

Размерность равномерных пространств в теории непрерывных групп преобразований

С. БУЗАШИ—БОГДЮКЕВИЧ (Дебрецен)

Изучению метризуемых топологических пространств дали новое направление исследования Де-Грота и Нагаты. В их работах n -мерные пространства (при естественных условиях) характеризуются метризуемостью особыми метриками. При этом нульмерный случай описан с помощью неархимедовых метрик (см. например [6], [7], [10], [11], [12]).

Развивая это новое направление, Й. Эрдёш (ERDŐS JENŐ) поставил задачу описания n -мерных метризуемых топологических групп и вообще непрерывных групп преобразований с использованием *инвариантных* особых метрик. Как автор надеется, настоящая статья делает первые шаги к решению этой задачи, указывая (при рассмотрении нульмерного случая) между прочим и на определяющую роль размерности равномерностей групп (теоремы 7 и 10, предложения 3 и 5). Наши исследования связаны с проблемой инвариантной метризуемости факторпространств топологических групп (теорема 4). Рассматриваются аналогичные вопросы, полученные заменой инвариантных особых метрик инвариантными равномерностями (теоремы 2 и 5).

В статье через G обозначается хаусдорфова топологическая группа, через H её замкнутая подгруппа. Под факторпространством G/H подразумевается множество правых смежных классов, наделённое фактортопологией, а под факторравномерностью G/H —то же множество, наделённое факторравномерностью правой равномерности группы G (случай левой равномерности подчёркивается отдельно). Заметим, что термин „равномерность” употребляется и в смысле равномерного пространства, и в смысле системы всех окружений равномерного пространства.

Приношу искреннюю благодарность Й. Эрдёш за постановку задачи и ценные советы при работе над этой темой.

§ 1. Инвариантные равномерности и метрики на факторпространствах топологических групп

Теорема 1.¹⁾ *Топология факторпространства G/H совпадает с равномерной топологией факторравномерности левой равномерности группы G относительно G/H .*

¹⁾ Теорема, по существу, известна (см. например [8] стр. 76.), для полноты изложения даём это простое доказательство.

Доказательство. Заметим сначала, что совокупность окружений $g(L_A)$ образует базу факторравномерности $\mathfrak{U}$ левой равномерности группы G относительно G/H (здесь A пробегает все окрестности единицы группы G , окружение L_A определяется формулой $L_A = \{(x, y) | x^{-1}y \in A; x, y \in G\}$, а g относит (x, y) к (Hx, Hy)). Действительно, если A произвольная окрестность единицы G , а B такая, что $B^2 \subset A$, тогда, как нетрудно проверить, имеет место формула $g(L_B) \circ g(L_B) \subset g(L_A)$. Остальные свойства базы равномерности очевидно выполняются для совокупности всех $g(L_A)$.

Совпадение фактортопологии группы G относительно G/H с топологией, порождённой $\mathfrak{U}$, следует из легко проверяющегося соотношения²⁾ $g(L_A)[Hc] = H(cA)/H$, которое выполняется для любой окрестности A единицы G и для всякого $c \in G$.

Предложение 1. Топология факторпространства G/H не всегда совпадает с равномерной топологией факторравномерности G/H .

Доказательство. Пусть G будет группой преобразований $f(x) = ax + b$ действительной прямой R , где $a, b \in R; a \neq 0$. Топологию в G определим с помощью фундаментальной системы окрестностей A_ε единицы G , где $A_\varepsilon = \{f | f(x) = ax + b; |a - 1| < \varepsilon; |b| < \varepsilon; 0 < \varepsilon \in R\}$. Если подгруппа H состоит из преобразований $f(x) = ax$ ($a \neq 0$), то топология факторпространства G/H не совпадает с равномерной топологией факторравномерности G/H , так как последняя является антидискретной, а первая отличается от таковой.

Теорема 2. Топология факторпространства G/H тогда и только тогда является равномерной топологией некоторой определённой на множестве G/H правоинвариантной³⁾ равномерности, вес которой не превосходит m , если H имеет в факторпространстве G/H фундаментальную систему окрестностей симметрического происхождения⁴⁾, мощность которой не превосходит m .

