

## Über eine Klasse von Mittelwerten

Von ZOLTÁN DARÓCZY (Debrecen)

1. *Definition. Existenzsatz.* Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $R$  die Menge der reellen Zahlen. Die Funktion  $K: I \times I \rightarrow R$  wird eine *Abweichung* genannt, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

(a)  $K(x, y)$  ist in  $y$  stetig und streng monoton abnehmend;

(b)  $K(y, y) = 0$  für alle  $y \in I$ .

Sind  $x$  und  $y$  aus  $I$ , so nennen wir die Größe  $K(x, y)$  die *K-Abweichung* der Zahl  $y$  von  $x$ . Die Menge aller Abweichungen wird mit  $\mathcal{K}$  bezeichnet.

*Definition.* Es sei  $K \in \mathcal{K}$  und  $\underline{x} \in I^n$ , wobei

$$I^n = \{\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in I, i = 1, 2, \dots, n\}$$

die Menge aller  $n$ -Tupel der Zahlen aus  $I$  ist. Die Größe  $\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M}_K(\underline{x})$  wird der *K-Mittelwert* von  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  genannt, falls die der Gleichung

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^n K(x_i, \mathfrak{M}_K) = 0$$

genügt.

Mit anderen Worten, der *K-Mittelwert*  $\mathfrak{M}_K$  von  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ist eine solche Größe, welche die folgende Eigenschaft hat: Die Summe von *K-Abweichungen* der Größe  $\mathfrak{M}_K$  von  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) gibt Null. Es gilt der

**Satz 1.** Es sei  $K \in \mathcal{K}$ . Dann existiert ein und nur ein *K-Mittelwert*  $\mathfrak{M}_K: I^n \rightarrow I$ , und es gilt

$$(1.2) \quad \text{Min}(\underline{x}) \leq \mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leq \text{Max}(\underline{x})$$

für alle  $\underline{x} \in I^n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ).

*Beweis.* Es sei  $\underline{x} \in I^n$  und

$$k(t) = \sum_{i=1}^n K(x_i, t) \quad (t \in I).$$

Nach (a) ist  $k(t)$  eine stetige und streng monoton abnehmende Funktion in  $I$ . Wegen (a) und (b) gilt  $\text{sgn } K(x, y) = \text{sgn } (x - y)$ , daher ist

$$k(m) \geq 0 \quad \text{und} \quad k(M) \leq 0,$$

wobei  $m = \text{Min}(x)$  und  $M = \text{Max}(x)$  ist. Aus dieser Behauptung folgt, daß es ein und nur ein  $t_0 \in [m, M]$  existiert, für das  $k(t_0) = 0$  gilt. Aber  $t_0 = \mathfrak{M}_K(x)$  ist nach der Definition. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus der Definition folgt, daß  $\mathfrak{M}_K(x)$  stets eine *symmetrische* Funktion auf  $I^n$  ist.

2. *Quasiarithmetische Mittelwerte.* Die folgenden Beispielen zeigen, daß die Klasse von  $K$ -Mittelwerten ( $K \in \mathcal{K}$ ) eine Verallgemeinerung bekannter Klassen von symmetrischen Mittelwerten ist. Dazu führen wir die folgenden Funktionenklassen ein:

$$D = \{\varphi | \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \text{ stetig und streng monoton}\},$$

$$Q = \{f | f: I \rightarrow \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \text{ ist die Menge der positiven Zahlen}\}.$$

Es sei jetzt  $\varphi \in D, f \in Q$  und

$$(2.1) \quad K(x, y) = K_{\varphi f}(x, y) = f(x) \varepsilon_{\varphi}[\varphi(x) - \varphi(y)] \quad (x, y \in I),$$

wobei

$$\varepsilon_{\varphi} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi \text{ wachsend} \\ -1 & \text{falls } \varphi \text{ abnehmend} \end{cases}$$

ist. Es ist leicht einzusehen, daß  $K_{\varphi f}$  ein Element von  $\mathcal{K}$  ist, und es ist der zur Abweichung  $K_{\varphi f}$  gehörige Mittelwert von  $x \in I^n$  die Größe

