

## О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. II.

Т. Ж. МОЛЛОВ (Пловдив)

Статья является продолжением работы [7]. Пусть  $M(LG)$  — мультипликативная группа групповой алгебры  $LG$  абелевой  $p$ -группы  $G$  произвольной мощности над полем  $L$  характеристики  $p$ , и  $S(LG)$  — силовская  $p$ -подгруппа группы  $M(LG)$ :

$$S(LG) = \{x = \sum_{g \in G} \alpha_g g / \sum_{g \in G} \alpha_g = 1\}.$$

Группа  $S(LG)$  описана в [1] С. Д. Берманом в случае, когда  $L$  — алгебраическое расширение характеристики  $p$  простого поля  $\Pi$  (с характеристикой  $p$ ), а  $G$  — счетная группа.

В настоящей работе описывается силовская  $p$ -подгруппа  $S(LG)$  в следующих случаях:

1)  $L$  — произвольное алгебраическое расширение  $K$  характеристики  $p$  простого поля  $\Pi$  (с характеристикой  $p$ ), а  $G$  — такая абелева  $p$ -группа, что если  $P$  — ее максимальная полная подгруппа, то фактор-группа  $A = G/P$  имеет конечный тип  $n$  и все ульмовские факторы группы  $A$  — прямые произведения циклических групп;

2)  $L$  — поле  $K$  случая 1, а для абелевой  $p$ -группы  $G$  требуется следующее: если  $P$  — ее максимальная полная подгруппа и  $G^{(i)}$  — подгруппа всех элементов бесконечной высоты группы  $G^{(i-1)}$   $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $G^{(0)} = G$ , то  $G/P$  — такое прямое произведение счетных групп, имеющее бесконечный тип  $\tau$ , что группа  $G^{(n)}$  счетная;

3) абелева  $p$ -группа  $G$  — счетная, а  $L$  — счетное поле характеристики  $p$ , являющееся чисто трансцендентным расширением алгебраического расширения  $K$  простого поля  $\Pi$ .

Укажем на некоторые *основные обозначения и понятия*, которые будем употреблять неизменно в статье:

$G$  — абелева  $p$ -группа с мощностью  $\mu$  и  $P$  — ее максимальная полная подгруппа;

$L$  — поле характеристики  $p$  с мощностью  $\lambda$ , или коммутативное ассоциативное кольцо с единицей характеристики  $p$  (если оговорено противное);

$G^{p^i}(L^{p^i})$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots$  — множество  $p^i$ -ых степеней элементов группы  $G$  (поля или колца  $L$ ), которое очевидно является группой (полем или кольцом);

$N(H)$  — нижний слой абелевой  $p$ -группы  $H$ ;

$|M|$  — мощность множества  $M$ ,  $\mu_i = |G^{p^i}|$  и  $\lambda_i = |L^{p^i}|$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$  ( $\lambda_0 = \lambda$ ,  $\mu_0 = \mu$ ).

$\aleph_0$  — мощность множества натуральных чисел;

счетное множество — множество, равномощное множеству натуральных чисел;

знак „ $\Pi$ ”, или „ $\times$ ” — знак прямого произведения групп.

Терминология абелевых  $p$ -групп, которую будем употреблять, соответствует монографии [6], однако, в отличие от [6], групповую операцию абелевых  $p$ -групп будем записывать мультипликативно. Если  $\beta$  — произвольное порядковое число, то аналогично [6], стр. 158—159, вводим обозначение  $G^{(\beta)}$ , соответствующее в [6] обозначению  $G^\beta$ , для произвольной абелевой  $p$ -группы  $G$ , не обязательно редуцированной.

Пусть  $i$  и  $n$  — натуральные числа и  $n \geq i$ , а  $\gamma$  — произвольное кардинальное число. Через  $C_\gamma^{i,n}$  (соответственно через  $C_\gamma^i$ ) обозначаем прямое произведение циклических  $p$ -групп порядков  $p^i, p^{i+1}, \dots, p^{i+n}$  (соответственно порядков  $p^i, p^{i+1}, \dots, p^{i+s}, \dots$ , где  $s$  — произвольное натуральное число), причем каждая из циклических групп порядка  $p^k$ ,  $i \leq k \leq n$  (соответственно каждая из циклических групп порядка  $p^l$ ,  $l \geq i$ ) встречается  $\gamma$  раз. Кроме того обозначаем  $C_\gamma^{i+1,i} = 1$ .

**Предложение 1.** Пусть  $G$  — абелева  $p$ -группа,  $H$  — ее подгруппа и  $L$  — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей характеристики  $p$ . Если фактор-группа  $G/H$  — прямое произведение циклических групп, то фактор-группа  $S(LG)/S(LH)$  — также прямое произведение циклических групп.

