

Graphen mit genau drei Knotenpunkten gleicher Valenz

Von CARL-GÜNTER D'AMBLY (Jena)

Meinem lieben Vater zum siebzigsten Geburtstag

Den folgenden Betrachtungen liegen endliche ungerichtete Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten zugrunde. Der Einfachheit halber wollen wir solche Graphen schlicht nennen. Unter der Valenz eines Knotenpunktes in einem Graphen G ist die Anzahl der mit diesem Knotenpunkt in G inzidierenden Kanten zu verstehen. Gegenstand unserer Untersuchung sind diejenigen schlichten Graphen, die genau ein Tripel von Knotenpunkten gleicher Valenz aufweisen. Das heißt, in den betrachteten Graphen treten drei Paare von Knotenpunkten gleicher Valenz auf; weitere Paare von Knotenpunkten gleicher Valenz sind nicht zugelassen. Wir werden im folgenden meist kurz von schlichten Graphen mit genau drei Knotenpunkten gleicher Valenz sprechen.

Mit $\mathfrak{G}_{n,r}$ ($n \geq 3, r \geq 0$) sei die Menge aller schlichten Graphen mit n Knotenpunkten bezeichnet, die genau drei Knotenpunkte gleicher Valenz aufweisen, wobei r die gemeinsame Valenz bedeutet. Darüber hinaus seien folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}^{(r)} &:= \bigcup_{n \geq 3} \mathfrak{G}_{n,r}, & \mathfrak{G}_n &:= \bigcup_{r=0}^{n-1} \mathfrak{G}_{n,r}, \\ \mathfrak{G} &:= \bigcup_{\substack{n \geq 3 \\ 0 \leq r \leq n-1}} \mathfrak{G}_{n,r}.\end{aligned}$$

Enthält ein Graph G genau drei Knotenpunkte gleicher Valenz, so gilt dasselbe für den komplementären Graphen $\bar{G}$ (in dem zwei verschiedene Knotenpunkte genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie in G nicht verbunden sind). Genauer gilt sogar für jedes $n \geq 3$ und jedes r mit $0 \leq r \leq n-1$: $G \in \mathfrak{G}_{n,r} \Rightarrow \bar{G} \in \mathfrak{G}_{n,n-1-r}$. Für $n \geq 4$ hat jeder Graph $G \in \mathfrak{G}_n$ höchstens zwei Komponenten. Ist er nicht zusammenhängend, so existiert ein isolierter Knotenpunkt. Denn in jeder Zusammenhangskomponente von G mit mindestens zwei Knotenpunkten muß nach dem DIRICHLETschen Schubfachprinzip ein Paar von Knotenpunkten gleicher Valenz auftreten (vgl. etwa [1]).

Enthält ein Graph $G \in \mathfrak{G}_{n,r}$ mit $n \geq 4$ einen isolierten Knotenpunkt x oder einen Knotenpunkt y der Valenz $n-1$, so gilt $G - \{x\} \in \mathfrak{G}_{n-1,r}$ bzw. $G - \{y\} \in \mathfrak{G}_{n-1,r-1}$. Dieser Umstand legt folgende Definition nahe: Ein Graph aus $\mathfrak{G}_n$ soll *irreduzibel*

genannt werden, wenn er weder einen isolierten Knotenpunkt noch einen Knotenpunkt der Valenz $n-1$ aufweist. Ein Graph $G \in \mathfrak{G}$ ist im übrigen genau dann irreduzibel, wenn der zugehörige komplementäre Graph $\bar{G}$ irreduzibel ist. Mit $\mathfrak{G}_{n,r}^{\text{irr}}$ bezeichnen wir im folgenden die Teilmenge der irreduziblen Graphen aus $\mathfrak{G}_{n,r}$. Jeder Graph aus $\mathfrak{G}$ läßt sich gemäß der voranstehenden Bemerkung in endlich vielen Schritten auf einen irreduziblen Graphen aus $\mathfrak{G}$ oder auf einen der beiden Graphen aus $\mathfrak{G}_3$ reduzieren.

In einem irreduziblen Graphen $G \in \mathfrak{G}_{n,r}$ muß mit Ausnahme von r jede der $n-2$ Valenzen $1, 2, \dots, n-2$ genau einmal vorkommen. Da die Summe der Valenzen aller Knotenpunkte eines Graphen stets geradzahlig ist, ergibt sich für jedes $n \geq 3$: Die Mengen $\mathfrak{G}_n$ mit $n \equiv 0 \pmod{4}$ bzw. $n \equiv 3 \pmod{4}$ enthalten keine irreduziblen Graphen.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wollen wir uns jetzt der Frage nach der Struktur der irreduziblen Graphen aus $\mathfrak{G}$ zuwenden.

Satz 1. Für jedes $k \geq 1$, jedes $e \in \{1, 2\}$ und jedes $r \leq 2k$ gilt: Jeder Graph $G \in \mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}$ läßt sich durch einen Schnitt in einen Untergraphen U mit $2k+e-1$ Knotenpunkten, der bis auf höchstens $r-k$ Kanten vollständig ist, und einen Untergraphen V mit $2k+1$ Knotenpunkten und höchstens $r-k$ Kanten zerlegen. Dabei ergänzen sich die Anzahl der dem Untergraphen U zur Vollständigkeit fehlenden Kanten und die Anzahl der im Untergraphen V vorhandenen Kanten zu $r-k$. Für $r < 2k$ ist die angegebene Zerlegung des Graphen G darüber hinaus eindeutig bestimmt.

■

Als Spezialfall ergibt sich aus diesem Satz die

Folgerung: Für jedes $k \geq 1$ und jedes $e \in \{1, 2\}$ gilt: Jeder Graph $G \in \mathfrak{G}_{4k+e,k}^{\text{irr}}$ ist auf eindeutig bestimmte Weise in einen vollständigen Untergraphen mit $2k+e-1$ Knotenpunkten und einen total zerfallenden Untergraphen mit $2k+1$ Knotenpunkten zerlegbar.