Доказательство. Если система $G_\alpha = HG_\alpha$ ($\alpha \in \Gamma$, мощность Γ не превосходит m) симметрических окрестностей единицы G такая, что G_α/H ($\alpha \in \Gamma$) является фундаментальной системой окрестностей H в факторпространстве G/H , то правоинвариантные окружения $g(R_{G_\alpha})$ образуют базу факторравномерности правой равномерности $\mathfrak{U}$ группы G относительно G/H (здесь α пробегает Γ , $R_{G_\alpha} = \{(x, y) | xy^{-1} \in G_\alpha; x, y \in G\}$, а g относит к (x, y) пару (Hx, Hy)). Действительно, для произвольного G_α найдётся такая окрестность W единицы G и такой индекс $\beta \in \Gamma$, для которых выполняются $W^2 \subset G_\alpha$ и $G_\beta \subset HW$, и поэтому $G_\beta^2 \subset G_\beta(HW) = (G_\beta^{-1}H)W = (HG_\beta)^{-1}W = G_\beta W \subset (HW)W = HW^2 \subset HG_\alpha = G_\alpha$. Значит $g(R_{G_\beta}) \circ g(R_{G_\beta}) \subset g(R_{G_\alpha})$, так как для произвольных $x, y, z \in G$ в слу-

²⁾ В случае точки x и окружения U равномерного пространства X множество $U[x]$ определяется формулой $U[x] = \{y | (x, y) \in U; y \in X\}$.

³⁾ Определённая на множестве G/H равномерность называется правоинвариантной, если она имеет базу, состоящую из таких окружений U , что из $(Hx, Hy) \in U$ следует $(Hxa, Hya) \in U$ для всех $a, x, y \in G$ (такие окружения назовём правоинвариантными).

⁴⁾ Подмножество A множества G/H назовём множеством симметрического происхождения, если прообраз A при проецировании G на G/H является симметрическим множеством в G .

чае $(Hx, Hy) \in g(R_{G_\beta})$, $(Hy, Hz) \in g(R_{G_\beta})$ выполняется $xy^{-1} \in HG_\beta H = G_\beta$ и $yz^{-1} \in G_\beta$, отсюда $xz^{-1} \in G_\alpha$, откуда следует $(Hx, Hz) \in g(R_{G_\alpha})$. Остальные свойства базы равномерности очевидно выполняются для системы $g(R_{G_\alpha})$ ($\alpha \in \Gamma$), которая таким образом определяет на множестве G/H правоинвариантную равномерность $\mathcal{U}$, вес которой не превосходит мощности Γ .

Покажем, что топология факторпространства G/H является равномерной топологией равномерности $\mathcal{U}$. Если A произвольная симметрическая окрестность единицы G , то $g(R_A)[H] = HAH/H$, что не трудно проверить. Значит, для каждого G_α ($\alpha \in \Gamma$) выполняется формула $g(R_{G_\alpha})[H] = G_\alpha/H$, что и доказывает совпадение рассматриваемых топологий.

Пусть наоборот, топология факторпространства G/H является равномерной топологией некоторой определённой на множестве G/H правоинвариантной равномерности $\mathcal{U}$, вес которой не превосходит m . Обозначим через U_α ($\alpha \in \Gamma$, мощность Γ не превышает m) базу равномерности $\mathcal{U}$, состоящую из симметрических правоинвариантных окружений. Ясно, что множества $U_\alpha[H]$ ($\alpha \in \Gamma$) образуют фундаментальную систему окрестностей H в факторпространстве G/H . Покажем, что для всякого $\alpha \in \Gamma$ множество $G_\alpha = \bigcup \{Hx | Hx \in U_\alpha[H]\}$ является симметрическим подмножеством G , т. е. окрестности $U_\alpha[H]$ имеют симметрическое происхождение. Действительно, в случае $y \in G_\alpha$ выполняется $(H, Hy) \in U_\alpha$ и поэтому $(Hy^{-1}, H) \in U_\alpha$, откуда следует $(H, Hy^{-1}) \in U_\alpha$, т. е. $y^{-1} \in G_\alpha$.

Теорема 3. Если топология факторпространства G/H является равномерной топологией некоторой определённой на множестве G/H правоинвариантной равномерности, то последняя совпадает с факторравномерностью G/H .