**Доказательство.** Согласно критерию Куликова ([6], стр. 144) фактор-группу  $G/H$  можно представить объединением возрастающей последовательности

$$(1) \quad G_1/H \subseteq G_2/H \subseteq \dots \subseteq G_n/H \subseteq \dots$$

таких своих подгрупп, что высоты элементов каждой группы  $G_n/H$  в группе  $G/H$  конечны и ограничены в совокупности. Пусть  $N$  — точная верхняя грань высот элементов группы  $G_n/H$  в группе  $G/H$ .

Покажем, что группа  $S^* = S(LG)/S(LH)$  является объединением возрастающей последовательности

$$S(LG_1)/S(LH) \subseteq S(LG_2)/S(LH) \subseteq \dots \subseteq S(LG_n)/S(LH) \subseteq \dots$$

своих подгрупп. Действительно, если  $x = \left( \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i \right) S(LH) \in S^*$  и  $g_i \in G_{r_i}$ ,  $i=1, 2, \dots, s$ , то  $x \in S(LG_{r_i})/S(LH)$ , где  $r_i = \max(r_1, \dots, r_s)$ .

Высоты элементов группы  $S_n^* = S(LG_n)/S(LH)$  в группе  $S^*$  не превосходит  $N$ . Допустим противное. Пусть элемент  $\left( \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i \right) S(LH) \neq S(LH)$ , принадлежащий группе  $S_n^*$ , имеет высоту  $m > N$  в группе  $S^*$ , т. е. существует элемент  $\sum_j \beta_j g_j \in S(LG)$ , так, что имеет место

$$(2) \quad \left( \sum_j \beta_j g_j \right)^{p^m} S(LH) = \left( \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i \right) S(LH)$$

Так как элемент  $z = \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i$  не принадлежит группе  $S(LH)$ , то некоторое  $g_i = g$ ,

которое участвует в записи элемента  $z$ , не принадлежит группе  $H$ . Тогда из равенства (2) получим

$$(3) \quad g = g_j^{p^m} h_r \quad (h_r \in H),$$

откуда

$$gH = (g_j H)^{p^m}$$

т. е. неединичный элемент  $gH$  фактор-группы  $G_n/H$  имеет высоту  $m$  ( $m > N$ ) в фактор-группе  $G/H$ , что является противоречием. Согласно критерию Куликова, фактор-группа  $S(LG)/S(LH)$  разлагается в прямое произведение циклических групп.

*Примечание.* Теорема и ее доказательство остаются без изменения, если вместо группы  $S(LG)$  рассмотрим силовскую  $p$ -подгруппу  $S^*(LG)$  группы  $M(LG)$  (см. [7]) группового кольца  $LG$ , т. е. фактор-группа  $S^*(LG)/S^*(LH)$  разлагается в прямое произведение циклических групп.

Следующая лемма исправляет некоторую неточность формулировки и доказательства леммы 1. 2' работы [1].

**Лемма 1.** Пусть  $G^{(1)}$  — подгруппа всех элементов бесконечной высоты группы  $G$  и  $P$  — ее максимальная полная подгруппа, а  $L$  — поле характеристики  $p$  и  $K$  — подполе поля  $L$ , составленное из всех алгебраических элементов над простым подполем  $\Pi$  поля  $L$ . Пусть  $L$  — чисто трансцендентное расширение поля  $K$ . Тогда группы  $S(KG^{(1)})$  и  $S(KP)$  являются соответственно подгруппой всех элементов бесконечной высоты и максимальной полной подгруппой группы  $S(LG)$ . Кроме того фактор-группы  $G/P$  и  $S(LG)/S(KP)$  имеют один и тот же тип  $\tau$ .

*Доказательство.* Мы будем использовать, что алгебраическое расширение  $K$  характеристики  $p$  простого поля  $\Pi$  (с характеристикой  $p$ ) является совершенным, т. е. из любого элемента поля  $K$  можно извлечь  $p^s$ -тый корень ( $s$  — произвольное натуральное) и наоборот, если из некоторого элемента  $\alpha$  поля  $L$  извлекается произвольный  $p^s$ -тый корень,  $s$  — натуральное, то  $\alpha$  принадлежит под полю  $K$  поля  $L$ .

Если  $a = \sum_{k=1}^n \alpha_k g_k$  является элементом группы  $S(LG)$  с бесконечной высотой, то для произвольного натурального  $s$  имеем  $\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k = (\sum_i \beta_i g_i)^{p^s}$ , откуда получим  $g_k = g_{k_1}^{p^s} = \dots = g_{k_r}^{p^s}$  и  $\alpha_k = \beta_{k_1}^{p^s} + \dots + \beta_{k_r}^{p^s}$ , следовательно,  $g_k \in G^{(1)}$ ,  $\alpha_k \in K$  и  $\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k \in S(KG^{(1)})$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , т. е. подгруппа элементов бесконечной высоты группы  $S(LG)$  содержится в  $S(KG^{(1)})$ . Обратное включение очевидно.

Совпадение группы  $S(KP)$  с максимальной полной подгруппой группы  $S(LG)$  устанавливается аналогичным способом. Остальная часть доказательства совершается подобно доказательству леммы 1. 2' работы [1].