BEWEIS (zu Satz 1). Es sei $G \in \mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}$ und gelte $r < 2k$. Weiter seien U und V knotendisjunkte Untergraphen von G : U habe $2k+e-1$ Knotenpunkte und sei bis aus s Kanten vollständig, wobei $s \leq r-k$ gelte; V besitze $2k+1$ Knotenpunkte und $r-k-s$ Kanten. Dann besteht zwischen den Summen der Valenzen (bezüglich G) der Knotenpunkte von U bzw. V die Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{x \in U} v(x) &= \sum_{y \in V} v(y) + 2 \binom{2k+e-1}{2} - 2(r-k) \cong \\ &\cong \sum_{u=1}^{2k-1} u + 2r + 2 \binom{2k+e-1}{2} - 2(r-k) = \sum_{v=2k}^{4k+e-2} v. \end{aligned}$$

Da jedoch die Summe $\sum_{x \in U} v(x)$ den Wert $\sum_{v=2k}^{4k+e-2} v$ nicht übersteigen kann und dieser Wert dann und nur dann angenommen wird, wenn U aus den Knotenpunkten der Valenzen $2k, \dots, 4k+e-2$ besteht, so liegt der Untergraph U eindeutig fest. Das heißt, die Zerlegung von G ist eindeutig bestimmt, sofern sie überhaupt möglich ist. Im Falle $r=2k$ entsteht eine Mehrdeutigkeit dadurch, daß in G drei Knotenpunkte der Valenz $2k$ existieren.



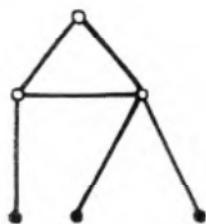
$G_{5,1}^{irr}$



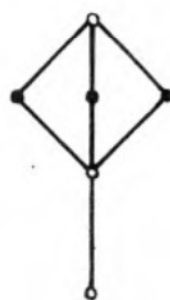
$G_{5,2}^{irr}$



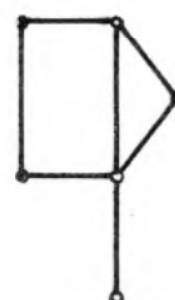
$G_{5,3}^{irr}$



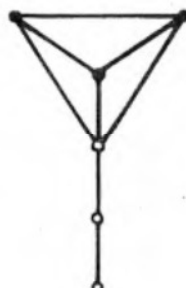
$G_{6,1}^{irr}$



$G_{6,2}^{irr}$



$G_{6,4}^{irr}$



$G_{6,3}^{irr}$



Abbildung 1

Hiernach ist es ein leichtes, für einen beliebigen Graphen $G \in \mathbb{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}$ die gewünschte Zerlegung anzugeben. Falls $r < 2k$, so erzeugen die $2k+e-1$ Knotenpunkte der Valenzen $2k, \dots, 4k+e-2$ den Untergraphen U und die $2k+1$ Knotenpunkte der Valenzen $1, \dots, r, r, r, \dots, 2k-1$ den Untergraphen V . Falls $r = 2k$, so fixiere man einen der Knotenpunkte der Valenz $2k$ willkürlich¹⁾. Zusammen mit ihm erzeugen die Knotenpunkte der Valenzen $2k+1, \dots, 4k+e-2$ den Untergraphen U . Die beiden anderen Knotenpunkte der Valenzen $2k$ erzeugen zusammen mit den Knotenpunkten der Valenzen $1, \dots, 2k-1$ den Untergraphen V . Dem Untergraphen U mögen s_1 Kanten zur Vollständigkeit fehlen, der Untergraph V hingegen besitze s_2 Kanten. Zwischen den Knotenpunkten von U und den Knotenpunkten von V verlaufen folglich

$$\sum_{v=2k}^{4k+e-2} v - 2 \binom{2k+e-1}{2} + 2s_1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{u=1}^{2k-1} u + 2r - 2s_2$$

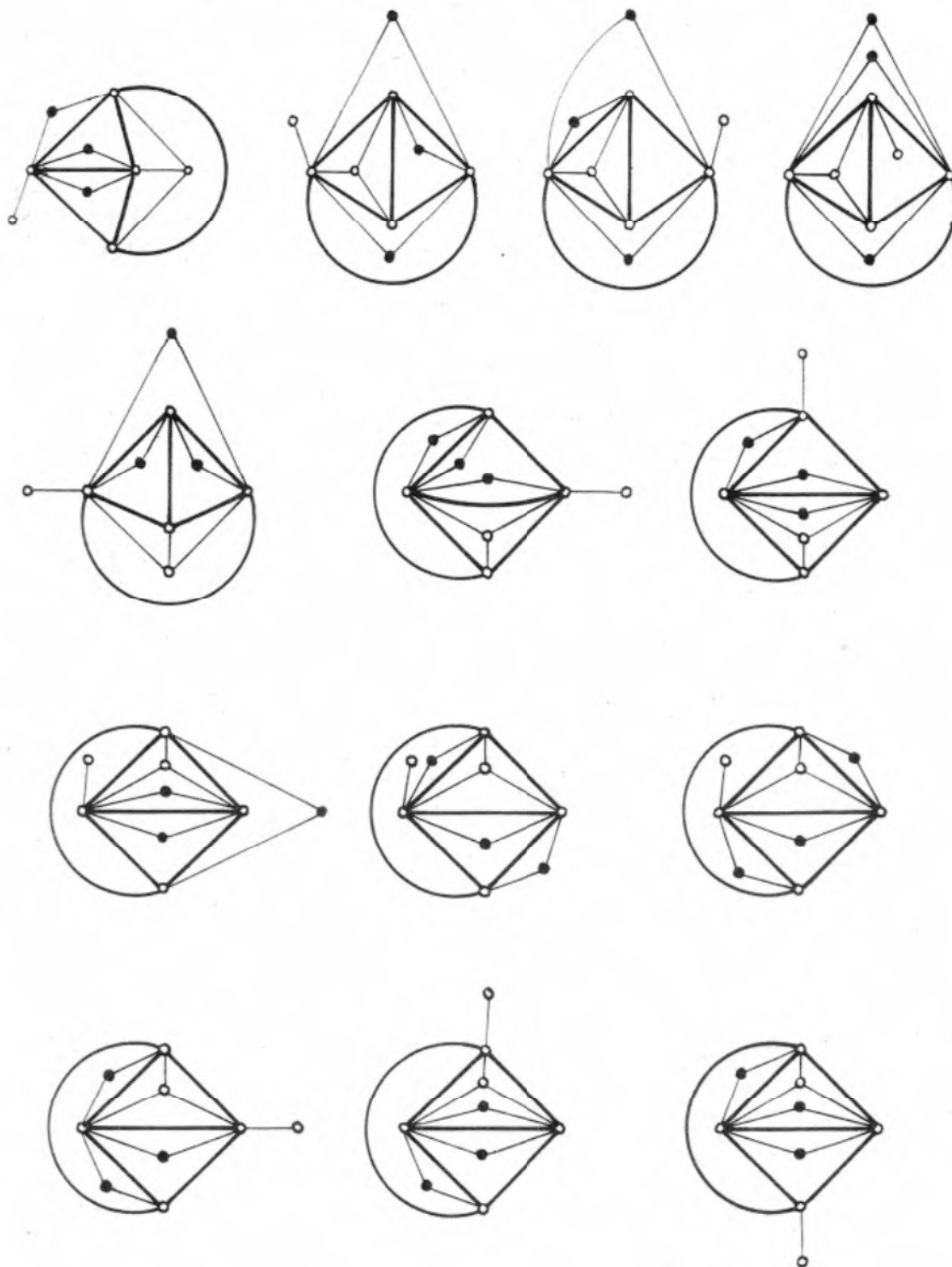
Halbkanten. Beide Anzahlen müssen übereinstimmen. Demzufolge ergibt sich, wie behauptet, $s_1 + s_2 = r - k$. Hieraus folgt, da s_1 und s_2 beide nicht negativ sein können, $s_1 \leq r - k$ und $s_2 \leq r - k$.