Доказательство. Пусть топология факторпространства G/H совпадает с равномерной топологией определённой на G/H правоинвариантной равномерности $\mathfrak{B}$. Тогда H имеет в факторпространстве G/H фундаментальную систему окрестностей симметрического происхождения (по теореме 2). Отсюда следует (принимая во внимание первую часть доказательства теоремы 2), что факторравномерность $\mathcal{U}$ правой равномерности G относительно G/H также правоинвариантна и порождает топологию факторпространства G/H . Поэтому для произвольного правоинвариантного окружения $U \in \mathcal{U}$ найдётся такое правоинвариантное $V \in \mathfrak{B}$, что $V[H] \subset U[H]$; в этом случае выполняется и $V \subset U$, в чём легко убедиться. Следовательно, $\mathfrak{B} < \mathcal{U}$. Подобным образом доказывается выполнение $\mathfrak{B} > \mathcal{U}$, и поэтому $\mathfrak{B} = \mathcal{U}$.

Предложение 2. Топология факторпространства G/H не всегда является равномерной топологией некоторой определённой на G/H правоинвариантной равномерности.

Доказательство. Непосредственное следствие предложения 1 и теоремы 3.

Теорема 4.⁵⁾ Факторпространство G/H тогда и только тогда метризуемо правоинвариантной метрикой, если H имеет в G/H счётную фундаментальную систему окрестностей симметрического происхождения.

⁵⁾ Этот вопрос был затронут, но в общем случае оставлен открытым в [8] (см. там отдел 8.14).

Доказательство. Согласно теореме 2 и метризацииной теореме равномерных пространств, топология факторпространства G/H тогда и только тогда является равномерной топологией некоторой метризуемой правоинвариантной равномерности $\mathcal{U}$, если H имеет в G/H счётную фундаментальную систему окрестностей симметрического происхождения. Применив для состоящей из счётного числа симметрических правоинвариантных окружений базы равномерности $\mathcal{U}$ метод метризацииной леммы (см. [2] стр. 247) можно заключить, что наличие $\mathcal{U}$ равносильно метризуемости факторпространства G/H правоинвариантной метрикой.

§ 2. Инвариантные нульмерные равномерности и неархимедовы метрики на факторпространствах топологических групп

Теорема 5.⁶⁾ Топология факторпространства G/H тогда и только тогда является равномерной топологией некоторой определённой на множестве G/H правоинвариантной нульмерной⁷⁾ равномерности, вес которой не превосходит m , если в G имеется такая система содержащих H открытых подгрупп G_α ($\alpha \in \Gamma$, мощность Γ не превосходит m), что G_α/H ($\alpha \in \Gamma$) образует фундаментальную систему окрестностей H в факторпространстве G/H .

Доказательство. Если в G имеется удовлетворяющая условиям теоремы система G_α ($\alpha \in \Gamma$), то правоинвариантные окружения $U_\alpha = \{(Hg, Hs) | gs^{-1} \in G_\alpha; g, s \in G\}$ являются отношениями эквивалентности. Для произвольных $\alpha, \beta \in \Gamma$ найдётся такой индекс $\gamma \in \Gamma$, что $G_\gamma/H \subset (G_\alpha/H) \cap (G_\beta/H)$, поэтому выполняется $G_\gamma \subset G_\alpha \cap G_\beta$, откуда следует $U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta$. Этим доказано, что система U_α ($\alpha \in \Gamma$) служит базой для некоторой правоинвариантной равномерности $\mathcal{U}$, причём, как нетрудно доказывается, $\mathcal{U}$ является нульмерной, потому что все U_α являются отношениями эквивалентности. Топология факторпространства G/H совпадает с равномерной топологией равномерности $\mathcal{U}$, т. к. $U_\alpha[H] = G_\alpha/H$ для всех $\alpha \in \Gamma$.

Пусть наоборот, топология факторпространства G/H совпадает с определённой на G/H равномерной топологией правоинвариантной нульмерной равномерности, вес которой не превосходит m . Тогда не трудно показать, что эта равномерность имеет базу U_α ($\alpha \in \Gamma$, мощность Γ не превышает m), состоящую из отношений эквивалентности, и базу V_α ($\alpha \in \Gamma$), состоящую из симметрических правоинвариантных окружений. Эти базы можно выбрать так, чтобы для любого $\alpha \in \Gamma$ имело место $V_\alpha \subset U_\alpha$. Теперь докажем, что для всякого $U_\alpha[H]$ найдётся такая содержащая H открытая подгруппа G_α группы G , для которой $G_\alpha/H \subset U_\alpha[H]$. Обозначим через M и соответственно через N прообраз $V_\alpha[H]$ и соответственно $U_\alpha[H]$ при проецировании G на G/H . Тогда M и N являются окрестностями H в G и выполняется $M \subset N$, покажем, что имеем место даже $MN \subset N$. Действительно, если $a \in M$, $b \in N$, т. е. $Ha \in V_\alpha[H]$, $Hb \in U_\alpha[H]$, то

⁶⁾ Утверждение теоремы для случая $H=1$ вытекает из [13] на основании [4].