$$(2.2) \quad \mathfrak{M}_{K_{\varphi f}}(x) = M_{\varphi f}(x) = \varphi^{-1} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i) \varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^n f(x_i)} \right],$$

wobei  $\varphi^{-1}$  die zu  $\varphi$  inverse Funktion bedeutet. Der Mittelwert  $M_{\varphi f}(x)$  ( $\varphi \in D, f \in Q$ ) wird einen *quasiarithmetischen Mittelwert mit Gewichtsfunktion* genannt. Diese Klasse von Mittelwerten wurde von M. BAJRAKTAREVIČ [2] eingeführt und von J. ACZÉL—Z. DARÓCZY [1], Z. DARÓCZY [3], Z. DARÓCZY—L. LOSONCZI [4], L. LOSONCZI [6] [7], [8], [9] eingehend untersucht. Der klassische quasiarithmetische Mittelwert mit der Abbildungsfunktion  $\varphi \in D$

$$(2.3) \quad M_{\varphi}(x) = \varphi^{-1} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \right]$$

läßt sich in (2.2) mit  $f(t) = c$  ( $c > 0$  Konstant) einreihen. Die Theorie dieser Klasse von Mittelwerten kann man im Buch von G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA [5] finden.

3. *Ein weiteres Beispiel.* Wir geben jetzt ein Beispiel für ein  $K$ -Mittelwert an, der kein quasiarithmetischer Mittelwert ist. Es sei  $I = \mathbb{R}_+$  und

$$(3.1) \quad K(x, y) = x(x-y) + x^2 - y^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

Offenbar ist  $K(x, y)$  eine Abweichung mit dem  $K$ -Mittelwert

$$(3.2) \quad \mathfrak{M}_K(x) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \frac{8}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right\}.$$

Man kann sehen, daß der Mittelwert (3. 2) aus den quasiarithmetischen Mittelwerten aufgebaut werden kann. Wir bemerken, daß auch solche  $K$ -Mittelwerte existieren, die in expliziter Form nicht dargestellt werden können. Ein Beispiel dafür ist der mit der Abweichung

$$(3.3) \quad K(x, y) = x(x-y) + \ln x - \ln y \quad (x, y \in R_+)$$

erklärte  $K$ -Mittelwert.

4. *Vergleich zweier  $K$ -Mittelwerte.* Bei vielen Untersuchungen spielt das Vergleichsproblem zweier Mittelwerte eine Rolle (S. [5], [3], [4], [6]). Das Problem ist das folgende: Wir suchen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Abweichungen  $K$  und  $H$ , damit die Ungleichung

$$(4.1) \quad \mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leq \mathfrak{M}_H(\underline{x})$$

für alle  $\underline{x} \in I^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) erfüllt wird. Die Lösung dieses Problems ist für die Klasse der quasiarithmetischen Mittelwerte mit Gewichtsfunktionen bekannt. (S. [4]).

**Lemma 1.** *Es sei  $K \in \mathcal{K}$  und  $F: I^n \rightarrow I$  eine beliebige Funktion. Für beliebiges  $\underline{x} \in I^n$  gilt die Ungleichung*

$$(4.2) \quad \mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leq F(\underline{x})$$

*dann und nur dann, falls die Ungleichung*

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^n K[x_i, F(\underline{x})] \leq 0$$

*gilt für alle  $\underline{x} \in I^n$ .*

BEWEIS. (i) Gilt (4. 1), so erhalten wir wegen (a)

$$K[x_i, F(\underline{x})] \leq K[x_i, \mathfrak{M}_K(\underline{x})] \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

woraus sich mit der Addition (4. 3) ergibt.

(ii) Wir setzen jetzt voraus, daß die Ungleichung (4. 3) für alle  $\underline{x} \in I^n$  erfüllt ist und ein Element  $\underline{x}^0 \in I^n$  mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{M}_K(\underline{x}^0) > F(\underline{x}^0) \quad \underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

existiert.

Dann gilt

$$K[x_i^0, \mathfrak{M}_K(\underline{x}^0)] < K[x_i^0, F(\underline{x}^0)] \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

woraus sich

$$0 < \sum_{i=1}^n K[x_i^0, F(\underline{x}^0)]$$

ergibt. Dieser ist aber ein Widerspruch, damit haben wir das Lemma bewiesen.