Durch Übergang von G zum zugehörigen komplementären Graphen $\bar{G}$ lassen sich die voranstehenden Strukturaussagen sofort dualisieren:

Satz 1*. Für jedes $k \geq 1$, jedes $e \in \{1, 2\}$ und jedes $r \geq 2k + e - 1$ gilt: Jeder Graph $G \in \mathbb{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}$ läßt sich durch einen Schnitt in einen Untergraphen U mit $2k+1$ Knotenpunkten, der bis auf höchstens $3k+e-1-r$ Kanten vollständig ist, und einen Untergraphen V mit $2k+e-1$ Knotenpunkten und höchstens $3k+e-1-r$ Kanten zerlegen. Dabei ergänzen sich die Anzahl der dem Untergraphen U zur Vollständigkeit fehlenden Kanten und die Anzahl der im Untergraphen V vorhandenen Kanten zu $3k+e-1-r$. Für $r > 2k+e-1$ ist die angegebene Zerlegung des Graphen G darüber hinaus eindeutig bestimmt.

Nach Satz 1 läßt sich jeder Graph $G \in \mathbb{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}$ mit $r \leq 2k$ in einen Untergraphen U mit $2k+e-1$ Knotenpunkten, der bis auf s_1 Kanten vollständig ist, und einen Untergraphen V mit $2k+1$ Knotenpunkten und s_2 Kanten zerlegen, wobei $s_1 + s_2 = r - k$ gilt. Da s_1 und s_2 beide nicht negativ sind, muß $r \geq k$ gelten. Das heißt,

¹⁾ Auf den ersten Blick könnte es verwunderlich erscheinen, daß man den Knotenpunkt der Valenz $2k$ frei wählen kann. Eine einfache Überlegung zeigt jedoch, daß bei Vertauschung des zu U gehörenden Knotenpunktes der Valenz $2k$ mit einem zu V gehörenden sämtliche im Satz 1 angegebenen Eigenschaften der Untergraphen U und V erhalten bleiben: Es sei $G \in \mathbb{G}_{4k+e,2k}^{\text{irr}}$; G sei in zwei Untergraphen U und V mit den angegebenen Eigenschaften zerlegt. U mögen s Kanten zur Vollständigkeit fehlen, V besitze t Kanten, und voraussetzungsgemäß gelte $s+t=k$. Mit u_1 sei der Knotenpunkt der Valenz $2k$ aus U bezeichnet; er sei durch s_1 Kanten mit U und durch t_1 Kanten mit V verbunden. Dabei gilt $s_1+t_1=2k$. Ferner sei u_2 ein Knotenpunkt der Valenz $2k$ aus V ; er sei durch s_2 Kanten mit U und durch t_2 Kanten mit V verbunden. Entsprechend gilt $s_2+t_2=2k$. Nun werden u_1 und u_2 miteinander vertauscht; d.h., wir bilden $U' = (U - \{u_1\}) \cup \{u_2\}$ und $V' = (V - \{u_2\}) \cup \{u_1\}$. Dann fehlen dem neuentstandenen Untergraphen U' gerade $s' = s + s_1 - s_2 + d$ Kanten, während V' gerade $t' = t + t_1 - t_2 - d$ Kanten besitzt; dabei gilt $d=1$, wenn die Knotenpunkte u_1 und u_2 miteinander verbunden sind, und $d=0$ sonst. Dem Untergraphen U fehlen zur Vollständigkeit mindestens t_1+e-2 Kanten; d.h., es gilt $2k-s_1 \leq s+2-e$. Außerdem gilt $s_2 \leq 2k+e-2+d$. Daraus ergibt sich $s' \geq 0$. Andererseits besitzt V mindestens t_2 Kanten; d.h. es gilt $t_2 \geq t$. Ferner gilt $t_1 \geq d$, so daß $t' \geq 0$ folgt. Darüber hinaus ergibt sich $s'+t' = s+t = k$ woraus die Beziehungen $s' \leq k$ und $t' \leq k$ resultieren.



