq 2$, G содержит холловский нормальный делитель N , $p \nmid |N|$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) G/N дисперсивна,
- 2) для произвольного простого делителя $q (\neq p)$ числа $(G:N)$ централизатор любого нетривиального q -элемента группы G/N нильпотентен.

Тогда алгебра $Q_p G$ расщепляется.

Пусть G — произвольная группа с абелевой 2-силовской подгруппой. Тогда алгебра $Q_2 G$ расщепляется.

Доказательство. Легко видеть, что вместе с группой G требованиям теоремы удовлетворяет всякая ее подгруппа. Поэтому ввиду следствия 2.5 мы можем считать, что G Q_p -элементарна.

Рассмотрим сначала случай нечетного p . Если G Q_p -элементарна по p , то по предложению 2.7 алгебра $Q_p G$ расщепляется.

Пусть $G = A \rtimes T$ Q_p -элементарна по $q \neq p$. Из доказательства предложения 2.7 А следует, что алгебра $Q_p G$ расщепляется, если расщепляется алгебра $Q_p H$, где $H = A_p \rtimes T$, а A_p — p -силовская подгруппа группы A (и G). Ограничимся поэтому исследованием алгебры $Q_p H$.

Если $q \mid |H|$, то H q -замкнута и, следовательно, нильпотентна. Так как $p \neq 2$, то $Q_p H$, а вместе с ней и $Q_p G$, расщепляется. Если же $q \nmid (G:H)$, то $H \cap N = \{1\}$, H изоморфна некоторой подгруппе группы G/N и удовлетворяет требованиям 1) или 2) условия доказываемой теоремы. Мы утверждаем, что в этом случае H либо нильпотентна, либо является группой Фробениуса с циклическим ядром и циклическим дополнением.

В самом деле, если H не является группой Фробениуса, то найдется пара коммутирующих элементов $x \in A_p^\#$ и $y \in T^\#$. Тогда по условию 2) теоремы $x \in C_H(Z(T))$ и $T \subseteq C_H(x)$. Отсюда вытекает, что T тривиально действует на $\langle x \rangle \subseteq A_p$ и поэтому, ввиду леммы 2.8, на всей A_p . Таким образом, H нильпотентна и алгебра $Q_p H$ снова расщепляется.

Теперь рассмотрим случай $p=2$. Условие абелевости 2-силовской подгруппы, очевидно, наследственно на подгруппы, так что мы можем считать G Q_2 -элементарной. Если G Q_2 -элементарна по нечетному простому q , то по предложению 2.7 В алгебра $Q_2 G$ расщепляется.

Пусть G Q_2 -элементарна по числу 2, а $\mathfrak{A}$ — произвольная простая компонента алгебры Q_2G . Точно представляемая в компоненте $\mathfrak{A}$ факторгруппа группы G является Q_2 -специальной группой по простому 2. $\mathfrak{A}$ изоморфна скрещенному произведению циклотомического поля L над Q_2 на некоторую 2-подгруппу Γ группы $\text{Gal}(L/Q_2)$. $L = V \otimes_{Q_2} W$, где V — поле 2^a -х корней из 1 над Q_2 , а W — поле инерции поля L . Повторяя рассуждения Витта [47], использованные в доказательстве предложения 2.7 D, убеждаемся, что

$$(L, \Gamma, \{\alpha\}) \sim (V, \Gamma_1, \{\alpha'\}) \otimes (W, \Gamma_2, \{\alpha''\}) \sim (V, \Gamma_1, \{\alpha'\}).$$

Если 2-силовская подгруппа группы G абелева, то это же верно для точно представляемой в $\mathfrak{A}$ ее Q_2 -специальной факторгруппы и, следовательно, $\Gamma_1 \cong \{1\}$. $\mathfrak{A}$ расщепляется. Теорема 2.30 доказана.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим случай, в некотором смысле противоположный случаю полного расщепления. Именно, рассмотрим групповые алгебры, среди простых компонент которых имеются алгебры с делением.

Теорема 2.21. Пусть G — произвольная конечная группа. Тогда среди простых компонент разложения (16) для алгебры QG , соответствующих точным представлениям группы G , имеется не более одной алгебры с делением.

Доказательство. Пусть простая компонента $\mathfrak{A}_j$ разложения (16), отвечающая точному представлению Δ_j группы G является телом. Тогда Δ_j индуцируется регулярным представлением алгебры $\mathfrak{A}_j$. Так как в теле уравнение $xa=a$ при любом отличном от нуля $a \in \mathfrak{A}_j$ имеет единственное решение $x=1$, то Δ_j является представлением без неподвижных точек, т. е. матрицы, соответствующие неединичным элементам группы G , не имеют характеристических корней, равных 1. Это означает, что ограничение характера ζ_j представления Δ_j на любой нетривиальной циклической подгруппе H_i группы G не содержит главного характера 1_{H_i} группы H_i .

Пусть $\zeta_j = m(\chi_{j_1} + \dots + \chi_{j_r})$ — разложение характера ζ_j на абсолютно неприводимые компоненты. В силу закона взаимности Фробениуса [16, § 38]

$$0 = (\zeta_j \downarrow_{H_i}, 1_{H_i})_{H_i} = mr_j(\chi_{j_1} \downarrow_{H_i}, 1_{H_i})_{H_i} = mr_j(1_{H_i}^G, \chi_{j_1})_G,$$

откуда вытекает, что в разложении индуцированного характера на неприводимые

$$1_{H_i}^G = \sum_{s=1}^t a_{is} \zeta_s$$

коэффициент $a_{ij}=0$. Так как в роли H_j может выступать любая циклическая подгруппа, кроме единичной H_1 , то для рассматриваемого значения j $a_{ij}=0$ при всех $i \neq 1$.

Характер $1_{H_i}^G$ не зависит от выбора H_i в классе сопряженных с H_i подгрупп. По индукционной теореме Артина [16, § 39] число классов сопряженных циклических подгрупп группы G равно t и матрица $A=(a_{ij})$, $i, j=1, \dots, t$, невырождена.