**Lemma 2.** *Es sei  $K \in \mathcal{K}$  und*

$$(4.4) \quad \underline{x}^n = (x, y, y, \dots, y) \in I^n \quad (n=2, 3, \dots),$$

*wobei  $x, y \in I$  beliebig ist. Dann gilt*

$$(4.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_K(\underline{x}^n) = y.$$

BEWEIS. Mit der Bezeichnung

$$y_n = \mathfrak{M}_K(\underline{x}^n)$$

erhalten wir nach der Definition

$$(4.6) \quad K(x, y_n) + (n-1)K(y, y_n) = 0 \quad (n=2, 3, \dots).$$

In (4.6) ist  $K(x, y_n)$  beschränkt, daher gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(y, y_n) = 0.$$

Wegen der Eigenschaft  $K(y, y) = 0$  und der Stetigkeit kommt die Behauptung  $y_n \rightarrow y$ . Wir bemerken, daß es im Falle  $x \neq y$  stets  $y_n \neq y$  gilt.

Auf Grund dieser Lemmata können wir das Vergleichsproblem von  $K$ -Mittelwerten für die Klasse von Abweichungen aus  $\mathcal{K}^*$  lösen, wobei

$$\mathcal{K}^* = \left\{ K \mid K \in \mathcal{K}, K_2(x, y) = \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \text{ existiert und } \neq 0 \right\}$$

eine Untermenge von  $\mathcal{K}$  ist. Ist  $K \in \mathcal{K}^*$ , so gilt nach dem Darboux'schen Satz  $K_2(x, y) < 0$  für alle  $x, y \in I$ . Für beliebiges  $K \in \mathcal{K}^*$  führen wir die Bezeichnung

$$K^*(x, y) = \frac{K(x, y)}{-K_2(y, y)} \quad (x, y \in I)$$

ein.

**Satz 2.** Es sei  $K, H \in \mathcal{K}^*$ . Für beliebiges  $\underline{x} \in I^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) gilt die Ungleichung (4.1) dann und nur dann, falls die Ungleichung

$$(4.7) \quad K^*(x, y) \leq H^*(x, y)$$

für alle  $x, y \in I$  besteht.

BEWEIS. (i) Die Voraussetzung ist notwendig. Gilt die Ungleichung (4.1) für alle  $\underline{x} \in I^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ), so erhalten wir nach dem Lemma 1 die Ungleichung

$$(4.8) \quad \sum_{i=1}^n K[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leq 0$$

für alle  $\underline{x} \in I^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ). Wir setzen in (4.8)

$$\underline{x} = \underline{x}^n = (x, y, y, \dots, y) \in I^n,$$

wobei  $x, y \in I$  ( $x \neq y$ ) beliebig wählbar ist. Mit der Bezeichnung  $y_n = \mathfrak{M}_K(\underline{x}^n)$  gilt dann

$$(4.9) \quad K(x, y_n) + (n-1)K(y, y_n) \leq 0. \quad (n=2, 3, \dots)$$

Dabei ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  ( $y_n \neq y$ ) nach dem Lemma 2. Mit der Berücksichtigung der Gleichung

$$H(x, y_n) + (n-1)H(y, y_n) = 0 \quad (n=2, 3, \dots)$$

bekommen wir aus (4. 9)

(4. 10)

$$K(x, y_n) \leq -(n-1)K(y, y_n) = -(n-1)H(y, y_n) \frac{K(y, y_n)}{H(y, y_n)} = H(x, y_n) \frac{K(y, y_n)}{H(y, y_n)}.$$

Wegen  $K, H \in \mathcal{K}^*$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(y, y_n)}{H(y, y_n)} = \frac{K_2(y, y)}{H_2(y, y)}.$$

Mit  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir aus (4. 10) die Ungleichung (4. 7) für alle  $x, y \in I$  ( $x \neq y$ ). Im Falle  $x=y$  ist (4. 7) trivial.