$G_{9.2}^{irr}$

Abbildung 2

für $r < k$ kann kein Graph $G \in \mathbb{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}$ existieren. Durch Übergang zum komplementären Graphen folgt hieraus sofort, daß auch für $r > 3k+e-1$ kein Graph $G \in \mathbb{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}$ existieren kann. Damit erhalten wir als

Korollar: Für jedes $k \geq 1$ und jedes $e \in \{1, 2\}$ gilt $\mathbb{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}} = \emptyset$, sofern $r < k$ oder $r > 3k+e-1$.²⁾

Im Anschluß an diese Betrachtungen über die Struktur der irreduziblen Graphen mit genau drei Knotenpunkten gleicher Valenz richten wir unser Interesse auf die Frage, wieviele verschiedene, d. h. nicht-isomorphe Graphen in $\mathbb{G}_{n,r}^{\text{irr}}$ existieren.

Lemma 1. Für jedes $k \geq 1$ und jedes r mit $k \leq r \leq 2k$ gilt

$$|\mathbb{G}_{4k+2,r}^{\text{irr}}| \geq |\mathbb{G}_{4k+1,r}^{\text{irr}}|.$$

BEWEIS. Man adjungiere zu $G \in \mathbb{G}_{4k+1,r}^{\text{irr}}$ einen Knotenpunkt x und verbinde ihn mit sämtlichen Knotenpunkten von G der Valenzen $2k+1, \dots, 4k-1$ sowie, im Falle $r < 2k$, mit dem Knotenpunkt der Valenz $2k$, im Falle $r = 2k$, mit einem willkürlich fixierten der drei Knotenpunkte der Valenz $2k$. Dadurch entsteht aus G ein Graph $G \cup \{x\} \in \mathbb{G}_{4k+2,r}^{\text{irr}}$. Die auf diese Weise zustande kommende Abbildung $\varphi: \mathbb{G}_{4k+1,r}^{\text{irr}} \rightarrow \mathbb{G}_{4k+2,r}^{\text{irr}}$ ist eineindeutig (nachdem man gegebenenfalls in $G \in \mathbb{G}_{4k+1,r}^{\text{irr}}$ einen der Knotenpunkte der Valenz $2k$ willkürlich fixiert hat), so daß sich die behauptete Ungleichheit ergibt. Im Falle $r < 2k$ ist die Eineindeutigkeit von φ offensichtlich, da man durch Streichen des Knotenpunktes mit der Valenz $2k$ (bezüglich $G \cup \{x\}$) einschließlich der mit ihm inzidenten Kanten aus $G \cup \{x\}$ wieder den Graphen G erhält. Im Falle $r = 2k$ existiert im Graphen $G \cup \{x\}$ auf Grund seiner Provenienz mindestens ein Knotenpunkt der Valenz $2k$, der mit sämtlichen Knotenpunkten größerer Valenz verbunden ist. Da keiner dieser Knotenpunkte der Valenz $2k$ mit anderen Knotenpunkten als denen der Valenzen (bezüglich $G \cup \{x\}$) $2k+1, \dots, 4k$ verbunden sein kann, entsteht aus $G \cup \{x\}$ unabhängig davon, welchen dieser Knotenpunkte der Valenz $2k$ man streicht, stets ein zu G isomorpher Graph. Also ist auch für diesen Fall die Eineindeutigkeit von φ gesichert.

Für $k \geq 1$ und $r < 2k$ bezeichnen wir mit $\hat{\mathbb{G}}_{4k+2,r}^{\text{irr}}$ die Gesamtheit der Graphen aus $\mathbb{G}_{4k+2,r}^{\text{irr}}$, bei denen der Knotenpunkt der Valenz $2k$ nicht mit allen Knotenpunkten größerer Valenz verbunden ist. Dann ergibt sich auf Grund ganz ähnlicher Überlegungen wie der zum Lemma 1 angestellten: Für jedes $k \geq 1$ und jedes r mit $k \leq r < 2k$ gilt

$$|\mathbb{G}_{4k+2,r}^{\text{irr}}| = |\mathbb{G}_{4k+1,r}^{\text{irr}}| + |\hat{\mathbb{G}}_{4k+2,r}^{\text{irr}}|.$$

Gemäß Satz 1 erzeugen die Knotenpunkte der Valenzen $2k, \dots, 4k$ des Graphen $G \in \mathbb{G}_{4k+2,k}^{\text{irr}}$ einen vollständigen Untergraphen von G . Das heißt, es gilt $\hat{\mathbb{G}}_{4k+2,k}^{\text{irr}} = \emptyset$. Damit folgt aus der voranstehenden Bemerkung sofort die

²⁾ Diese Aussage läßt sich auch aus dem nachstehenden Satz von P. ERDÖS und T. GALLAI (vgl. [2] oder [3]) folgern: Eine Folge natürlicher Zahlen $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ ist genau dann durch die Valenzen eines schlichten Graphen mit n Knotenpunkten realisierbar, wenn

$$(1) \quad a_1 + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{2}$$

und

$$(2) \quad a_1 + \dots + a_s + (n-s-1)(n-t+1) \geq a_t + \dots + a_n$$

für jedes s und jedes t mit $0 \leq s \leq n-1$ und $s+1 \leq t \leq n$ gilt.

Bemerkung 1: Für jedes $k \geq 1$ gilt $|\mathfrak{G}_{4k+2,k}^{\text{irr}}| = |\mathfrak{G}_{4k+1,k}^{\text{irr}}|$.

Vermutung: Für jedes $k \geq 1$, jedes $e \in \{1, 2\}$ und jedes r mit $k \leq r \leq 3k + e - 1$ gilt:

$$|\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}| \leq |\mathfrak{G}_{4k+e,r+1}^{\text{irr}}|, \quad \text{falls } k \leq r \leq 2k - 1;$$

$$|\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}| \leq |\mathfrak{G}_{4k+e,r-1}^{\text{irr}}|, \quad \text{falls } 2k + e \leq r \leq 3k + e - 1.$$

Der zweite Teil der Vermutung ist eine unmittelbare Folge des ersten Teils, von dem wir jedoch nur einen sehr bescheidenen Teil als richtig werden nachweisen können.