Предположим теперь, что вопреки утверждению теоремы, существует группа G такая, что среди компонент разложения (16), соответствующих точ-

ным представлениям группы G , имеются две алгебры с делением, скажем, $\mathfrak{A}_{j_1}$ и $\mathfrak{A}_{j_2}$. Тогда по доказанному выше в матрице $A = (a_{ij})_1^t$ будут равны нулю все элементы j_1 -го и j_2 -го столбцов, кроме тех элементов, которые находятся в 1-й строке. Матрица A оказывается вырожденной. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Конечные группы, для которых среди компонент разложения (16) групповой алгебры, отвечающих точным представлениям группы, имеются алгебры с делением, полностью описаны Амицуrom [1]. Согласно результатам Амицура единственной неразрешимой конечной группой, вкладывающейся в тело, является $SL(2, 5)$. Нетрудно проверить, что единственными точками ветвления подтела, порождаемого элементами группы $SL(2, 5)$, являются две бесконечные точки. Поэтому это подтело расщепляется при p -адическом пополнении основного поля для любого конечного простого дивизора p основного поля. Таким образом, справедливы следующие два эквивалентных утверждения:

1°. В разложении $Q_p G \cong \mathfrak{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{A}_t$ p -адической групповой алгебры неразрешимой группы G среди $\mathfrak{A}_j$, соответствующих точным представлениям группы G , нет алгебр с делением.

2°. Любая конечная подгруппа мультипликативной группы p -адического тела разрешима.

§ 3. Обобщение теоремы Шпайзера—Брауэра—Хассе

Займемся вопросом о том, что можно сказать о строении немодулярной групповой алгебры по таблице характеров группы. Если K — произвольное нехарактеристическое поле, то таблица характеров группы G определяет, как легко видеть, число простых компонент $\mathfrak{A}_i$ в разложении (16) для алгебры KG , строение центра каждой компоненты и ранг $\mathfrak{A}_i$ над ее центром. Однако таблица характеров не определяет, вообще говоря, строения тела D_i и даже его индекса — индекса Шура соответствующего характера группы G . Так, группы кватернионов и диэдра 8-го порядка имеют изоморфные таблицы характеров, но неизоморфные рациональные групповые алгебры. Тем не менее, зная таблицу характеров можно дать некоторые оценки для индексов Шура (см., например, [40]).

Иногда значения характера χ „почти определяют” его индекс Шура. Мы имеем ввиду следующий классический результат А. Шпайзера [41] — Р. Брауэра [9] — Г. Хассе [23]:

Пусть χ — абсолютно неприводимый характер группы G , значения которого вещественны. Тогда $m_Q(\chi) = 1$, если степень χ нечетна, и $m_Q(\chi) = 1$ или 2, если эта степень четна.

Здесь будет установлено обобщение этого утверждения.

Пусть χ — произвольный абсолютно неприводимый характер группы G , ε — примитивный $|G|$ -й корень из 1. Если κ — автоморфизм поля $Q(\varepsilon)$, индуцируемый подстановкой $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^r$, то через $\chi^{(r)}$ обозначим характер группы G , являющийся κ -образом характера χ . Наконец, через $\mathfrak{A}^r$ обозначим тензорное произведение (над центром $\mathfrak{A}$) r экземпляров простой алгебры $\mathfrak{A}$.

Теорема 2. 24. Пусть K — числовое поле, содержащее значения абсолютно неприводимого характера χ группы G , $\mathfrak{A}_\chi$ — (центральная) простая компонента разложения (16) алгебры KG , соответствующая характеру χ . Тогда алгебры $\mathfrak{A}_{\chi^{(r)}}$ и $\mathfrak{A}_\chi^r$ подобны.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{E}$ — произвольное центральное конечномерное тело над K . Будем обозначать через $[\mathfrak{A}]$ индекс алгебры $\mathfrak{A}$. Из индукционной теоремы Витта—Бермана, сформулированной для представлений конечных групп над телами, вытекает формула (см. [47], стр. 241):

$$(20) \quad [\mathfrak{A}_\chi \otimes_K \mathfrak{E}^{-1}] = \text{нод}_{H, \psi} \{[\mathfrak{B}_\psi \otimes_K \mathfrak{E}^{-1}] (\chi \downarrow_H, \text{Sp}_K \psi)\}$$

(нод — наибольший общий делитель). Здесь ψ пробегает в точности те характеры K -элементарных подгрупп H группы G , которые появляются в записи χ как целочисленной линейной комбинации индуцированных характеров; $\mathfrak{B}_\psi$ — простая компонента (вообще говоря, нецентральная) разложения (16) для групповой K -алгебры K -элементарной подгруппы H , соответствующая любому из характеров группы H , K -сопряженных с ψ . Из теории алгебр (см., например, [18], IV, § 2, теорема 4) известно, что $\mathfrak{B}_\psi \otimes_K \mathfrak{E}^{-1}$ является простой алгеброй, центр которой совпадает с центром алгебры $\mathfrak{B}_\psi$, так что индекс алгебры $\mathfrak{B}_\psi \otimes_K \mathfrak{E}^{-1}$ имеет смысл.

Допустим, что теорема верна для K -элементарных групп H , появляющихся в правой части равенства (20), т. е. $\mathfrak{B}_{\psi^{(r)}} \sim \mathfrak{B}_\psi^r$. При этом предположении докажем теорему для произвольных групп. Нам нужно показать, что $\mathfrak{A}_\chi \sim \mathfrak{E}$ влечет $\mathfrak{A}_{\chi^{(r)}} \sim \mathfrak{E}^r$. Очевидно, соотношение $\mathfrak{A}_\chi \sim \mathfrak{E}$ эквивалентно соотношению $[\mathfrak{A}_\chi \otimes_K \mathfrak{E}^{-1}] = 1$. Вычислим $[\mathfrak{A}_{\chi^{(r)}} \otimes_K \mathfrak{E}^{-r}]$.