⁷⁾ Размерность непустого равномерного пространства равна или меньше числа $n \geq 0$, если каждое его равномерное покрытие имеет равномерное измельчение, кратность которого не превышает $n+1$ (см. [5], [9]).

$(H, Ha) \in V_\alpha$, $(H, Hb) \in U_\alpha$, поэтому $(Hb, Hab) \in V_\alpha$, значит $(H, Hab) \in V_\alpha \circ U_\alpha \subset U_\alpha \circ U_\alpha = U_\alpha$, откуда вытекает $ab \in N$. Из формулы $MN \subset N$ следует справедливость $M^i N \subset N$, а значит $M^i \subset N$ для всякого натурального числа i . Если примем во внимание и выполнение $M^{-1} = M$, то получим, что в топологической группе G для порождённой множеством M открытой подгруппы G_α имеет место $H \subset G_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} M^i \subset N$, значит $G_\alpha/N \subset U_\alpha[H]$ выполняется в G/H .

Теорема 6. *Факторпространство G/H тогда и только тогда метризуемо правоинвариантной неархимедовой⁸⁾ метрикой, если в G имеется такая счётная система содержащих H открытых подгрупп G_n ($n=1, 2, \dots$), что G_n/H ($n=1, 2, \dots$) образуют фундаментальную систему окрестностей H в факторпространстве G/H .*

Доказательство. Если факторпространство G/H метризуемо правоинвариантной неархимедовой метрикой, то определённая этой метрикой равномерность, как не трудно показать, является нульмерной, и поэтому удовлетворяет условиям теоремы 5. Следовательно, существует такая счётная система открытых подгрупп G_n ($n=1, 2, \dots$), $H \subset G_n \subset G$, что G_n/H ($n=1, 2, \dots$) образуют фундаментальную систему окрестностей H в факторпространстве G/H .

Пусть наоборот, система открытых в G подгрупп G_n ($n=1, 2, \dots$) удовлетворяет условиям теоремы. Можно предположить, что $G_1 = G$, $G_n \neq G_m$ при $n \neq m$, $G_{n+1} \subset G_n$ ($n=1, 2, \dots$). Определим правоинвариантную метрику ϱ в пространстве G/H формулой $\varrho(Hx, Hy) = \frac{1}{n}$, если $xy^{-1} \in G_n \setminus G_{n+1}$ и $\varrho(Hx, Hy) = 0$, если $Hx = Hy$. Не трудно проверить, что ϱ неархимедова метрика. Действительно, если $\varrho(Hx, Hy) = \frac{1}{n} \leq \varrho(Hy, Hz) = \frac{1}{m}$, то $xz^{-1} = (xy^{-1})(yz^{-1}) \in G_m^2$, т. е. $\varrho(Hx, Hz) \leq \frac{1}{m}$ (такое неравенство очевидно выполняется и в том случае, когда $\varrho(Hx, Hy)$ или $\varrho(Hy, Hz)$ равны нулю). Топология, порождённая метрикой ϱ , совпадает с топологией факторпространства G/H , т. к. шар вокруг H радиуса $\frac{1}{n}$ даёт в точности G_{n+1}/H ($n=1, 2, \dots$).

Теорема 7. *Факторпространство G/H тогда и только тогда метризуемо правоинвариантной неархимедовой метрикой, если оно метризуемо правоинвариантной метрикой и факторравномерность G/H нульмерна.*

Доказательство. Согласно теоремам 5 и 6 топология факторпространства G/H , если оно метризуемо правоинвариантной неархимедовой метрикой, является равномерной топологией некоторой определённой на G/H нульмерной правоинвариантной равномерности, а по теореме 3 эта равномерность совпадает с факторравномерностью G/H .

⁸⁾ Метрика ϱ называется неархимедовой, если для любых точек x, y, z пространства выполняется $\varrho(x, z) \leq \max(\varrho(x, y), \varrho(y, z))$.

Наоборот, предположим, что факторравномерность G/H нульмерна и факторпространство G/H метризуемо правоинвариантной метрикой ϱ . Согласно теореме 3, определённая ϱ равномерность совпадает с факторравномерностью G/H . Таким образом, топология факторпространства G/H является равномерной топологией метризуемой правоинвариантной нульмерной равномерности G/H . Как видим, теоремы 5 и 6 здесь опять применимы, следовательно, факторпространство G/H метризуемо правоинвариантной неархимедовой метрикой.