Für $k \geq 1$, $e \in \{1, 2\}$ und $r < 2k$ bedeute ${}^{(i)}\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}$ mit $i \geq 0$ die Gesamtheit der Graphen G aus $\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}$, bei denen der von den Knotenpunkten der Valenzen $1, \dots, r, r, r, \dots, 2k-1$ erzeugte Untergraph von G genau i Kanten aufweist. Nach Satz 1 gilt ${}^{(i)}\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}} = \emptyset$, falls $i > r - k$. Damit folgt

$$\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}} = \bigcup_{i=0}^{r-k} {}^{(i)}\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}} \quad (r < 2k).$$

Als nächstes wollen wir zeigen, daß für jedes $k \geq 1$, jedes $e \in \{1, 2\}$, jedes r mit $k \leq r \leq 2(k-1)$ und jedes $i \in \{0, 1\}$ $|{}^{(i)}\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}| \leq |{}^{(i+1)}\mathfrak{G}_{4k+e,r+1}^{\text{irr}}|$ gilt. Als unmittelbare Folgerung hieraus ergibt sich die

Bemerkung 2: Für jedes $k \geq 1$ und jedes $e \in \{1, 2\}$ gilt:

$$|\mathfrak{G}_{4k+e,k}^{\text{irr}}| \leq |\mathfrak{G}_{4k+e,k+1}^{\text{irr}}|, \quad \text{falls } k \geq 2;$$

$$|\mathfrak{G}_{4k+e,k+1}^{\text{irr}}| \leq |\mathfrak{G}_{4k+e,k+2}^{\text{irr}}|, \quad \text{falls } k \geq 3.$$

Es sei $G \in {}^{(i)}\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}$. 1. Der Fall „ $i=0$ “: Man zeichne in G willkürlich zwei Knotenpunkte der Valenz r aus (wegen $i=0$ sind sie nicht benachbart) und adjungiere zu G eine diese beiden Knotenpunkte verbindende Kante. Dadurch entsteht aus G ein Graph $G' \in {}^{(1)}\mathfrak{G}_{4k+e,r+1}^{\text{irr}}$. Die auf diese Weise zustande kommende Abbildung $\varphi: {}^{(0)}\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}} \rightarrow {}^{(1)}\mathfrak{G}_{4k+e,r+1}^{\text{irr}}$ ist, nachdem man in jedem Graphen $G \in {}^{(0)}\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}$ zwei Knotenpunkte der Valenz r willkürlich fixiert hat, eineindeutig. Denn wegen $r \leq 2(k-1)$ existiert in G' genau ein Paar von Knotenpunkten der Valenz $r+1$, das durch eine Kante verbunden ist. Durch Streichen dieser Kante aus G' erhält man wieder den Ausgangsgraphen G . 2. Der Fall „ $i=1$ “: Man zeichne in G willkürlich zwei Knotenpunkte der Valenz r aus, die nicht benachbart sind und von denen keiner mit dem Knotenpunkt der Valenz $r+1$ verbunden ist (wegen $i=1$ ist die Existenz gesichert), und adjungiere zu G eine dieses Knotenpunktpaar verbindende Kante. Dadurch entsteht aus G ein Graph $G' \in {}^{(2)}\mathfrak{G}_{4k+e,r+1}^{\text{irr}}$. Die weiteren Überlegungen sind dieselben wie im Falle „ $i=0$ “.

Lemma 2. Für jedes $k \geq 1$ und jedes r mit $k \leq r \leq 2k-1$ gilt

$$|\mathfrak{G}_{4(k+1)+1,r+1}^{\text{irr}}| \geq 2(4k-1)|\mathfrak{G}_{4k+1,r}^{\text{irr}}|.$$

BEWEIS. Es sei $r \leq 2k-1$ und $G \in \mathfrak{G}_{4k+1,r}^{\text{irr}}$. Aus diesem Graphen G lassen sich mindestens $2(4k-1)$ verschiedene Graphen der Klasse $\mathfrak{G}_{4(k+1)+1,r+1}^{\text{irr}}$ erzeugen, indem man vier Knotenpunkte adjungiert und diese in geeigneter Weise untereinander

und mit den Knotenpunkten des Ausgangsgraphen G verbindet. — Mit U und V seien die Gesamtheiten der Knotenpunkte von G der Valenzen $2k, \dots, 4k-1$ bzw. der Valenzen $1, \dots, 2k-1$ bezeichnet. Man adjungiere zu G die Knotenpunkte x, y, p, q und sämtliche Kanten einer der nachstehenden Mengen

$$E_v^\mu = \{(x, z)/z \in U \cup \{y\}\} \cup \{(y, z)/z \in U\} \cup R_v^\mu \quad (\mu=1 \text{ und } v \in U \cup V \cup \{x, y\} \\ \text{bzw. } \mu=2 \text{ und } v \in U \cup V \text{ mit } v(v) \neq 4k-1 \text{ sowie } v(v) \neq 2k-1).$$

Dabei bedeuten:

- $R_a^1 = \{(a, q)\} \cup \{(p, z)/z \in (U \cup \{x, y\}) - \{a\}\} \cup \{(x, u)/u \in V\}$, wobei a ein willkürlich fixierter Knotenpunkt aus $U \cup \{x, y\}$ ist;
 $R_b^1 = \{(b, y)\} \cup \{(p, z)/z \in U \cup \{x\}\} \cup \{(x, u)/u \in (V - \{b\}) \cup \{q\}\}$, wobei b ein willkürlich fixierter Knotenpunkt aus V ist;
 $R_a^2 = \{(a, q)\} \cup \{(p, z)/z \in (U \cup \{x, y\}) - \{a'\}\} \cup \{(x, u)/u \in V\}$, wobei a ein willkürlich fixierter Knotenpunkt aus U mit $v(a) \equiv 4k-2$ ist und a' derjenige Knotenpunkt von G , für den $v(a') = v(a)+1$ gilt;
 $R_b^2 = \{(b, y)\} \cup \{(p, z)/z \in U \cup \{x\}\} \cup \{(x, u)/u \in (V - \{b'\}) \cup \{q\}\}$, wobei b ein willkürlich fixierter Knotenpunkt aus V mit $v(b) \equiv 2(k-1)$ ist und b' derjenige bzw. ein willkürlich fixierter Knotenpunkt, für den $v(b') = v(b)+1$ gilt. Damit sich die Bedingung für $v(b)$ erfüllen läßt, ist die Voraussetzung $k \equiv 2$ erforderlich. Im folgenden wird sich jedoch herausstellen, daß man diese Einschränkung wieder fallen lassen kann.