Легко видеть, что для характера $\chi^{(r)}$ роль характеров ψ играют $\psi^{(r)}$ и формула (20) принимает вид

$$[\mathfrak{A}_{\chi^{(r)}} \otimes_K \mathfrak{E}^{-r}] = \text{нод}_{H, \psi} \{[\mathfrak{B}_{\psi^{(r)}} \otimes_K \mathfrak{E}^{-r}] (\chi^{(r)} \downarrow_H, \text{Sp}_K \psi^{(r)})\}.$$

Так как число $(\chi \downarrow_H, \text{Sp}_K \psi)$ рационально, то $(\chi^{(r)} \downarrow_H, \text{Sp}_K \psi^{(r)}) = (\chi \downarrow_H, \text{Sp}_K \psi)$. Далее, $[\mathfrak{B}_{\psi^{(r)}} \otimes_K \mathfrak{E}^{-r}] = [\mathfrak{B}_\psi^r \otimes_K \mathfrak{E}^{-1}] = [(\mathfrak{B}_\psi \otimes_K \mathfrak{E}^{-1})^r]$. Но индексы и, следовательно, экспоненты всех рассматриваемых простых алгебр взаимно просты с r . Поэтому $[(\mathfrak{B}_\psi \otimes_K \mathfrak{E}^{-1})^r] = [\mathfrak{B}_\psi \otimes_K \mathfrak{E}^{-1}]$. Таким образом, все числа, под которых берется в правой части (20), не меняются при переходе от χ и ψ соответственно к $\chi^{(r)}$ и $\psi^{(r)}$ и одновременной замене $\mathfrak{E}$ на $\mathfrak{E}^r$. Тем более неизменным остается под этих чисел и, следовательно, левая часть (20). Мы получили, что $[\mathfrak{A}_{\chi^{(r)}} \otimes_K \mathfrak{E}^{-r}] = 1$, т. е. $\mathfrak{A}_{\chi^{(r)}} \sim \mathfrak{A}_\chi^r$, что и требовалось.

Нам осталось теперь доказать теорему для K -элементарных групп H , фигурирующих в правой части (20). Согласно замечанию 2.6 точно представляемая в алгебре $\mathfrak{B}_\psi$ факторгруппа группы H является расширением самоцентризуемого нормального делителя с помощью (абелевой) p -группы. Для нас сейчас важно лишь то, что $\mathfrak{B}_\psi$ изоморфна скрещенному произведению некоторого циклотомического поля L на группу $\text{Gal}(L/Q(\psi))$ при системе факторов, состоящей из корней из 1. Отображение $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^r$ индуцирует изоморфизм σ (вообще говоря, нецентральный) алгебры $\mathfrak{B}_\psi$ на алгебру $\mathfrak{B}_{\psi^{(r)}}$. При

этом $\sigma(L) \cong L$, $\sigma(Q(\psi)) \cong Q(\psi^{(r)}) = Q(\psi)$, а система факторов для алгебры $\mathfrak{B}_{\psi^{(r)}}$ является r -й степенью системы факторов для $\mathfrak{B}_{\psi}$. Следовательно, $\mathfrak{B}_{\psi^{(r)}} \sim \mathfrak{B}_{\psi}^r$ и теорема полностью доказана.

Следствие 2. 25. Предположим, что для абсолютно неприводимого характера χ группы G выполняется условие $\chi^{(r)} = \chi$. Тогда индекс Шура характера χ относительно любого поля нулевой характеристики делит $r-1$.

Доказательство. Пусть $K = Q(\chi)$. По теореме 2. 24 простая компонента $\mathfrak{A}_{\chi}$ алгебры KG подобна своей r -й тензорной степени, т. е. элемент $\{\mathfrak{A}_{\chi}\}$ брауэровской группы классов совпадает со своей r -й степенью. Отсюда следует, что порядок класса $\{\mathfrak{A}_{\chi}\}$, т. е. экспонента алгебры $\mathfrak{A}_{\chi}$ делит $r-1$. Остается заметить, что для простых алгебр над числовыми полями экспонента равна индексу. Таким образом, $m_K(\chi) = m_Q(\chi)$ делит $r-1$ и, следовательно, это имеет место для индекса Шура относительно любого поля характеристики 0.

Сформулированный выше результат Шпайзера—Брауэра—Хассе получается, если в следствии 2. 25 положить $r = -1$.

Заметим, что для частного случая $r = -1$, т. е. когда χ и $\chi^{(r)}$ комплексно сопряжены, можно дать простое доказательство теоремы 2. 24, не использующее индукционной теоремы Витта—Бермана.

Рассмотрим линейное преобразование σ алгебры KG , индуцированное подстановкой $g \rightarrow g^{-1}$ на множестве элементов группы G . σ переводит любой центральный идемпотент алгебры KG снова в центральный идемпотент и, следовательно, переставляет простые компоненты разложения (16) алгебры KG . Легко проверить, что σ — антиавтоморфизм алгебры KG .

$$\begin{aligned} \sigma\left(\sum_i a_i g_i \cdot \sum_j b_j g_j\right) &= \sigma\left(\sum_{i,j} a_i b_j g_i g_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j g_j^{-1} g_i^{-1} = \\ &= \sum_j b_j g_j^{-1} \cdot \sum_i a_i g_i^{-1} = \sigma\left(\sum_j b_j g_j\right) \cdot \sigma\left(\sum_i a_i g_i\right), \quad a_i, b_j \in K, \quad g_i, g_j \in G. \end{aligned}$$

Так как элементы поля K σ -неподвижны, то отображение $\mathfrak{A} \rightarrow \sigma(\mathfrak{A})$ есть центральный антиизоморфизм и, следовательно, $\sigma(\mathfrak{A}) \sim \mathfrak{A}^{-1}$.

§ 4. Спектральная таблица группы и теоретико-инвариантные свойства ее линейных представлений

В этом и следующем параграфах изучается информация о строении немодулярной групповой алгебры, доставляемая спектральной таблицей группы. Задание спектральной таблицы группы G , очевидно, эквивалентно заданию множества из k^2 характеристических полиномов матриц $\Gamma_{\varrho}(i)$, $1 \leq i, \varrho \leq k$, где $\Gamma_{\varrho}(i)$ обозначает матрицу элемента i -го класса группы G в ϱ -м абсолютно неприводимом представлении. Рассмотрим еще один способ задания спектральной таблицы. Пусть $\eta = \eta(g)$, $g \in G$ — комплекснозначная функция классов сопряженных элементов группы G . Положим $\eta_m(g) = \eta(g^m)$. Легко видеть, что отображения $\eta \rightarrow \eta_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$ (среди них лишь конечное число различных!) являются линейными преобразованиями комплексной алгебры функций классов.