**Лемма 2.** Пусть  $G^{(1)} \neq 1$ ,  $|G^{p^k}| = \mu_k$ ,  $|(G/G^{(1)})^{p^k}| = v_k$  и  $|G^{(1)}| = \varrho$ . Тогда  $\mu_k = \max(v_k, \varrho)$ .

*Доказательство.* Легко получается, что  $(G/G^{(1)})^{p^k} = G^{p^k}/G^{(1)}$ , откуда для мощности группы  $G^{p^k}$  имеем  $\mu_k = v_k \varrho$ . Однако  $v_k$  — бесконечное кардинальное

число, так как порядки элементов группы  $(G/G^{(1)})^{p^k}$  неограничены в совокупности. Следовательно  $\mu_k = \max(v_k, q)$ .

**Лемма 3.** Пусть  $H$  — бесконечная периодическая группа,  $b$  — ее фиксированный элемент и  $A$  — ее подгруппа с мощностью  $q \equiv \aleph_0$ . Тогда мы можем вполне упорядочить элементы группы  $A$  таким образом, чтобы в  $A$  найти подмножество  $F: g_1, \dots, g_\alpha, \dots$  с мощностью  $q$  со следующим свойством: для любых двух элементов  $g_\alpha$  и  $g_\beta$  этого подмножества, для которых  $\alpha < \beta$ , равенство  $g_\alpha = g_\beta b$  является невозможным.

**Доказательство.** Положим  $g_1 = 1$ . Пусть  $\alpha$  — произвольное порядковое число, мощность которого не превосходит  $q$ . Допустим, что выбраны все элементы  $g_\gamma$  искомого подмножества для  $\gamma < \alpha$ . Пусть  $x_\gamma$  являются решениями уравнений  $g_\gamma = x_\gamma b$ ,  $\gamma < \alpha$ . Тогда выбираем элемент  $g_\alpha \in A$ ,  $g_\alpha \neq g_\gamma, x_\gamma, \gamma < \alpha$ , в качестве элемента искомого подмножества. Этим образом получим подмножества элементов  $g_1, \dots, g_\alpha, \dots$  и  $x_1, \dots, x_\alpha, \dots$ , имеющие мощность  $q$ . Легко видеть, что первое из них является искомым подмножеством  $F$ .

**Лемма 4.** Пусть  $K$  — алгебраическое расширение характеристики  $p$  простого поля  $\Pi$  (с характеристикой  $p$ ). Если  $G^{(1)} \neq 1$  и фактор-группа  $G/G^{(1)}$  — прямое произведение циклических групп, то

$$S(KG)/S(KG^{(1)}) \cong \prod_{k=0}^{\infty} C_{\mu_k}^{k+1, k+1}, \quad \mu_0 = \mu.$$

**Доказательство.** По предложению 1 фактор-группа  $B = S(KG)/S(KG^{(1)})$  разлагается в прямое произведение циклических групп. Порядки элементов  $(G/G^{(1)})^{p^k} = G^{p^k}/G^{(1)}$  неограничены в совокупности. Покажем, что число прямых множителей порядка  $p^{k+1}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  в прямом разложении группы  $B$  равняется числу  $\mu_k$ . Мы будем использовать, что по лемме 2  $\mu_k = \max(v_k, q)$ . Обозначим  $D = G/G^{(1)}$ ,  $N[B^{p^s}] = \tilde{N}_s$ ,  $s=0, 1, 2, \dots$

и

$$(4) \quad D^{p^k} = \prod_{i \in I} (a_i G^{(1)}), \quad D^{p^{k+1}} = \prod_{i \in I} (a_i^p G^{(1)}).$$

Различаем следующие случаи:

1.  $q \leq v_k$  ( $v_k = \mu_k$ ).

Образуем элементы

$$A_j = [1 + a_j(g' - 1)]S(KG^{(1)}), \quad g' \neq 1, i \in I, g'^p = 1, g' \in G^{(1)}.$$

Очевидно  $A_j \in \tilde{N}_k$ . Обозначим  $\bar{A}_j = 1 + a_j(g' - 1)$ . Элементы  $A_i$  и  $A_j$ , при  $i \neq j$ ,  $j \in I$ , лежат в разных смежных классах группы  $\tilde{N}_k$  по подгруппе  $\tilde{N}_{k+1}$ . В противном случае получим  $\bar{A}_i S(KG^{(1)}) = \bar{A}_j S(KG^{(1)})E$ , где  $E \in B^{p^{k+1}} = S(KG^{p^{k+1}})/S(KG^{(1)})$ . Так как произвольный элемент группы  $S(KG^{p^{k+1}})$  записываем в виде  $A = \sum_{i_1, \dots, i_r} a_{i_1}^{p_{\alpha i_1}} \dots a_{i_r}^{p_{\alpha i_r}} A_{i_1 \dots i_r}$ , где  $A_{i_1 \dots i_r} \in S(KG^{(1)})$ , то из вышеуказанного равенства получим

$$\bar{A}_i = \bar{A}_j AC, \quad \text{где } C \in S(KG^{(1)}),$$

или

$$1 + a_i(g' - 1) = [1 + a_j(g' - 1)] \sum_{i_1, \dots, i_r} a_{i_1}^{p_{\alpha i_1}} \dots a_{i_r}^{p_{\alpha i_r}} A_{i_1 \dots i_r} C.$$