§ 3. Инвариантная неархимедова метризация топологических групп

Направленную⁹⁾ систему элементов g_α ($\alpha \in \Gamma$) (аддитивной, но не обязательно коммутативной) топологической группы назовём *нулевой системой*, если для всякой окрестности U нулевого элемента группы найдётся такой индекс $\alpha_0 \in \Gamma$, что при всяком $\alpha_0 \leq \alpha$ ($\alpha \in \Gamma$) выполняется $g_\alpha \in U$.

Мы будем говорить, что направленная система элементов g_α ($\alpha \in \Gamma$) топологической группы *образует ряд Коши*¹⁰⁾, если для всякой окрестности U нулевого элемента группы найдётся такой индекс $\alpha_0 \in \Gamma$, что при различных $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Gamma$, $\alpha_0 \leq \alpha_k$ ($j = 1, \dots, k$) всегда выполняется $g_{\alpha_1} + \dots + g_{\alpha_k} \in U$.

Теорема 8. *Правая равномерность топологической группы G тогда и только тогда нульмерна, если всякая нулевая система элементов в G образует ряд Коши.*

Доказательство. Воспользуемся утверждением теоремы 5 для случая подгруппы H , содержащей лишь нулевой элемент группы G , согласно которому правая равномерность G тогда и только тогда нульмерна, если нулевой элемент G имеет фундаментальную систему окрестностей, состоящую из открытых подгрупп G . Отсюда, во-первых, очевидно, что всякая нулевая система элементов в G образует ряд Коши, если правая равномерность G нульмерна.

Пусть наоборот, правая равномерность топологической группы G не является нульмерной, т. е. нулевой элемент G имеет такую окрестность V , которая не содержит ни одной открытой подгруппы. Если U_α ($\alpha \in \Gamma$) некоторая фундаментальная система окрестностей нулевого элемента, то, согласно выбору окрестности V , для всякого $\alpha \in \Gamma$ найдутся $g_{(\alpha, 1)}, \dots, g_{(\alpha, n_\alpha)} \in U_\alpha$, для которых $g_{(\alpha, 1)} + \dots + g_{(\alpha, n_\alpha)} \notin V$. Определим во множестве пар (α, i) отношение направленности так, чтобы $(\alpha, i) \leq (\beta, j)$ выполнялось при $U_\beta \subset U_\alpha$ для всех $1 \leq i \leq n_\alpha$, $1 \leq j \leq n_\beta$. Полученная таким образом нулевая система элементов $g_{(\alpha, i)}$ ($\alpha \in \Gamma$, $i = 1, 2, \dots, n_\alpha$) не образует ряда Коши. Действительно, для любой фиксированной пары (α, i) выполняется $(\alpha, i) \leq (\alpha, j)$ при $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, но $g_{(\alpha, 1)} + \dots + g_{(\alpha, n_\alpha)} \notin V$.

⁹⁾ Система элементов g_α ($\alpha \in \Gamma$) является направленной, если Γ направленное множество, т. е. в Γ определено такое рефлексивное и транзитивное отношение „ $\leq$ “, что для любых $\alpha, \beta \in \Gamma$ найдётся $\gamma \in \Gamma$, для которого $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$.

¹⁰⁾ Не трудно показать, что числовой ряд тогда и только тогда абсолютно сходящийся, если его члены образуют ряд Коши. Подобное замечание, вообще говоря, не справедливо для метрических групп.

Теорема 9. Полная справа¹¹⁾ топологическая группа тогда и только тогда метризуема правоинвариантной неархимедовой метрикой, если она метризуема и члены каждой её нулевой последовательности образуют сходящийся ряд.

Доказательство. Если полная справа топологическая группа G метризуема правоинвариантной неархимедовой метрикой, то, по теореме 7, правая равномерность G нульмерна. Применив теорему 8 для случая нулевой последовательности рассматриваемой группы G , получим, что члены такой последовательности образуют ряд Коши, следовательно сходящийся ряд.