Обозначим через $ZX(G)$ кольцо обобщенных характеров группы G .

Лемма 2. 26. *Отображения $\tau_m: \xi \rightarrow \xi_m$, $\xi \in ZX(G)$, являются эндоморфизмами Z -модуля $ZX(G)$.*

Доказательство. Так как продолжение τ_m на комплексную алгебру функций классов является линейным преобразованием, то нам нужно лишь показать, что для каждого $\xi \in ZX(G)$ ξ_m снова принадлежит $ZX(G)$. Совокупность неприводимых комплексных характеров χ_ϱ , $\varrho = 1, \dots, k$, образует Z -базис кольца $ZX(G)$, а множество отображений τ_p , где p пробегает все простые, порождает полугруппу преобразований τ_m , $m=2, 3, \dots$. Поэтому достаточно проверить, что для любых χ и p $\chi(g^p) \in ZX(G)$.

Пусть Ω — поле комплексных чисел, M — ΩG -модуль с характером χ , $\bar{M}$ — тензорное произведение p экземпляров ΩG -модуля M :

$$\bar{M} = M_1 \otimes \dots \otimes_{\Omega G} M_p, \quad M_\mu \cong M, \quad \mu = 1, \dots, p.$$

Используя идею Г. Вейля [44], определим действие группы подстановок $P = \langle \pi \rangle$ порядка p на модуле $\bar{M}$ следующим образом.

Если $\{e_i\}$ — базис ΩG -модуля M , то обозначим через $\{e_i^{(\mu)}\}$ базис модуля M_μ ($\mu = 1, \dots, p$), являющийся образом базиса $\{e_i\}$ при произвольном, но фиксированном ΩG -изоморфизме M на M_μ . Очевидно, $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}\}$ является базисом $\bar{M}$. Теперь положим

$$\pi(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}) = e_{\pi(i_1)} \otimes \dots \otimes e_{\pi(i_p)},$$

превратив, таким образом, $\bar{M}$ в ΩP -модуль. Легко видеть, что каждый оператор ΩP перестановочен с каждым оператором из ΩG .

Группа P имеет p линейных характеров $\zeta_1 \equiv 1, \dots, \zeta_p$. Пусть $\bar{M} = M^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} M^{(p)}$ — разложение ΩP -модуля $\bar{M}$ в такую прямую сумму ΩP -модулей, что характер модуля $M^{(j)}$ есть кратное характера ζ_j . Поскольку группы операторов P и G поэлементно перестановочны, то $M^{(j)}$ являются и ΩG -модулями.

Вычислим характер ψ_j ΩG -модуля $M^{(j)}$, $j \neq 1$. Из известных формул теории характеров (см., например, [26], стр. 70) выводим, что

$$\psi_j(g) = \frac{1}{p} \sum_{m=1}^p \overline{\zeta_j(\pi^m)} \chi(g^{l_{1m}}) \chi(g^{l_{2m}}) \dots \chi(g^{l_{pm}}),$$

где l_{im} — длина i -го цикла циклического разложения подстановки π^m . В нашем случае при $j \neq 1$ имеем

$$\psi_j(g) = \frac{\chi^p(g) - \chi(g^p)}{p}.$$

Так как ψ_j -характер некоторого ΩG -модуля, то $\frac{\chi^p(g) - \chi(g^p)}{p} \in ZX(G)$, откуда $\chi(g^p) \in ZX(G)$, что и требовалось доказать.

Известно [32], что кольцо $ZX(G)$ определяет таблицу характеров G . Отсюда и из леммы 2. 26 вытекает, что спектральная таблица группы G вполне определяется кольцом $ZX(G)$ и некоторой полугруппой эндоморфизмов аддитивной группы этого кольца. (Разумеется, эта полугруппа эндоморфизмов самим кольцом не выделяется, ибо спектральная таблица группы, вообще говоря, таблицей характеров не определяется).

Каждому абсолютно неприводимому характеру χ группы G можно поставить в соответствие комплексные числа

$$a_n(\chi) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G, g^n=1} \chi(g) \quad \text{и} \quad b_n(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^n),$$

которые мы назовем числами Фробениуса соответственно 1-го и 2-го рода характера χ .

Предложение 2. 27. Числа Фробениуса 1-го и 2-го рода характера χ суть целые рациональные.

Доказательство для чисел $a_n(\chi)$ было дано Фробениусом [19]. Для чисел $b_n(\chi)$ утверждение вытекает из леммы 7. 26, поскольку $b_n(\chi)$ совпадает с коэффициентом при главном характере в разложении $\chi(g^n)$ по неприводимым характерам.

Числа Фробениуса характера содержат определенную информацию и его индексе Шура. Оценка для $m_Q(\chi)$, зависящая от $a_n(\chi)$ указана в [40]. С другой стороны, из результата Фробениуса—Шура [20] следует, что $b_2(\chi)$ полностью определяет $m_{Q_\infty}(\chi)$.

Нетрудно убедиться, что числа Фробениуса 1-го и 2-го рода всех характеров группы G определяются спектральной таблицей G (но не ее таблицей характеров!). Действительно, для вычисления чисел Фробениуса кроме таблицы характеров нужно лишь для любого $i=1, \dots, k$ и любого $m=1, 2, \dots$ знать, какой класс сопряженных элементов содержит m -е степени элементов i -го класса. Но это определяется спектральной таблицей (см. выше теорему 1. 23).

Рассмотрим вопрос о связи между спектральной таблицей группы и теоретико-инвариантными свойствами ее матричных представлений.

Пусть V обозначает n -мерное векторное пространство над полем K характеристики 0, $V^{(m)}$ — тензорное произведение m экземпляров пространства V . Действие полной линейной группы $GL(n, K)$ в пространстве $V^{(m)}$ очевидным образом индуцируется ее действием в V . Как известно (см. [44] или [16], § 67), каждое неприводимое рациональное представление ранга m группы $GL(n, K)$ реализуется в некотором подпространстве пространства $V^{(m)}$.