Это равенство однако невозможно, так как в левой его части классу  $a_i G^{(1)}$  принадлежат только элементы  $a_i g'$  и  $a_i$ , в то время как в его правой части не встречаются элементы этого класса. Следовательно  $|\tilde{N}_k / \tilde{N}_{k+1}| \cong v_k$ . С другой стороны  $|\tilde{N}_k / \tilde{N}_{k+1}| \cong |S(KG^{p^k})| = \max |\mathfrak{N}_0, \mu_k| = \mu_k = v_k$ . Следовательно  $|\tilde{N}_k / \tilde{N}_{k+1}| = v_k$ , т. е. число прямых множителей порядка  $p^{k+1}$  в прямом разложении группы  $B$  на циклические группы равняется  $v_k = \mu_k$ .

2.  $v_k = q$ .

Можем предполагать, что порядок фиксированного элемента  $a_i = a$  группы  $G^{p^k}$  из (4) равняется  $p^m$ , где  $m > 1$ .  $G^{p^k} = \mu_k = q$ . Обозначим  $a^{p^{m-1}} = b$ . Согласно лемме 3 элементы подгруппы  $G^{(1)}$  группы  $G^{p^k}$  можно вполне упорядочить и из ней выделить такое подмножество  $F: g_1, \dots, g_\alpha, \dots$  с мощностью  $q$ , что равенство  $g_\alpha = g_\beta b$  невозможно при  $\alpha < \beta$ . Образуем элементы

$$A(g_\alpha) = (1 + g_\alpha a - g_\alpha a^{1+p^{m-1}}) S(KG^{(1)}), \quad g_\alpha \in F.$$

Очевидно  $A(g_\alpha) \in \tilde{N}_k$ . Если  $g_\alpha, g_\beta \in F$  и  $g_\alpha \neq g_\beta$ ,  $\alpha < \beta$ , то  $A(g_\alpha)$  и  $A(g_\beta)$  лежат в разных смежных классах подгруппы  $\tilde{N}_k$  по группе  $\tilde{N}_{k+1}$ . В противном случае, используя обозначения случая 1, получим

$$1 + g_\alpha a - g_\alpha a^{1+p^{m-1}} = (1 + g_\beta a - g_\beta a^{1+p^{m-1}}) AC.$$

В правой части этого равенства при умножении единицы 1 на элементы произведения  $AC$  получаются всегда степени элемента  $a$ , показатели которого кратны числу  $p$ , а при умножении элементов  $g_\beta a$  и  $g_\beta a^{1+p^{m-1}}$  на элементы, которые входят в  $AC$ , так как

$$1 + lp \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 + p^{m-1} + lp \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad m-1 \geq 1,$$

не получаем таких степеней. Отсюда следует, что  $1 = AC$ , что приводит к равенству

$$g_\alpha a - g_\alpha a^{1+p^{m-1}} = g_\beta a - g_\beta a^{1+p^{m-1}}.$$

Если  $p \neq 2$ , то это равенство невозможно. Если  $p = 2$ , то должно было быть  $g_\alpha = g_\beta a^{2^{m-1}}$ , что согласно рассматриванию в начале случая ( $a^{2^{m-1}} = b$ ), также невозможно. Следовательно  $|\tilde{N}_k / \tilde{N}_{k+1}| \geq q$ , однако  $|\tilde{N}_k / \tilde{N}_{k+1}| \leq q$ , так как  $|B^{p^k}| \leq q$ . Мы получили, что число прямых множителей порядка  $p^{k+1}$  в прямом разложении группы  $B$  на циклические группы равняется  $q = \mu_k$ , чем доказательство закончено.

Пусть бесконечная абелева  $p$ -группа  $G$  разлагается в прямое произведение циклических групп, при котором мощность множества прямых множителей порядка  $p^n$  равняется  $\tau_n$ . Говорят, что последовательность

$$(5) \quad \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$$

является последовательностью группы  $G$ . В [7] введены понятия последовательность первого и последовательность второго рода и критические числа группы  $G$ . Эти понятия используем для формулировки следующей теоремы.