(ii) *Die Voraussetzung ist hinreichend.* Gilt die Ungleichung (4. 7) für alle  $x, y \in I$ , so setzen wir in (4. 7)  $x=x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) und  $y=\mathfrak{M}_H(\underline{x})$ , wobei  $\underline{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$  beliebig ist. Dann gilt

$$K^*[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leq H^*[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Addieren wir jetzt diese Ungleichungen für  $i=1, 2, \dots, n$ , so gilt

$$-\frac{1}{K_2[\mathfrak{M}_H(\underline{x}), \mathfrak{M}_H(\underline{x})]} \sum_{i=1}^n K[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leq 0,$$

woraus sich

$$\sum_{i=1}^n K[x_i, \mathfrak{M}_H(\underline{x})] \leq 0$$

ergibt. Nach dem Lemma 1 erhalten wir (4. 1) aus der obigen Ungleichung, damit haben wir den Satz restlos bewiesen.

Aus Satz 2 ergibt sich das folgende

**Korollar** (Z. DARÓCZY—L. LOSONCZI [4]). *Es seien  $\varphi, \psi \in D^*$ ,  $f, g \in \mathcal{Q}$ . Die Ungleichung*

$$(4. 11) \quad M_{\varphi f}(\underline{x}) \leq M_{\psi g}(\underline{x})$$

*gilt für alle  $\underline{x} \in I^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) dann und nur dann, falls die Ungleichung*

$$(4. 12) \quad \frac{f(x)[\varphi(x) - \varphi(y)]}{f(y)\varphi'(y)} \leq \frac{g(x)[\psi(x) - \psi(y)]}{g(y)\psi'(y)}$$

*für alle  $x, y \in I$  besteht. Dabei ist*

$$D^* = \{\varphi | \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \text{ differenzierbar, } \varphi'(x) \neq 0 \ (x \in I)\}.$$

BEWEIS. Die Ungleichung (4. 11) lautet:

$$\mathfrak{M}_K(\underline{x}) \leq \mathfrak{M}_H(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in I^n, n=2, 3, \dots)$$

mit den Bezeichnungen

$$K(x, y) = f(x)\varepsilon_\varphi[\varphi(x) - \varphi(y)], \quad H(x, y) = g(x)\varepsilon_\psi[\psi(x) - \psi(y)].$$

Die Ungleichung (4. 12) folgt aus (4. 7) wegen der Beziehungen

$$K^*(x, y) = \frac{f(x)[\varphi(x) - \varphi(y)]}{f(y)\varphi'(y)} \quad \text{und} \quad H^*(x, y) = \frac{g(x)[\psi(x) - \psi(y)]}{g(y)\psi'(y)}.$$

5. *Gleichheit zweier K-Mittelwerte. Homogene K-Mittelwerte.* Das Gleichheitsproblem von  $K$ -Mittelwerten ist das folgende: Es seien  $K$  und  $H$  Abweichungen und wir betrachten die Gleichung

$$(5. 1) \quad \mathfrak{M}_K(\underline{x}) = \mathfrak{M}_H(\underline{x})$$

für alle  $\underline{x} \in I^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ). Wir suchen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Abweichungen  $K$  und  $H$ , damit (5. 1) für alle  $\underline{x} \in I^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) erfüllt wird. Die Lösung dieses Problems ist für die Klasse der quasiarithmetischen Mittelwerte mit Gewichtsfunktionen bekannt (S. [1] und vgl. [9]). Aus Satz 2 ergibt sich der

**Satz 3.** *Es sei  $K, H \in \mathcal{K}^*$ . Dann besteht die Gleichheit (5. 1) für alle  $\underline{x} \in I^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) dann und nur dann, falls*

$$(5. 2) \quad K^*(x, y) = H^*(x, y)$$

für alle  $x, y \in I$  erfüllt ist.

Mit der Anwendung des Satzes 3 kann man das Gleichheitsproblem für die Mittelwerte  $M_{\varphi f}$  ( $\varphi \in D^*, f \in Q$ ) — wie in der Arbeit [9] — lösen (vgl. [1]).