$V^{(m)}$ можно считать пространством m -линейных форм от n переменных. Будем говорить, что две формы из $V^{(m)}$ принадлежат одному и тому же типу, если они удовлетворяют одним и тем же условиям симметрии, скажем, обе являются симметрическими, кососимметрическими и т. д. Пространство $V^{(m)}$ разлагается в прямую сумму подпространств, каждое из которых состоит из форм одного типа. Продолжением этого разложения служит разложение $V^{(m)} = \sum V_i^{(m)}$ на неприводимые относительно $GL(n, K)$ подпространства [44].

Пусть теперь Γ — абсолютно неприводимое K -представление степени n группы G , χ — характер Γ . Каждое рациональное представление ранга m группы $GL(n, K)$ индуцирует такое же представление линейной группы Γ . Некоторые (вообще говоря, приводимые) рациональные представления m -го ранга группы Γ реализуются в пространствах $V_i^{(m)}$. Так как Γ — представление группы G , то $V_i^{(m)}$ можно интерпретировать как KG -модули. Характеры этих KG -модулей называются m -ми тензорными (или кронекеровскими) симметризованными степенями характера χ .

Если разложение (обычной) кронекеровской степени характера χ на абсолютно неприводимые компоненты определяется таблицей характеров G , то разложение его симметризованных кронекеровских степеней таблицей характеров, вообще говоря, не определяется (ср. разложение симметрического и кососимметрического квадрата точного характера для групп кватернионов и диэдра). Знания спектральной таблицы группы уже оказывается достаточным для отыскания всех симметризованных кронекеровских степеней любого характера.

Предложение 2. 28. Пусть G и $\tilde{G}$ — группы с изоморфными спектральными таблицами, χ и $\tilde{\chi}$ — любая пара соответствующих абсолютно неприводимых характеров G и $\tilde{G}$,

$$(21) \quad [\chi]_s^m = \sum_{q=1}^k a_{sq}^{(m)} \chi_q \quad \text{и} \quad [\tilde{\chi}]_s^m = \sum_{q=1}^k \tilde{a}_{sq}^{(m)} \tilde{\chi}_q,$$

где s обозначает тип симметрии, — разложения (одинаково) симметризованных m -х кронекеровских степеней характеров χ и $\tilde{\chi}$ соответственно на абсолютно неприводимые характеры групп G и $\tilde{G}$. Тогда для всех натуральных m и любого типа симметрии s $a_{sq}^{(m)} = \tilde{a}_{sq}^{(m)}$.

Доказательство. Пусть χ — абсолютно неприводимый характер группы G . Формулы для вычисления симметризованных кронекеровских степеней характера χ содержат лишь обобщенные характеры вида $\chi(g^n)$ группы G [26]. Последние же определяются спектральной таблицей G .

Следствие 2. 29. Пусть G и $\tilde{G}$ — группы с изоморфными спектральными таблицами, Γ и $\tilde{\Gamma}$ — пара соответствующих абсолютно неприводимых представлений групп G и $\tilde{G}$. Тогда матричные группы Γ и $\tilde{\Gamma}$ имеют для каждого m одинаковое число линейно независимых инвариантных m -линейных форм любого данного типа симметрии.

Доказательство. Пусть Γ — линейная группа с характером χ , являющаяся гомоморфным образом группы G . Инвариантная относительно Γ m -линейная форма типа симметрии s является Γ -неподвижным вектором пространства всех m -линейных форм типа симметрии s . Это пространство есть Γ - и, следовательно, G -модуль, характер которого совпадает с $c[\chi]_s^m$, где $[\chi]_s^m$ — m -я симметризованная (по типу s) кронекеровская степень характера χ , а c — кратность, зависящая лишь от m , s и степени характера χ (но не от G). Поэтому размерность пространства Γ -инвариантных m -линейных форм типа s равна $ca_{s1}^{(m)}$ — c -кратному коэффициенту при главном характере χ_1 в разложении (21). Последний определяется спектральной таблицей группы G .

Следствие 2. 29 показывает, что теоретико-инвариантные свойства конечной матричной группы Γ полностью определяются ее спектральной таблицей как абстрактной группы.

Связь между теоретико-инвариантными свойствами конечных групп матриц обсуждалась неоднократно [20] [41] [9] [10]. При этом фундаментальный результат был установлен Фробениусом и Шуром [20], которые показали, что индекс Шура абсолютно неприводимого представления с вещественными характером относительно поля Q_∞ равен 1 или 2 в зависимости от того, будет ли

инвариантная относительно матричной группы Γ комплексная билинейная форма симметрической или кососимметрической. Другими словами, если χ — характер Γ , то $m_{Q_\infty}(\chi) = \frac{3-b_2(\chi)}{2}$, где $b_2(\chi)$ — число Фробениуса 2-го рода характера χ . Учитывая, что для любого нехарактеристического поля K спектральная таблица группы G определяет ранги простых компонент алгебры KG и строение их центров и что алгебра с делением над полем вещественных чисел вполне определяется своим центром и индексом, получаем

Теорему 2. 30. *Строение групповой алгебры произвольной группы G над полем вещественных чисел определяется спектральной таблицей G .*

В случае других нехарактеристических полей мы в состоянии по спектральной таблице произвольной группы дать лишь некоторые оценки для индексов Шура ее характеров.

Предложение 2. 31. Пусть K — поле характеристики 0, G — группа, χ — ее абсолютно неприводимый характер, для которого $m_K(\chi) = m$. Тогда представление группы G , характер которого равен m -й симметризованной по любому типу кронекеровской степени характера χ , реализуется над полем $K(\chi)$.

Доказательство. Характеру χ соответствует простая компонента $\mathfrak{A}$ алгебры KG , индекс которой равен m . Так как экспонента алгебры делит ее индекс, то компонента $\mathfrak{A}^{(m)} = \mathfrak{A} \otimes \dots \otimes_{3(a)} \mathfrak{A}$ (m раз) алгебры KG_m , где через G_m обозначена группа, изоморфная прямому произведению m экземпляров G , расщепляется, т. е. абсолютно неприводимое представление группы G_m с характером, соответствующим произведению m экземпляров характера χ группы G , реализуется над полем $K(\chi)$. Диагональная подгруппа группы G_m изоморфна группе G и ограничение рассматриваемого представления группы G_m на диагональной подгруппе имеет характер, равный m -й кронекеровской степени характера χ . Таким образом, представление Γ группы G , характер которого равен χ^m , реализуется над полем $K(\chi)$.