**Теорема А.** Пусть  $K$  — алгебраическое расширение характеристики  $p$  простого поля  $\Pi$  (с характеристикой  $p$ ) и  $G$  — такая абелева  $p$ -группа, что  $G^{(1)} \neq P$  и фактор-группа  $G/G^{(1)}$  разлагается в прямое произведение циклических групп, причем мощность множества прямых множителей порядка  $p^i$  равняется  $\tau_i$ . Тогда фактор-группа  $B = S(KG)/S(KG^{(1)})$  разлагается в прямое произведение циклических групп, причем

- 1) если (5) — последовательность первого рода группы  $G/G^{(1)}$ , то  $B \cong C_\mu^1$ ;
- 2) если (5) — последовательность второго рода группы  $G/G^{(1)}$  с критическими числами  $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \dots, \tau_{\alpha_s}$ , то

$$B \cong C_\mu^{1, \alpha_1} \times C_{\mu_{\alpha_1}}^{\alpha_1+1, \alpha_2} \times \dots \times C_{\mu_{\alpha_{s-1}}}^{\alpha_{s-1}+1, \alpha_s} \times C_{\mu_{\alpha_s}}^{\alpha_s+1}.$$

**Доказательство.** По предложению 1 группа  $B$  разлагается в прямое произведение циклических групп. Теорема вытекает из леммы 4 и из леммы 2, 3 статьи [7].

**Теорема Б.** Если  $G$  — полная абелева  $p$ -группа мощности  $\mu$ , а  $K$  — алгебраическое расширение характеристики  $p$  простого поля  $\Pi$ , то группа  $S(KG)$  разлагается в прямое произведение  $\mu$  групп типа  $p^\infty$ .

**Доказательство.** По лемме 1 группа  $S(KG)$  является полной и, следовательно, она разлагается в прямое произведение групп типа  $p^\infty$ . При  $\mu = \aleph_0$  в силу доказательства леммы 1.12 статьи [1]. Пусть  $\mu > \aleph_0$ . Тогда по следствию 2 леммы 4 работы [7] имеем  $|S(KG)| = \mu$ . Пусть  $S(KG) = \prod_{i \in I} P_i$ , где  $P_i$  — группа типа  $p^\infty$ . Если предположим, что  $|I| < \mu$ , то по лемме 4 статьи [7] получим  $|S(KG)| = \max(\aleph_0, |I|) < \mu$ , что является противоречием. Аналогично предположение  $|I| > \mu$  приводит к противоречию. Остается  $|I| = \mu$ .

**Теорема В.** Пусть  $G$  — счетная полная абелева  $p$ -группа, а  $L$  — такое счетное поле характеристики  $p$ , что оно является чисто трансцендентным расширением алгебраического расширения  $K$  простого поля  $\Pi$ . Тогда фактор-группа  $S(LG)/S(KG) \cong C_{\aleph_0}^1$ .

**Доказательство.** Мощность фактор-группы  $S = S(LG)/S(KG)$  не превосходит  $\aleph_0$  (см. следствие 2 леммы 4 статьи [7]). Группа  $S$  не содержит элементов бесконечной высоты, ибо по лемме 1 группа  $S(KG)$  совпадает с подгруппой элементов бесконечной высоты группы  $S(LG)$  и, следовательно,  $S$  разлагается в прямое произведение циклических групп. Обозначим  $\tilde{N}_k = N(S^{p^k})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Пусть  $a$  — фиксированный элемент нижнего слоя группы  $G$ . Согласно лемме 3, элементы группы  $G$  можно вполне упорядочить и из ней выделить такое счетное подмножество  $F: b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ , что равенство  $b_r = b_s a$  невозможно при  $r < s$ . Пусть  $(x_i)_{i \in I}$  — является базисом трансцендентности поля  $L$  (см. [2]). Рассматриваем элементы

$$A_r = [b_r + (1+a)x_1^{p^k}]S(KG), \quad b_r \in F.$$

Очевидно  $A_r \in \tilde{N}_k$ . При  $b_r \neq b_s$  элементы  $A_r$  и  $A_s$  лежат в разных смежных классах группы  $\tilde{N}_k$  по подгруппе  $\tilde{N}_{k+1}$ . В противном случае

$$b_r + (1-a)x_1^{p^k} = [b_s + (1-a)x_1^{p^k}] \sum_i \frac{f_i}{h_i} g_i,$$

или

$$(6) \quad \tilde{h}[b_r + (1-a)x_1^{p^k}] = [b_s + (1-a)x_1^{p^k}] \sum_t \tilde{f}_t g_t, \quad g_t \in G,$$

где  $h_t$ ,  $\tilde{h}$ ,  $f_t$  и  $\tilde{f}_t$  являются полиномами неизвестных  $x_1^{p^{k+1}}, \dots, x_n^{p^{k+1}}$  над полем  $K$ . Обозначим  $I' = I \setminus 1$ . Пусть  $K_1$  является таким чистым расширением поля  $K$ , что  $(x_i)_{i \in I'}$  — чистый базис поля  $K_1$  над  $K$  (см. [2], стр. 108). Легко видеть, что  $LG$  является свободным  $K_1G$ -модулем, в  $L$  — свободным  $K_1$ -модулем и  $1, x_1, x_1^2, \dots$  входят в их базис, следовательно

$$(7) \quad \sum_t \tilde{f}_t g_t = \sum_{i=0}^m u_i (x_1^{p^{k+1}})^i, \quad \tilde{h} = \sum_{i=0}^m v_i (x_1^{p^{k+1}})^i, \quad u_i \in K_1 G, \quad v_i \in K_1.$$