Пусть наоборот, полную справа метризуемую топологическую группу G нельзя метризовать неархимедовой метрикой. Тогда, опять-таки по теореме 7, правая равномерность G не является нульмерной, следовательно, нулевой элемент G имеет не содержащую никакой открытой подгруппы окрестность V . Если $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ состоящая из симметрических множеств фундаментальная система окрестностей нулевого элемента G , то для всякого U_k ($k=1, 2, \dots$) найдутся элементы $g_{(k,1)}, \dots, g_{(k,n_k)} \in U_k$, для которых $g_{(k,1)} + \dots + g_{(k,n_k)} \notin V$. Не трудно проверить, что последовательность $g_{(1,1)}, \dots, g_{(1,n_1)}, g_{(2,1)}, \dots, g_{(2,n_2)}, \dots$ является нулевой последовательностью, но бесконечный ряд $g_{(1,1)} + \dots + g_{(1,n_1)} + g_{(2,1)} + \dots + g_{(2,n_2)} + \dots$ не сходится.

Предложение 3. Для метризуемости полной справа¹²⁾ метрической группы G правоинвариантной неархимедовой метрикой выполнение¹³⁾ $\dim G=0$, вообще говоря, не является достаточным условием (даже в коммутативном сепарабельном случае).

Доказательство. Дадим пример коммутативной сепарабельной полной метрической группы G , для которой выполняется $\dim G=0$, однако которую нельзя метризовать правоинвариантной неархимедовой метрикой.

Пусть G состоит из последовательностей $(a_1, a_2, \dots)$, где a_k рациональные целые числа и $\frac{|a_k|}{k}$ ($k=1, 2, \dots$) нулевая последовательность. Очевидно, что G является топологической группой относительно операции обычного сложения последовательностей и топологии, порождённой метрикой ϱ , которую мы зададим формулой $\varrho(g, h) = \max_k \frac{|a_k - b_k|}{k}$ ($k=1, 2, \dots$) для элементов $g = (a_1, a_2, \dots)$ и $h = (b_1, b_2, \dots)$ группы G .

Докажем, что G является полной группой. Если $g_1, \dots, g_s, \dots$ последовательность Коши в G , где $g_s = (a_{1s}, a_{2s}, \dots)$ и $g_{n_1}, g_{n_2}, \dots$ такая её подпоследовательность, что при $n_k \leq s$ выполняется $\varrho(g_{n_k}, g_s) < \frac{1}{k}$ ($k=1, 2, \dots$), то группа G содержит элемент $g = (a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots)$, так как $\frac{|a_{sn_s}|}{s}$ ($s=1, 2, \dots$) является нулевой

¹¹⁾ Топологическую группу называем полной справа, если пространство её правой равномерности полно.

¹²⁾ Важность утверждения обеспечивается требованием полноты.

¹³⁾ $\dim G$ и $\text{ind } G$ обозначает соответственную размерность топологического пространства группы G .

последовательностью. Действительно, если для натурального k индекс r такой, что $\frac{|a_{sn_k}|}{s} < \frac{1}{k}$ выполняется при $r \leq s$, то для удовлетворяющих условию $\max(n_k, r) < s$ индексов s справедливо $\frac{|a_{sn_s}|}{s} = \frac{|a_{sn_s} - a_{sn_k} + a_{sn_k}|}{s} \leq \frac{|a_{sn_s} - a_{sn_k}|}{s} + \frac{|a_{sn_k}|}{s} < \varrho(g_{n_s}, g_{n_k}) + \frac{1}{k} < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$ (здесь мы приняли во внимание и выполнение $s \leq n_s$, т. е. $n_k \leq n_s$). Покажем теперь, что элемент g является пределом последовательности $g_1, \dots, g_s, \dots$. Сначала заметим, что для всякого натурального k выполняется $\varrho(g, g_{n_k}) < \frac{1}{k}$. Действительно, если $1 \leq s \leq k$, то $n_s \leq n_k$ и поэтому $\varrho(g_{n_s}, g_{n_k}) < \frac{1}{s}$, значит $\frac{|a_{sn_s} - a_{sn_k}|}{s} < \frac{1}{s}$, откуда следует $a_{sn_s} = a_{sn_k}$. Если же $k < s$, то $\varrho(g_{n_k}, g_{n_s}) < \frac{1}{k}$, значит $\frac{|a_{sn_s} - a_{sn_k}|}{s} < \frac{1}{k}$. Как видим, $\frac{|a_{sn_s} - a_{sn_k}|}{s} < \frac{1}{k}$ выполняется для всякого натурального s , откуда и следует $\varrho(g, g_{n_k}) < \frac{1}{k}$. После этого очевидно, что g является пределом последовательности $g_1, \dots, g_s, \dots$, т. к. для любого натурального k и $n_k \leq s$ выполняется $\varrho(g, g_s) \leq \varrho(g, g_{n_k}) + \varrho(g_{n_k}, g_s) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$.