Далее, модулем представления Γ является пространство $V^{(m)}$ m -линейных форм над полем $K(\chi)$, которое является также S_m -модулем (S_m — симметрическая группа m -й степени). Как известно [44] (см. также [16], § 67), представления группы G , характеры которых равны m -м симметризованным кронекеровским степеням характера χ , реализуются в модулях вида $V^{(m)}e_\sigma$, где e_σ — минимальный идемпотент комплексной групповой алгебры группы S_m . Полная система таких идемпотентов e_σ содержится уже в рациональной алгебре группы S_m [16] [43] и, тем более, в алгебре $K(\chi)S_m$. Отсюда вытекает, что $V^{(m)}e_\sigma$ является $K(\chi)G$ -модулем. Предложение доказано.

Следствие 2. 32. Пусть χ — абсолютно неприводимый характер группы G , индекс Шура которого относительно поля K нулевой характеристики делит m . Тогда для любого q , $1 \leq q \leq k$, и всех возможных типов симметрии s индекс $m_K(\chi_q)$ делит число $a_{s_q}^{(m)}$ из равенства (21).

Доказательство. $a_{s_q}^{(m)}$ ($q = 1, \dots, k$) есть кратность, с которой характер χ_q входит в m -ю симметризованную по типу s кронекеровскую степень $[\chi]^m$

характера χ . Так как в силу предложения 2. 31 представление группы G с характером $[\chi]_s^m$ реализуется над $\mathbf{K}(\chi)$, то, как это следует из элементов теории индекса Шура, $m_{\mathbf{K}(\chi)}(\chi_q)$ делит $a_{s_q}^{(m)}$.

Следствие 2. 32 дает возможность из одних оценок для индексов Шура с помощью спектральной таблицы группы получить ряд новых.

§ 5. Спектральная таблица группы и строение ее немодулярной групповой алгебры

В предыдущем параграфе было показано, что теоретико-инвариантные свойства линейных представлений группы G определяются ее спектральной таблицей и, таким образом, была установлена связь между спектральной таблицей группы G и строением ее групповой алгебры. С другой стороны, эту связь можно обнаружить с помощью теоремы 2. 4 (Э. Витта).

Предложение 2. 33. Пусть $\mathbf{K}$ — произвольное поле характеристики 0, G и $\tilde{G}$ — группы с изоморфными спектральными таблицами, $\mathcal{M} = \{H = A \rtimes \mathbf{P}\}$ и $\tilde{\mathcal{M}} = \{\tilde{H} = \tilde{A} \rtimes \tilde{\mathbf{P}}\}$ — множества всех $\mathbf{K}$ -элементарных подгрупп групп G и $\tilde{G}$ соответственно (A — циклический холловский нормальный делитель, $\mathbf{P}$ — группа примарного порядка). Тогда существует взаимно однозначное соответствие $H \leftrightarrow \tilde{H}$ между множествами $\mathcal{M}$ и $\tilde{\mathcal{M}}$, при котором

- 1) $A \cong \tilde{A}$,
- 2) $|\mathbf{C}_H(A)| = |\mathbf{C}_{\tilde{H}}(\tilde{A})|$,
- 3) $\text{Aut}_H(A) \cong \text{Aut}_{\tilde{H}}(\tilde{A})$.

Доказательство. В теории представлений конечных групп (см., например, [43], стр. 223) устанавливается формула

$$(22) \quad \sum_{g \in G} \chi_q(ag^{-1}bg) = \frac{|G|}{v_q} \chi_q(a) \chi_q(b), \quad a, b \in G.$$

С другой стороны, хорошо известно соотношение

$$(23) \quad h_a h_b \chi_q(a) \chi_q(b) = v_q \sum_{i=1}^k c_{ab}^i h_i \chi_q(i),$$

где c_{ab}^i — структурные константы $\mathbf{Z}$ -кольца „классовых сумм” группы G . Сравнивая (22) с (23) и обозначая i -й класс сопряженных элементов G через $\mathfrak{C}_i$, получаем, что число решений уравнения

$$(24) \quad ax^{-1}bx \in \mathfrak{C}$$

в группе G равно $\frac{|G| c_{ab}^i h_i}{h_a h_b}$, т. е. определяется таблицей характеров группы G . Это число не зависит, разумеется, от выбора a и b в их классах сопряженных элементов.

По спектральной таблице группы мы в состоянии указать класс, состоящий из m -х степеней элементов любого данного класса. Следовательно, спектральная таблица определяет число решений уравнения (24) при $a=b^{-n}$ и $\mathfrak{C}_i=\mathfrak{C}_1=\{1\}$, т. е. число решений уравнения $x^{-1}gx=g^n$ в группе G . Добавим, что, если $\langle g \rangle$ — циклическая группа с образующим g , то порядок ее автоморфизма $g \rightarrow g^n$ вполне определяется числом n .

Далее, уже таблица характеров G определяет для каждого $g \in G$ порядок централизатора $C_G(g)$ и число элементов группы $\langle g \rangle$, сопряженных с g в G . Поэтому, если G и $\tilde{G}$ имеют изоморфные таблицы характеров, то существует взаимно однозначное соответствие между классами сопряженных циклических подгрупп групп G и $\tilde{G}$, сохраняющее порядки централизаторов и нормализаторов соответствующих подгрупп. При этом порядки соответствующих циклических подгрупп не обязаны совпадать (контрпример — две неабелевы группы порядка p^3 , p — простое). Однако, если изоморфны спектральные таблицы групп G и $\tilde{G}$, то порядки элементов соответствующих классов этих групп совпадают, т. е. совпадают порядки соответствующих циклических подгрупп. Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что для каждого $g \in G$ спектральная таблица группы G определяет число элементов любого данного порядка группы $\text{Aut}(\langle g \rangle)$. Так как группа $\text{Aut}(\langle g \rangle)$ абелева, то она определяется с точностью до изоморфизма своим порядковым строением [27]. Предложение 2.33 доказано.