Из (6) и (7) следует

$$(8) \quad \sum_{i=0}^m [b_r v_i x_1^{i p^{k+1}} + (1-a) v_i x_1^{i p^{k+1} + p^k}] = \sum_{i=0}^m [b_s u_i x_1^{i p^{k+1}} + (1-a) u_i x_1^{i p^{k+1} + k}].$$

Сравнивая в (8) коэффициенты перед одинаковыми степенями элемента  $x_1$ , получается  $b_r v_i = b_s u_i$ ,  $(1-a)v_i = (1-a)u_i$ , откуда

$$(1-a)v_i = (1-a)b_s^{-1} b_r v_i \quad (i=0, 1, 2, \dots, m).$$

Так как по крайней мере одно  $v_i \neq 0$  и  $v_i \in K_1$ , то  $1-a = b_s^{-1} b_r - a b_s^{-1} b_r$ . Элемент  $a$  левой части этого равенства не встречается в его правой части согласно выбору элементов  $b_r$  и  $b_s$ , что является противоречием. Следовательно  $|\tilde{N}_k / \tilde{N}_{k+1}| \cong \cong \aleph_0$ , чем теорема доказана.

**Теорема Г.** Пусть для абелевой  $p$ -группы  $G$  имеет место  $G = P \times G_1$ , где  $P \neq 1$  — полная группа, а  $G_1$  — прямое произведение циклических групп, причем  $|G| = \mu$ ,  $|G_1| = \nu$ ,  $|P| = \gamma$ , а  $K$  — алгебраическое расширение характеристики  $p$  простого поля  $\Pi$ . Тогда группа  $B = S(KG)/S(KP)$  разлагается в прямое произведение циклических групп, причем

1) если (5) — последовательность первого рода группы  $G_1$ , то  $B \cong C_\mu^1$  или  $B \cong C_\mu^{1, \alpha}$  в зависимости от того, являются ли порядки элементов группы  $G_1$  соответственно неограниченными в совокупности или показатель этой группы равняется  $p^\alpha$ ;

2) если (5) — последовательность второго рода группы  $G_1$  с критическими числами  $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \dots, \tau_{\alpha_s}$ , то

$$B \cong C_\mu^{1, \alpha_1} \times C_{\mu_{\alpha_1}}^{\alpha_1 + 1, \alpha_2} \times \dots \times C_{\mu_{\alpha_{s-1}}}^{\alpha_{s-1} + 1, \alpha_s} \times B',$$

где группа  $B'$  описывается следующим образом:

а) если порядки элементов группы  $G_1$  неограничены в совокупности, то

$$B' \cong C_{\mu_{\alpha_s}}^{\alpha_s + 1}$$

б) если показатель группы  $G_1$  равняется  $p^\alpha$ , то

$$B' \cong C_j^{\alpha_s + 1, \alpha}.$$

**Теорема Д.** Пусть  $G$  — такая счетная абелева  $p$ -группа (необязательно редуцированная), что  $G \neq G^{(1)} \neq 1$  и  $L$  — такое счетное поле характеристики  $p$ , что оно является чисто трансцендентным расширением алгебраического расширения  $K$  простого поля  $\Pi$ . Тогда фактор-группа  $B = S(LG)/S(KG^{(1)}) \cong C_{\aleph_0}^1$ .

**Доказательство.** Теоремы Д и Г можно доказать одновременно. Их доказательство аналогично доказательству теоремы А. Мощность фактор-группы  $B = S(LG)/S(KG^{(1)})$  не превосходит  $\aleph_0$  и так как не содержит элементов бесконечной высоты, то она разлагается в прямое произведение циклических групп. Если порядки элементов фактор-группы  $G/G^{(1)}$  неограничены в совокупности, то рассуждаем как в случае 2 леммы 4, имея ввиду, что  $v_k = \aleph_0$ . Если фактор-группа  $G/G^{(1)}$  имеет показатель  $p^z$ , то мощность множества прямых множителей порядка  $p^{z+i}$ ,  $i=1, 2, \dots$  в прямом разложении группы  $B$  на циклические группы равняется кардинальному числу  $\aleph_0$ . Действительно, мощность множества прямых множителей порядка  $p^{z+i}$ ,  $i=1, 2, \dots$ , в прямом разложении группы  $B$  на циклические группы равняется мощности множества прямых множителей порядка  $p^i$  в прямом разложении группы  $B^{p^z} = S(L^{p^z}P)/S(KP)$ , а эта мощность по теореме В действительно равняется  $\aleph_0$ .

Для установления формулы разложения группы  $B$  в случае 2 теоремы Г необходимо отметить, что  $\max(\gamma, v) = \mu$ ,  $\max(\gamma, \tau_{x_i}) = \mu_{x_{i-1}}$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $\mu_{x_0} = \mu$ .