Es ist reine Routineangelegenheit nachzuweisen, daß die durch die angegebenen Konstruktionen entstehenden Graphen sämtlich zu $\mathfrak{G}_{4(k+1)+1, r+1}^{\text{irr}}$ gehören. Wir übergehen diesen Nachweis, merken jedoch an, daß in sämtlichen auf diese Weise entstehenden Graphen G' $v'(x) = 4k+3$, $v'(y) = 2k+2$, $v'(p) = 2k+1$ und $v'(q) = 1$ gilt. Die auf diese Weise definierten Abbildungen $\varphi_v^\mu: \mathfrak{G}_{4k+1, r}^{\text{irr}} \rightarrow \mathfrak{G}_{4(k+1)+1, r+1}^{\text{irr}}$ sind offensichtlich eindeutig. Fixiert man für jeden Graphen $G \in \mathfrak{G}_{4k+1, r}^{\text{irr}}$ von den drei Knotenpunkten der Valenz r einen willkürlich und läßt für die beiden anderen die zugehörigen Abbildungen φ_a^1 und φ_b^2 aus der Betrachtung fort, so gilt $\varphi_v^\mu(G) \neq \varphi_\sigma^\sigma(G)$ für jedes $G \in \mathfrak{G}_{4k+1, r}^{\text{irr}}$, sofern $(\mu, v) \neq (\sigma, \sigma)$. Davon überzeugt man sich ebenfalls unschwer. Darüber hinaus sind die Abbildungen φ_v^μ sämtlich eindeutig umkehrbar, und für $(\mu, v) \neq (\sigma, \sigma)$ gilt $\varphi_v^\mu(\mathfrak{G}_{4k+1, r}^{\text{irr}}) \cap \varphi_\sigma^\sigma(\mathfrak{G}_{4k+1, r}^{\text{irr}}) = \emptyset$: Es sei $\varphi_v^\mu(G) = \varphi_\sigma^\sigma(G')$ für zwei Graphen $G, G' \in \mathfrak{G}_{4k+1, r}^{\text{irr}}$. Streicht man die (eindeutig festliegenden) Knotenpunkte der Valenzen $1, 2k+1, 2(k+1), 4(k+1)-1$ einschließlich der mit ihnen inzidenten Kanten aus $\varphi_v^\mu(G)$ bzw. $\varphi_\sigma^\sigma(G')$, so gehen $\varphi_v^\mu(G)$ und $\varphi_\sigma^\sigma(G')$ in G bzw. G' über. Da diese Operation eindeutig ist, muß $G = G'$ gelten, womit bereits die eindeutige Umkehrbarkeit von φ_v^μ nachgewiesen ist. Aus $\varphi_v^\mu(G) = \varphi_\sigma^\sigma(G)$ folgt schließlich gemäß den obigen Darlegungen $(\mu, v) = (\sigma, \sigma)$. Damit ist gezeigt, daß die einzelnen Abbildungen φ_v^μ die Menge $\mathfrak{G}_{4k+1, r}^{\text{irr}}$ in eineindeutiger Weise auf paarweise disjunkte Teilmengen von $\mathfrak{G}_{4(k+1)+1, r+1}^{\text{irr}}$ abbilden. Es gibt $2k+2$ verschiedene Abbildungen φ_a^1 mit $a \in U \cup \{x, y\}$, mindestens $2k-1$ verschiedene Abbildungen φ_b^1 mit $b \in V$, $2k-1$ verschiedene Abbildungen φ_a^2 mit $a \in U$ und $v(a) \equiv 4k-2$ und mindestens $2k-2$ verschiedene Abbildungen φ_b^2 mit $b \in V$ und $v(b) \equiv 2(k-1)$. An dieser Stelle wird übrigens ersichtlich, weshalb die im Zusammenhang mit R_b^2 gemachte Einschränkung $k \equiv 2$ unwesentlich ist. Insgesamt lassen sich also aus den Graphen von $\mathfrak{G}_{4k+1, r}^{\text{irr}}$ mindestens $2(4k-1) \cdot |\mathfrak{G}_{4k+1, r}^{\text{irr}}|$ verschiedene Graphen aus $\mathfrak{G}_{4(k+1)+1, r+1}^{\text{irr}}$ erzeugen.

Die beiden nächsten Lemmata ergänzen das Lemma 2 und gestatten einen vollständigen Überblick über die Gesamtheit der nicht-leeren Klassen $\mathfrak{G}_{n,r}^{\text{irr}}$. Die zugehörigen Beweise, denen die gleiche Idee wie dem Beweis des vorangehenden Lemmas zugrunde liegt, sollen lediglich skizziert werden.

Lemma 3. Für jedes $k \geq 1$ gilt $|\mathfrak{G}_{4(k+1)+1, 2k+1}^{\text{irr}}| \cong 4k \cdot |\mathfrak{G}_{4k+1, 2k}^{\text{irr}}|$.

BEWEIS. Es sei $G \in \mathfrak{G}_{4k+1, 2k}^{\text{irr}}$. Einer der drei Knotenpunkte der Valenz $2k$ werde willkürlich fixiert. Zusammen mit sämtlichen Knotenpunkten größerer Valenz bilde er die Menge U . Die beiden andern Knotenpunkte der Valenz $2k$ bilden zusammen mit sämtlichen Knotenpunkten kleinerer Valenz die Menge V . Mit u_0 sei der Knotenpunkt der Valenz $2k-1$ bezeichnet. Nun adjungiere man zu G vier Knotenpunkte x, y, p, q und sämtliche Kanten einer der nachstehenden Mengen

$$E_a^\mu = \{(x, z)/z \in U \cup V \cup \{y\}\} \cup \{(y, z)/z \in U \cup \{u_0\}\} \cup R_a^\mu \quad (\mu=1 \text{ und } a \in U \cup \{x\} \\ \text{bzw. } \mu=2 \text{ und } a \in U \text{ mit } v(a) \neq 4k-1).$$