Покажем теперь, что группа G сепарабельна. Пусть H содержит те элементы из G , у которых только конечное число членов последовательности отлично от нуля. Ясно, что H счётное множество. В то же время H всюду плотно в G . Действительно, если $g = (a_1, a_2, \dots)$ произвольный элемент группы G , то шар вокруг g радиусом ε содержит элемент $x = (a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots) \in H$, где индекс N определён так, чтобы $\frac{|a_n|}{n} < \varepsilon$ выполнялось при $N \leq n$.

В дальнейшем займёмся вопросами размерностей топологического пространства и равномерности группы G . Докажем сначала, что $\text{ind } G = 0$ (отсюда следует $\dim G = 0$). Для этого покажем, что дополнение $G \setminus V_\varepsilon$ к каждому шару V_ε вокруг нулевого элемента группы G радиуса $0 < \varepsilon$ является открытым подмножеством в G . Если $g = (a_1, a_2, \dots) \in G \setminus V_\varepsilon$, то $G \setminus V_\varepsilon$ содержит шар вокруг g радиуса $\varrho(0, g) - \varepsilon$. Действительно, пусть $x = (b_1, b_2, \dots)$ будет произвольным элементом этого шара. Тогда для индекса l , где $\frac{|a_l|}{l} = \varrho(0, g)$, выполняется $\varrho(0, g) - \frac{|b_l|}{l} = \frac{|a_l|}{l} - \frac{|b_l|}{l} \leq \frac{|a_l - b_l|}{l} \leq \varrho(g, x) < \varrho(0, g) - \varepsilon$. Отсюда следует, что $\varepsilon < \varrho(0, x)$, то есть $x \in G \setminus V_\varepsilon$.

В заключение докажем, что G невозможно метризовать инвариантной неархимедовой метрикой. В смысле теоремы 7 для этого достаточно убедиться в том, что равномерность группы не является нульмерной, а согласно теореме 6 этот вопрос сводится к доказательству того, что нулевой элемент G не имеет состоящей из открытых подгрупп фундаментальной системы окрестностей. Покажем во-первых, что в случае подгруппы N , порождённой произвольным

элементом $0 \neq g = (a_1, a_2, \dots) \in G$, и произвольного действительного $0 < \varepsilon$ найдётся такой элемент $h \in N$, для которого выполняется $\varepsilon < \varrho(0, h)$. Искомый элемент h определяется например формулой $h = ng$, где для натурального n и некоторого отличного от нуля a_k справедливо неравенство $\varepsilon < n \cdot \frac{|a_k|}{k} \equiv \varrho(0, ng)$. Во-вторых, топология G не дискретна, так как для элемента $g \in G$, у которого $k+1$ -ый член последовательности равен 1, а остальные члены 0, выполняется $\varrho(0, g) < \frac{1}{k}$.

Теорема 10. *Топологическая группа тогда и только тогда метризуема двухсторонне инвариантной неархимедовой метрикой, если она метризуема, правая и левая её равномерности совпадают и нульмерны.*

Доказательство. Если топологическая группа G метризуема двухсторонне инвариантной неархимедовой метрикой, то, как легко проверить, шар вокруг единицы G любого радиуса является открытым нормальным делителем группы G . Отсюда следует совпадение правой и левой равномерности в G , а по теореме 7 равномерность группы G является нульмерной.

Пусть наоборот, нульмерные правая и левая равномерности метризуемой топологической группы G совпадают. Не трудно показать, что каждая открытая подгруппа такой группы G содержит открытый нормальный делитель G , откуда с использованием теорем 6 и 7 следует, что единица G имеет состоящую из открытых нормальных делителей группы счётную фундаментальную систему окрестностей. С помощью этой системы определим метрику в G точно так же, как в теореме 6 (для случая $N=1$) с помощью подгрупп. В этом случае получим двухсторонне инвариантную неархимедовую метрику, порождающую данную топологию группы G .

Предложение 4. Для метризуемости топологической группы двухсторонне инвариантной неархимедовой метрикой метризуемость односторонне инвариантной неархимедовой метрикой, вообще говоря, не является достаточным условием (даже в случае счётных групп).