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — такая бесконечная абелева  $p$ -группа мощности  $\mu$ , что, если  $P$  — ее максимальная полная подгруппа мощности  $p$ , то фактор-группа  $A = G/P$  имеет конечный тип  $n$  (является единичной группой) и ульмовские факторы группы  $A$  — прямые произведения циклических групп. Пусть  $K$  — алгебраическое расширение характеристики  $p$  простого поля  $\Pi$ . Тогда силовская  $p$ -подгруппа  $S(KG)$  мультипликативной группы групповой алгебры  $KG$  описывается следующим образом.

Имеет место прямое разложение

$$(7) \quad S(KG) = S(KP) \times Q$$

Силовская  $p$ -подгруппа  $S(KP)$  мультипликативной группы групповой алгебры  $KP$  — максимальная полная подгруппа группы  $S(KG)$ . Если  $P=1$ , то  $S(KP)=1$ , а если  $P \neq 1$ , то группа  $S(KP)$  разлагается в прямое произведение  $\gamma$  групп типа  $p^\infty$ .

Если  $G$  — полная абелева  $p$ -группа, то  $Q=1$ .

Пусть  $G$  — неполная абелева  $p$ -группа. Обозначаем через  $G^{(i+1)}$  подгруппу, составленную из всех элементов группы  $G^{(i)}$ , имеющих в  $G^{(i)}$  бесконечную высоту,  $i=0, 1, 2, \dots, n-1$ ;  $G^{(0)}=G$ ,  $G^{(n)}=P$ . Группа  $Q$  имеет тип  $n$  и определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своим ульмовскими факторами  $\bar{Q}_i$ , для которых имеем

$$\bar{Q}_i \cong S(KG^{(i)})/S(KG^{(i+1)}), \quad i=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Факторы  $\bar{Q}_i$ ,  $0 \leq i \leq n-2$ , разлагаются в прямые произведения циклических групп и характеризуются теоремой А (при подходящем изменении обозначений).

При  $P=1$  последний фактор  $\bar{Q}_{n-1} \cong S(KG^{(n-1)})/S(KP)$  разлагается в прямое произведение циклических  $p$ -групп, причем он характеризуется теоремой А\* работы [7].

При  $P \neq 1$  фактор  $\bar{Q}_{n-1}$  разлагается в прямое произведение циклических групп и его можно характеризовать теоремой Г.

**Доказательство.** Теорема следует из леммы 1, теорем А\* работы [7] Б, А, Г и теоремы CRAWLEY [5]. Считаемся с тем, что порядки элементов групп  $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ ,  $i=0, 1, \dots, n-2$ , неограничены в совокупности, так как  $G^{(i)}/G^{(i+1)} \cong \cong A^{(i)}/A^{(i+1)}$  ([6], стр. 161) и с тем, что ряд Ульма группы  $Q$  состоит из членов, соответственно изоморфных членам ряда

$$S(KG)/S(KP) \supset S(KG^{(1)})/S(KP) \supset \dots \supset S(KG^{(n-1)})/S(KP) \supset 1.$$

**Теорема 2.** Пусть  $G$  — такая счетная абелева  $p$ -группа, что если  $P$  — ее максимальная полная подгруппа, то  $A=G/P$  имеет тип  $\tau$  или является единичной группой,  $L$  — счетное поле характеристики  $p$ ,  $\Pi$  — простое подполе поля  $L$  и  $K$  — подполе поля  $L$ , составленное из всех алгебраических элементов над полем  $\Pi$ . Пусть  $L$  — чисто трансцендентное расширение поля  $K$ . Тогда силовская  $p$ -подгруппа  $S(LG)$  мультипликативной группы групповой алгебры  $LG$  описывается следующим образом. Имеет место прямое разложение

$$(8) \quad S(LG) = S(KP) \times Q.$$

Группа  $S(KP)$  — максимальная полная подгруппа группы  $S(LG)$  и если  $P \neq 1$ , то она разлагается в прямое произведение счетного числа групп типа  $p^\infty$ .

Если  $G$  — полная абелева  $p$ -группа, то  $Q \cong C_{\aleph_0}^1$ .

Пусть  $G$  не является полной абелевой  $p$ -группой. Группа  $Q$  имеет  $\tau$  и определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своими ульмовскими факторами которые, за исключением последнего, при положении, что  $\tau$  — непредельное, порядковое число, являются изоморфными группе  $C_{\aleph_0}^1$ .

Пусть  $\tau$  не является предельным порядковым числом. Последний ульмовский фактор  $\bar{Q}_{\tau-1} \cong S(KG^{(\tau-1)})/S(KG^{(\tau)})$  характеризуется при  $P=1$  теоремой А\* работы [7], а при  $P \neq 1$  — теоремой Г.