Im folgenden sei  $I = R_+$ . Ein  $K$ -Mittelwert wird *homogen* genannt, wenn die Homogenitätsgleichung

$$(5. 3) \quad \mathfrak{M}_K(t\underline{x}) = t\mathfrak{M}_K(\underline{x})$$

für alle  $\underline{x} \in R_+^n$  ( $n=2, 3, \dots$ )  $t \in R_+$  gilt, wobei  $t\underline{x} = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$  ist. Die Bestimmung der homogenen Mittelwerte spielt in der Theorie der Mittelwerte eine grundlegende Rolle (S. [5], [1]).

**Satz 4.** *Es sei  $K \in \mathcal{K}^*$ . Ist  $\mathfrak{M}_K$  ein homogener Mittelwert, so muß*

$$(5. 4) \quad K^*(x, y) = yK^*\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

für alle  $x, y \in R_+$  gelten. Andererseits, gilt (5. 4) für alle  $x, y \in R_+$  mit  $K \in \mathcal{K}^*$ , so ist  $\mathfrak{M}_K$  homogen.

BEWEIS. Es sei  $\mathfrak{M}_K$  homogen ( $K \in \mathcal{K}^*$ ). Dann ist

$$K_t(x, y) = \frac{1}{t} K(tx, ty) \in \mathcal{K}^*$$

für alle  $t \in R_+$ , und wegen (5. 3) gilt

$$\mathfrak{M}_{K_t}(\underline{x}) = \mathfrak{M}_K(\underline{x})$$

für alle  $\underline{x} \in R_+^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ). Daraus folgt nach dem Satz 3

$$K_t^*(x, y) = K^*(x, y)$$

d.h.

$$K^*(tx, ty) = tK^*(x, y).$$

Aus dieser Gleichung bekommen wir (5.4) mit  $t=1/y$ . Gilt (5.4) für eine  $K \in \mathcal{K}^*$ , so kann man leicht prüfen, daß  $\mathfrak{M}_K$  homogen sein muß. Damit ist der Beweis beendet.

Auf Grund dieses Satzes kann man die homogenen quasiarithmetischen Mittelwerte mit Gewichtsfunktionen bestimmen. (S. [1], [9]). Wir bezeichnen mit  $\mathcal{K}_h^*$  die Menge der Abweichungen aus  $\mathcal{K}^*$ , für die die  $K$ -Mittelwerte ( $K \in \mathcal{K}_h^*$ ) homogen sind. Dann erhalten wir aus den Sätzen 2 und 4 das

**Korollar.** Es sei  $K, H \in \mathcal{K}_h^*$ . Dann besteht die Ungleichung

$$\mathfrak{M}_K(x) \leq \mathfrak{M}_H(x)$$

für alle  $x \in I^n$  ( $n=2, 3, \dots$ ) dann und nur dann, falls

$$K^*(t, 1) \leq H^*(t, 1)$$

für alle  $t \in R_+$  gilt.

Eine eingehende Untersuchung findet man in [4] über die homogenen quasiarithmetischen Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind.

### Literatur

- [1] J. ACZÉL—Z. DARÓCZY, Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind. *Publ. Math. Debrecen*, **10**, (1963), 171—190.
- [2] M. BAJRAKTAREVIC, Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes. *Glasnik Mat. Fiz. i Astr.*, **13**, (1958), 243—248.
- [3] Z. DARÓCZY, Einige Ungleichungen über die mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte. *Monatshefte für Math.* **68**, (1964), 102—112.
- [4] Z. DARÓCZY—L. LOSONCZI, Über den Vergleich von Mittelwerten. *Publ. Math. Debrecen*, **17**, (1970), 289—297.
- [5] G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge 1952.
- [6] L. LOSONCZI, Über den Vergleich von Mittelwerten, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind. *Publ. Math. Debrecen*, **17**, (1970), 203—208.
- [7] L. LOSONCZI, Subhomogene Mittelwerte. *Acta Math. Hung.* **22**, (1971), 187—195.
- [8] L. LOSONCZI, Subadditive Mittelwerte. *Archiv der Math.*, **22**, (1971), 168—174.
- [9] L. LOSONCZI, Über eine neue Klasse von Mittelwerten. *Acta Sci. Math.*, **32**, (1971), 71—81.

(Eingegangen 13. März 1970.)