Пусть $H = A \rtimes P$ — K -элементарная подгруппа группы G . Очевидно, H нильпотентна тогда и только тогда, когда $\text{Aut}_H(A) \cong \{1\}$. Нетрудно убедиться также в том, что свойство H быть группой Фробениуса с ядром A определяется строением группы $\text{Aut}_H(A)$ и условием $|C_H(A)| = |A|$. Таким образом, из предложения 2.33 вытекает

Следствие 2.34. Допустим, что группы G и $\tilde{G}$ имеют изоморфные спектральные таблицы и любая K -элементарная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо является группой Фробениуса. Тогда любая K -элементарная подгруппа группы $\tilde{G}$ также либо нильпотентна, либо является группой Фробениуса.

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 2.35. Пусть K — произвольное поле характеристики 0, G — группа, все K -элементарные подгруппы которой нильпотентны или являются группами Фробениуса. Тогда для любой группы $\tilde{G}$, спектральная таблица которой изоморфна спектральной таблице G , алгебры KG и $K\tilde{G}$ изоморфны.

Из этой теоремы и леммы 2.15 вытекает

Следствие 2.36. Пусть G — дисперсивная группа или CN -группа, в частности нильпотентная группа, K — произвольное поле, характеристика которого не делит $|G|$. Тогда строение алгебры KG определяется спектральной таблицей группы G .

Доказательство теоремы 2.35. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию теоремы 2.35. Выше, при доказательстве теоремы 2.18, было установлено, что любая простая компонента $\mathfrak{A}$ алгебры KG является полной матричной алгеброй над некоторым полем или над кватернионным телом специального типа. Центр $\mathfrak{A}$ изоморфен полю $K(\chi)$, где χ — один из соответствующих алгебре

$\mathfrak{M}$ абсолютно неприводимых характеров группы G . Ранг $\mathfrak{M}$ над ее центром также определяется характером χ . Нам нужно показать, что спектральная таблица группы G определяет индекс алгебры $\mathfrak{M}$ и — в случае, если этот индекс равен 2, — строение соответствующего тела.

Так как кватернионное тело специального типа (определение см. в § 2) имеет по крайней мере одну бесконечную точку ветвления, то алгебра $\mathfrak{M}$ расщепляется или не расщепляется одновременно с соответствующей простой компонентой алгебры GQ_∞ . Индекс же последней согласно теореме 2.30 определяется спектральной таблицей группы G . В действительности спектральная таблица определяет не только индекс подобного алгебре $\mathfrak{M}$ тела, но и само это тело с точностью до изоморфизма, как показывает

Лемма 2.37. Пусть D — тело, возникающее в разложении (16) для рациональной групповой алгебры некоторой 2-группы. Тогда тело D определяется с точностью до изоморфизма своим центром.

Доказательство. Как вытекает из доказательства теоремы 2.18, точно представляемая в теле D 2-группа является группой обычных или обобщенных кватернионов. Легко проверить, что неизоморфным группам этой серии отвечают тела с неизоморфными центрами (полями соответствующих характеров). С другой стороны, неизоморфным телам по теореме 2.21 отвечают неизоморфные группы. Доказательство леммы 2.27, а вместе с ней и теоремы 2.35 завершено.

Результаты §§ 5 и 6 делают правдоподобным следующее

Предположение. Спектральная таблица произвольной конечной группы G определяет строение алгебры QG и, следовательно, алгебры KG , где K — произвольное нехарактеристическое поле.

Примечание при корректуре. Указанное предположение опровергается результатом К. Kronstein'a (Proc. Symp. Pure Math., Vol. 21, 1971, 97—98).

Приложение. Об инвариантах конечных групп

Предположим, что каждой конечной группе G поставлен в соответствие некоторый объект $I=I(G)$, который может быть числом или совокупностью чисел, алгебраической системой и т. д. Для объектов I определяется понятие изоморфизма, зависящее от природы объекта. Так, если I — числа, то изоморфизм означает равенство, если I — алгебраическая система, то изоморфизм понимается в обычном смысле. Мы будем говорить, что $I(G)$ — инвариант группы G , если для любой пары изоморфных конечных групп G и $\tilde{G}$ $I(G)$ и $I(\tilde{G})$ изоморфны. Примерами инвариантов служат порядок группы и ее экспонента, таблица характеров группы, (сильная) структура ее (инвариантных) подгрупп*), групповое кольцо, кольцо Ли, ассоциированное с группой и т. д. Группу G также иногда удобно считать (тривиальным образом полным) инвариантом самой себя.

*) Сильной структурой подгрупп называется структура подгрупп с заданными индексами подгрупп.

Рассмотрим некоторое множество $\mathcal{M}$ инвариантов группы. На множестве $\mathcal{M}$ можно ввести бинарное отношение $\cong$, полагая $I_1 \cong I_2$ для $I_1, I_2 \in \mathcal{M}$, если инвариант I_1 содержит не меньшую информацию о группе, чем инвариант I_2 . Придадим этим словам точный смысл. Будем говорить, что инвариант I_1 мажорирует (или определяет) инвариант I_2 , в обозначениях $I_1 \cong I_2$, если для любой пары конечных групп G и $\tilde{G}$ из $I_1(G) \cong I_1(\tilde{G})$ следует $I_2(G) \cong I_2(\tilde{G})$. Если $I_1 \cong I_2$ и найдется пара $G, \tilde{G}$ такая, что $I_2(G) \cong I_2(\tilde{G})$, но $I_1(G) \not\cong I_1(\tilde{G})$, то скажем, что инвариант I_1 строго мажорирует инвариант I_2 ($I_1 > I_2$). Отношение $\cong$, очевидно, рефлексивно и транзитивно, т. е. является отношением квази-порядка в смысле [8]. Отождествив, как обычно, те пары I_1, I_2 , для которых одновременно $I_1 \cong I_2$ и $I_2 \cong I_1$, мы придем к частично упорядоченному множеству $\mathcal{M}'$.