**Доказательство.** Теорема непосредственно вытекает из леммы 1, теорем А, Б, В, Г, Д, и из теоремы Ульма, причем применяется схема рассуждения теоремы 1.3 работы [1].

**Теорема 3.** Пусть  $K$  — алгебраическое расширение характеристики  $p$  простого поля  $\Pi$  (с характеристикой  $p$ ). Пусть абелева  $p$ -группа  $G$  имеет максимальную подгруппу  $P$  с мощностью  $\gamma$ , и фактор-группа  $G/P$  — такое прямое произведение счетных групп, имеющее бесконечный тип  $\tau$ , что группа  $G^{(n)}$  счетная ( $n$  — натуральное число). Тогда силовская  $p$ -подгруппа  $S(KG)$  мультипликативной группы групповой алгебры  $KG$  описывается следующим образом.

Имеет место прямое разложение (7). Группа  $S(KP)$  характеризуется тем же самым образом, как в теореме 1.

Группа  $Q$  имеет тип  $\tau$  и определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своими ульмовскими факторами  $\bar{Q}_\alpha$ , для которых имеет место  $\bar{Q}_\alpha \cong \cong S(KG^{(\alpha)})/S(KG^{(\alpha+1)})$ , где  $\alpha$  — порядковое число, меньше  $\tau$  или равно нулю.

Факторы  $\bar{Q}_0$  и  $\bar{Q}_\alpha$ ,  $\alpha < \tau$ , разлагаются в прямые произведения циклических групп и описываются теоремой А (при подходящем изменении обозначений).

Пусть  $\tau$  не является предельным порядковым числом. При  $P=1$  последний ульмовский фактор  $\bar{Q}_{\tau-1} = S(KG^{(\tau-1)})/S(KG^{(\tau)})$  характеризуется теоремой  $A^*$  работы [7], а при  $P \neq 1$  — теоремой Г.

**Доказательство.** По лемме 1 группа  $Q$  имеет тип  $\tau$ . Так как  $G^{(n)} \neq P$  и  $G^{(n)}$  счетная, то из теоремы А следует, что группа  $Q^{(n)} \cong S(KG^{(n)})/S(KP)$  является также счетной. Фактор-группа  $A = G/P$  — прямое произведение счетных групп, следовательно, фактор-группы  $G^{(i-1)}/G^{(i)} \cong A^{(i-1)}/A^{(i)}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  — прямые произведения циклических групп, откуда по предложению 1 вытекает, что фактор-группы  $S(KG^{(i-1)})/S(KG^{(i)})$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , являются прямыми произведениями циклических групп. Однако  $Q^{(i-1)}/Q^{(i)} \cong S(KG^{(i-1)})/S(KG^{(i)})$ , т. е.  $Q^{(i-1)}/Q^{(i)}$  — прямые произведения циклических групп,  $i=1, 2, \dots, n$ . Тогда из работы [3] Ирвина и Рихмана вытекает, что группа  $Q$  является прямым произведением счетных групп, следовательно, по теореме Колеттиса [4], группа  $Q$  определяется с точностью до изоморфизма своим типом и своим ульмовскими факторами, описание которых дано в формулировке теоремы.

**Условия изоморфизма.** Пусть абелева  $p$ -группа  $G$  и коммутативное кольцо  $L$  с единицей и характеристики  $p$ , а также абелева  $p$ -группа  $\bar{G}$  и коммутативное кольцо  $\bar{L}$  с единицей и характеристики  $p$  такие, что они удовлетворяют условиям некоторых формулированных теорем настоящей работы и работы [7]. В таком случае можно указать на необходимые и достаточные условия изоморфизма групп  $S(LG)$  и  $S(\bar{L}\bar{G})$ . Мы не будем останавливаться на этом вопросе из-за большого числа возможных случаев, и, главным образом, из-за того, что руководствуясь формулировками уже доказанных теорем, указание на изоморфизм происходит без затруднений (это указание состоит из обычного комбинирования случаев разложения группы  $S(LG)$  с случаями разложения группы  $S(\bar{L}\bar{G})$  и описания непротиворечивых комбинированных случаев на основании вышедоказанных теорем).

### Литература

- [1] Берман С. Д., Групповые алгебры счетных абелевых  $p$ -групп, *Publ. Math. (Debrecen)* **14** (1967), 365—405.
- [2] Бурбаки Н., Алгебра, многочлены и поля, упорядоченные группы, Москва, 1965.
- [3] IRWIN J. and RICHMAN F., Direct sums of countable groups and related concepts, *J. Algebra* **2** (1965), 443—450.
- [4] KOŁETTIS, G., Direct sums of countable groups, *Duke Math. J.*, **27** (1960), 111—125.
- [5] CRAWLEY P., ABELIAN  $p$ -groups determined by their Ulm sequens, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 235—239.
- [6] Курош А. Г., *Теория групп*, Москва 1967.
- [7] Моллов Т. Ж., О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. I., *Publ. Math. (Debrecen)* **18** (1971), 9—21.

(Поступило 25. III. 1969.)