Dabei bedeuten:

$$R_a^1 = \{(q, a)\} \cup \{(p, z)/z \in (U \cup \{x\}) - \{a\}\}, \text{ wobei } a \in U \cup \{x\}; \\ R_a^2 = \{(q, a)\} \cup \{(p, z)/z \in (U \cup \{x\}) - \{a'\}\}, \text{ wobei } a \in U \text{ mit } v(a) \leq 4k-2 \text{ und} \\ a' \text{ derjenige Knotenpunkt von } G, \text{ für den } v(a') = v(a)+1 \text{ gilt.}$$

In sämtlichen auf diese Weise aus G entstehenden Graphen $G' \in \mathfrak{G}_{4(k+1)+1, 2k+1}^{\text{irr}}$ gilt $v'(x) = 4k+3$, $v'(y) = 2k+2$, $v'(p) = 2k$ und $v'(q) = 1$. Nachdem man in jedem Graphen $G \in \mathfrak{G}_{4k+1, 2k}^{\text{irr}}$ einen der Knotenpunkte der Valenz $2k$ (willkürlich) ausgezeichnet hat, sind die zugehörigen Abbildungen $\varphi_a^\mu: \mathfrak{G}_{4k+1, 2k}^{\text{irr}} \rightarrow \mathfrak{G}_{4(k+1)+1, 2k+1}^{\text{irr}}$ eindeutig. Entsprechend den im Beweis zum Lemma 2 angestellten Betrachtungen überlegt man sich unschwer, daß die Abbildungen φ_a^μ die Menge $\mathfrak{G}_{4k+1, 2k}^{\text{irr}}$ in eineindeutiger Weise auf paarweise disjunkte Teilmengen von $\mathfrak{G}_{4(k+1)+1, 2k+1}^{\text{irr}}$ abbilden. Die Zahl der oben angegebenen Abbildungen φ_a^μ beträgt $4k$.

Lemma 4. Für jedes $k \geq 1$ gilt

$$|\mathfrak{G}_{4(k+1)+1, 2(k+1)}^{\text{irr}}| \cong 2(8k-3) \cdot |\mathfrak{G}_{4k+1, 2k}^{\text{irr}}|.$$

BEWEIS. Es sei $G \in \mathfrak{G}_{4k+1, 2k}^{\text{irr}}$. Die drei Knotenpunkte der Valenz $2k$ werden willkürlich mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet. U sei die aus u_1 und sämtlichen Knotenpunkten größerer Valenz bestehende Menge, V die aus u_2 und u_3 sowie sämtlichen Knotenpunkten kleinerer Valenz gebildete Menge. Man adjungiere zu G vier Knotenpunkte x, y, p, q und sämtliche Kanten einer der nachstehenden $2(8k-3)$ Mengen; dabei sind der besseren Übersicht wegen die Abkürzungen $X = \{(x, z)/z \in U \cup V\}$, $Y = \{(y, z)/z \in U \cup \{x, u_2, u_3\}\}$ und $P = \{(p, z)/z \in U \cup \{x\}\}$ verwandt worden:

$$E_a^1 = X \cup (Y - \{(y, a)\}) \cup (P - \{(p, u_1)\}) \cup \{(p, y)\} \cup \{(q, a)\}, \text{ wobei } a \in U \cup \{x\} \text{ gilt;} \\ E_a^2 = X \cup (Y - \{(y, u_1)\}) \cup (P - \{(p, a)\}) \cup \{(p, y)\} \cup \{(q, a)\}, \text{ wobei } a \in (U - \{u_1\}) \cup \\ \cup \{x, y\} \text{ gilt;} \\ E_a^3 = X \cup (Y - \{(y, a')\}) \cup (P - \{(p, u_1)\}) \cup \{(p, y)\} \cup \{(q, a)\}, \text{ wobei } a \in U - \{u_1\} \\ \text{mit } v(a) \leq 4k-2 \text{ und } a' \text{ derjenige Knotenpunkt von } G, \text{ für den } v(a') = \\ = v(a)+1 \text{ gilt;}$$

$$\begin{aligned}
E_a^4 &= X \cup (Y - \{(y, u_1)\}) \cup (P - \{(p, a')\}) \cup \{(p, y)\} \cup \{(q, a)\}, \text{ wobei } a \in U - \{u_1\} \\
&\quad \text{mit } v(a) \leq 4k-2 \text{ und } a' \text{ derjenige Knotenpunkt von } G, \text{ für den } v(a') = \\
&\quad = v(a)+1 \text{ gilt;} \\
E_b^5 &= (X - \{(x, b)\}) \cup \{(x, q)\} \cup Y \cup (P - \{(p, u_1)\}) \cup \{(p, b)\}, \text{ wobei } b \in V - \{u_2, u_3\} \\
&\quad \text{gilt;} \\
E_b^6 &= (X - \{(x, b)\}) \cup \{(x, q)\} \cup (Y - \{(y, u_1)\}) \cup \{(y, b)\} \cup P, \text{ wobei } b \in V - \{u_2, u_3\} \\
&\quad \text{gilt;} \\
E_b^7 &= (X - \{(x, b')\}) \cup \{(x, q)\} \cup Y \cup (P - \{(p, u_1)\}) \cup \{(p, b)\}, \text{ wobei } b \in V \text{ mit} \\
&\quad v(b) \leq 2(k-1) \text{ und } b' \text{ derjenige Knotenpunkt von } G, \text{ für den } v(b') = \\
&\quad = v(b)+1 \text{ gilt}^3); \\
E_b^8 &= (X - \{(x, b')\}) \cup \{(x, q)\} \cup (Y - \{(y, u_1)\}) \cup \{(y, b)\} \cup P, \text{ wobei } b \in V \text{ mit} \\
&\quad v(b) \leq 2(k-1) \text{ und } b' \text{ derjenige Knotenpunkt von } G, \text{ für den } v(b') = \\
&\quad = v(b)+1 \text{ gilt}^3); \\
E_c^9 &= (X - \{(x, u_1)\}) \cup \{(x, c)\} \cup Y \cup (P - \{(p, c)\}) \cup \{(p, q)\}, \text{ wobei } c \in \{u_1, q\} \text{ gilt.}
\end{aligned}$$