Доказательство. Дадим пример счётной топологической группы G , единица которой имеет состоящую из открытых подгрупп счётную фундаментальную систему окрестностей, но это же условие не выполняется для нормальных делителей, то есть правая и левая равномерности группы G не совпадают. Согласно теоремам 6 и 10 наличие такой группы доказывает наше предложение.

Пусть A будет бесконечным счётным множеством, а G группой тех подстановок A , которые переставляют только конечное число элементов. Обозначим через F_B подгруппу G , которая состоит из подстановок, оставляющих на месте все элементы множества B . Если B пробегает все конечные подмножества A , то система подгрупп F_B образует (счётную) фундаментальную систему открытых окрестностей единицы в некоторой топологии группы G . Определённая таким образом топологическая группа G очевидно не является дискретной.

Покажем, что F_B не содержит нетривиальных нормальных делителей G в случае произвольного непустого множества B . Пусть $\alpha \in F_B$ отличная от

единицы подстановка, а $c \in A \setminus B$ такой элемент, что $cx \neq c$. Тогда для подстановки $\pi \in G$, для которой $c\pi = b \in B$, выполняется $b(\pi^{-1}\alpha\pi) = (cx)\pi \neq b$, то есть $\pi^{-1}\alpha\pi \notin F_B$.

Предложение 5. Класс топологических групп с нульмерной правой равномерностью невозможно охарактеризовать (в классе всех топологических групп) с помощью топологических свойств их топологических пространств (даже в счётном коммутативном случае).

Доказательство. Определим топологию в аддитивной группе G рациональных целых чисел с помощью фундаментальной системы окрестностей нуля, состоящей из подгрупп, имеющих конечный индекс в G . Топологическая группа G не дискретна, следовательно плотна в себе, и поэтому гомеоморфна топологическому пространству аддитивной группы R рациональных чисел, наделённой привычной топологией (см. [3] на стр. 296). По теореме 5 равномерность группы G нульмерна, а равномерность группы R не является нульмерной, в то же время их топологические пространства гомеоморфны.

Группу с определённой на ней равномерностью назовём *равномерной группой*¹⁴⁾, если групповая операция, как функция двух переменных, и операция образования обратного элемента являются равномерно непрерывными.

Теорема 11. *Равномерная группа тогда и только тогда метризуема¹⁵⁾ двухсторонне инвариантной неархимедовой метрикой, если она метризуема и нульмерна¹⁶⁾.*

Доказательство. Из известных свойств топологических групп (см. [1] на стр. 231) следует, что равномерная группа G является топологической группой относительно топологии, порождённой равномерностью G , а правая и левая равномерности этой топологической группы G совпадают с данной равномерностью равномерной группы G . По теореме 10 топологическое пространство группы G тогда и только тогда метризуемо двухсторонне инвариантной неархимедовой метрикой, если равномерность G нульмерна. Однако, как не трудно показать, топология топологической группы точно тогда порождается двухсторонне инвариантной метрикой, когда эта же метрика порождает равномерность группы.

Литература

- [1] Н. Бурбаки, *Общая топология Москва*, 1958.
- [2] Дж. Келли, *Общая топология Москва*, 1968.
- [3] К. Куратовский, *Топология 1 Москва*, 1966.
- [4] В. Поляков, *Реферативный Журнал* 1969, I, 3А 401.
- [5] Ю. Смирнов, О размерности пространств близости, *Мат. Сб.* 38 (1956).

¹⁴⁾ Введение этого термина даёт возможность проще и короче сформулировать некоторые утверждения (сравни теоремы 10 и 11).

¹⁵⁾ Под метризацией равномерной группы понимаем метризацию её равномерности.

¹⁶⁾ Под размерностью равномерной группы подразумеваем размерность её равномерности (см. [5] и [9]).

- [6] J. DE GROOT, Non archimedean metrics in topology, *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956).
- [7] J. DE GROOT, On a metric that characterizes dimension, *Can. J. Math.* **9** (1957).
- [8] E. HEWITT—K. ROSS, Abstract harmonic analysis I Berlin, 1963.
- [9] J. ISBELL, Zero-dimensional spaces, *Tohoku Math. J.* **7** (1955).
- [10] J. NAGATA, Note on dimension theory for metric spaces, *Fund. Math.* **45** (1958).
- [11] J. NAGATA, On a special metric and dimension, *Fund. Math.* **55** (1964).
- [12] J. NAGATA, Modern dimension theory *Amsterdam*, 1965.
- [13] J.-P. OLIVIER, K-structures, *Bull. Sci. Math.* **91** (1967).

(Поступило 22. X. 1970.)