Нетрудно проверить, что в структуре $\mathcal{L}$, натянутой на n инвариантов $I_1, \dots, I_n$ группы G , всегда выполняется дистрибутивный закон и, следовательно, $\mathcal{L}$ есть факторструктура свободной дистрибутивной структуры с n образующими [8, стр. 207]. Так как последняя конечна, то конечна и структура $\mathcal{L}$.

Если $I_{i_1} \cong I_{i_2}$, то всякий автоморфизм инварианта I_{i_1} индуцирует автоморфизм инварианта I_{i_2} . В этом случае существует гомоморфизм $f: \text{Aut}(I_{i_1}) \rightarrow \text{Aut}(I_{i_2})$ и интерес представляет исследование вложения группы $\text{Im } f$ в группу $\text{Aut}(I_{i_2})$ (см., например, [34]).

В 1-й части настоящей статьи рассматривались связи кольца RG с другими инвариантами группы G : сильной структурой нормальных делителей $\mathfrak{N}(G)$, таблицей характеров $X(G)$, спектральной таблицей $\Sigma(G)$, кольцом Ли $L(G)$. Имеют место следующие отношения между этими инвариантами:

- a) $X(G) \cong \mathfrak{N}(G)$ (следствие 2. 2 из [40]),
- b) $\Sigma(G) \cong X(G)$ (следует из определения спектральной таблицы),
- c) $RG \cong \Sigma(G)$ (следствие 1. 26)
- d) $RG \cong L(G)$ (теорема 1. 28),
- e) $L(G) > \mathfrak{N}(G)$ (см. ниже предложение D. 1.).

Покажем на примерах, что в пунктах a)–d) знак $\cong$ следует заменить на $>$.

Рассмотрим $\mathfrak{p}$ -группы порядка $\mathfrak{p}^4$ ($\mathfrak{p} \neq 2$):

$$(25) \quad G = \langle a, b, c \mid a^{\mathfrak{p}^2} = b^{\mathfrak{p}} = 1, a^b = a^{1+\mathfrak{p}}, a^c = ab, b^c = b, a^{\mathfrak{p}} = c^{\mathfrak{p}} \rangle,$$

$$(26) \quad \tilde{G} = \langle a, b, c \mid a^{\mathfrak{p}^2} = b^{\mathfrak{p}} = c^{\mathfrak{p}} = 1, a^b = a^{1+\mathfrak{p}}, a^c = ab, b^c = b \rangle.$$

G и $\tilde{G}$ сильно N -структурно изоморфны, но имеют неизоморфные таблицы характеров.

Две неабелевы $\mathfrak{p}$ -группы порядка $\mathfrak{p}^3$ имеют изоморфные таблицы характеров, но неизоморфные спектральные таблицы.

Группы Дэйда [17] порядка $\mathfrak{p}^7$ ($\mathfrak{p} \geq 5$) имеют изоморфные спектральные таблицы, но неизоморфные кольца Ли. С другой стороны, группы (25) и (26) имеют изоморфные кольца Ли, но неизоморфные таблицы характеров. Таким образом, пары $X(G)$, $L(G)$ и $\Sigma(G)$, $L(G)$ обе несравнимы и, кроме того, RG строго мажорирует как $L(G)$, так и $\Sigma(G)$.

Предложение D. 1. Кольцо Ли группы G определяет сильную структуру ее нормальных делителей.

Доказательство. Существует изоморфизм структуры идеалов кольца $L(G)$ на структуру нормальных делителей G , при котором числа элементов идеала и соответствующего нормального делителя совпадают. Действительно, каждому $N \triangleleft G$ отвечает идеал J кольца $L(G)$ такой, что $L(G)/J \cong L(G/N)$. Обратно, если задан $J \trianglelefteq Z(L(G))$, то ему соответствует $N \trianglelefteq Z(G)$. Если же $J \not\trianglelefteq Z(L(G))$, то найдется $J_1 \trianglelefteq Z(L(G))$, $(0) \subset J_1 \subset J$ (например, $J_1 = J \cap Z(L(G))$). $L(G)/J_1$ содержит идеал J/J_1 и по индукции можно считать, что идеалу J/J_1 соответствует нормальный делитель N/N_1 группы G/N_1 . При этом снова $L(G)/J \cong L(G/N)$.

Если рассматривать не класс всех конечных групп, а его собственный подкласс, то пара несравнимых инвариантов может стать сравнимой, и мы получим некоторую факторструктуру $\bar{\mathcal{L}}$ структуры $\mathcal{L}$. Так, в случае конечных абелевых групп G инварианты $\mathfrak{N}(G)$, $X(G)$, $\Sigma(G)$, $L(G)$ определяют G и, следовательно, натянутая на них структура вырождается в одноэлементную.

Более интересна ситуация для многообразия нильпотентных групп класса 2.

Предложение D. 2. Для конечных групп ниль-класса 2 кольцо Ли определяет таблицу характеров.

Доказательство. Пусть G — группа ниль-класса 2. Для $g, h \in G$ кольцо $L(G)$ определяет $[g, h] \in G$ по mod $\{1\}$, т. е. точно. Поэтому кольцо $L(G)$ указывает, какие элементы группы G сопряжены с данным $g \in G$. Этот класс сопряженных элементов совпадает со смежным классом по подгруппе $[g, G]$, порожденным g .

Но кроме распределения элементов группы G по классам сопряженных кольцо $L(G)$ определяет и таблицу умножения „классовых сумм”. В самом деле, для любых (не обязательно различных) $g, h \in G$

$$g \cdot [g, G] \cdot h \cdot [h, G] = gh[g, G][h, G] = hg[g, G][h, G].$$

Нормальные делители $[g, G]$ и $[h, G]$ содержатся в G' и комплекс $[g, G][h, G]$ а, следовательно, и распределение инвариантного множества $gh[g, G][h, G]$ по классам сопряженных элементов определяются кольцом $L(G)$.

Отметим, что спектральная таблица группы G не определяется кольцом $L(G)$ даже для групп ниль-класса 2 (контпример: группы кватернионов и диэдра 8-го порядка) и что, как уже указывалось, для группы ниль-класса 2 кольцо Ли и спектральная таблица составляют полную систему инвариантов.

Харьковский филиал института автоматики

(Поступило 6. II. 1970)