In sämtlichen auf diese Weise aus G entstehenden Graphen $G' \in \mathfrak{G}_{4(k+1)+1, 2(k+1)}^{\text{irr}}$ gilt $v'(x) = 4k+3$, $v'(y) = 2k+3$, $v'(p) = 2k+1$ und $v'(q) = 1$. Nachdem man in jedem Graphen $G \in \mathfrak{G}_{4k+1, 2k}^{\text{irr}}$ einen der Knotenpunkte der Valenz $2k$ (willkürlich) als u_1 ausgezeichnet hat, sind die zugehörigen Abbildungen $\varphi_v^\mu: \mathfrak{G}_{4k+1, 2k}^{\text{irr}} \rightarrow \mathfrak{G}_{4(k+1)+1, 2(k+1)}^{\text{irr}}$ eindeutig. Entsprechend den im Beweis zum Lemma 2 angestellten Betrachtungen überlegt man sich unschwer, daß die Abbildungen φ_v^μ die Menge $\mathfrak{G}_{4k+1, 2k}^{\text{irr}}$ in eindeutiger Weise auf paarweise disjunkte Teilmengen von $\mathfrak{G}_{4(k+1)+1, 2(k+1)}^{\text{irr}}$ abbilden.

Bevor wir die Ergebnisse der vorangehenden vier Lemmata resümieren, erscheint es angebracht, einen kurzen Blick auf die einfachsten Klassen $\mathfrak{G}_{n,r}^{\text{irr}}$ zu werfen. In Abbildung 1 sind sämtliche irreduziblen Graphen der Klassen $\mathfrak{G}_5$ und $\mathfrak{G}_6$ dargestellt. Durch Nachprüfen überzeugt man sich sofort davon, daß für alle $e \in \{1, 2\}$ und alle r mit $0 \leq r \leq 3+e$ die Beziehung $|\mathfrak{G}_{4+e,r}^{\text{irr}}| = \hat{r} \cdot e^{\hat{r}-1}$ gilt, wobei

$$\hat{r} = \min(r, 4+e-1-r).$$

Die Abbildung 2 zeigt alle dreizehn nicht-isomorphen Graphen der Klasse $\mathfrak{G}_{9,2}^{\text{irr}}$; Lemma 2 garantiert dagegen lediglich die Existenz von sechs Graphen dieser Klasse.

Satz 2. Für jedes $k \geq 1$, jedes $e \in \{1, 2\}$ und jedes r mit $k \leq r \leq 3k+e-1$ gilt

$$|\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}| \cong \begin{cases} 2^{k-1} \prod_{v=1}^{k-1} (4v-1), & \text{falls } r = k \text{ oder } r = 3k+e-1; \\ 2^{k+1}(\hat{r}-k) \prod_{\mu=1}^{\hat{r}-k-1} (8\mu-3) \prod_{v=\hat{r}-k+1}^{k-1} (4v-1), & \text{falls } k < r < 2k \text{ oder} \\ & 2k+e-1 < r < 3k+e-1; \\ 2^k \prod_{\mu=1}^{k-1} (8\mu-3), & \text{falls } r = 2k \text{ oder } r = 2k+e-1. \end{cases}$$

Dabei bedeutet $\hat{r} = \min(r, 4k+e-1-r)$.

³⁾ Damit sich die Bedingung für $v(b)$ erfüllen läßt, ist die einschränkende Voraussetzung $k \geq 2$ erforderlich. Für die interessierende Zahl der verschiedenen Mengen E_v^μ bzw. der zugehörigen Abbildungen φ_v^μ ist diese Einschränkung jedoch wieder irrelevant.

BEWEIS. Die unteren Schranken für $|\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}}|$ ergeben sich aus den Lemmata 1, 2, 3 und 4 in Verbindung mit den für $|\mathfrak{G}_{5,1}^{\text{irr}}|$ und $|\mathfrak{G}_{5,2}^{\text{irr}}|$ ermittelten Werten sowie unter Benutzung des Übergangs zu den komplementären Graphen.

Korollar: Für jedes $k \geq 1$, jedes $e \in \{1, 2\}$ und jedes r mit $k \leq r \leq 3k + e - 1$ gilt $\mathfrak{G}_{4k+e,r}^{\text{irr}} \neq \emptyset$ ⁴⁾.

Die Korollare zu den beiden vorangehenden Sätzen lehren, daß $\mathfrak{G}_{n,r}^{\text{irr}} \neq \emptyset$ für $n \geq 3$ genau dann gilt, wenn $n \equiv e \pmod{4}$ mit $e \in \{1, 2\}$ und $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lfloor \frac{3n-1}{4} \right\rfloor$. Entsprechend gilt $\mathfrak{G}_{n,r}^{\text{irr}} \neq \emptyset$ für $r \geq 1$ genau dann, wenn $n \equiv e \pmod{4}$ mit $e \in \{1, 2\}$ und $4\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left(r - 3\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor\right)^2 + 3\left\lfloor \frac{1}{r} \right\rfloor + 1 \leq n \leq 4r + 2$.

Schließlich wollen wir noch die Gesamtheit der Graphen mit genau drei Knotenpunkten gleicher Valenz einer kurzen Betrachtung unterwerfen.

Satz 3. Die Mengen $\mathfrak{G}^{(r)}$ ($r \geq 0$) sind endlich.

BEWEIS. Durch vollständige Induktion nach r soll gezeigt werden, daß $\mathfrak{G}_{n,r} = \emptyset$ ($r \geq 0$) gilt für alle $n \geq 4(r+1)$. Der aus drei isolierten Knotenpunkten bestehende Graph ist der einzige Graph aus $\mathfrak{G}^{(0)}$, womit die Richtigkeit unserer Behauptung für den Fall $r=0$ nachgewiesen ist. Falls die Behauptung für $r-1$ mit $r \geq 1$ richtig ist, so ist sie es auch für r . Angenommen, es existiere in $\mathfrak{G}_{n,r}$ mit $n \geq 4(r+1)$ ein Graph G . Gemäß den Bemerkungen oben im Anschluß an das Korollar ist G nicht irreduzibel. Das heißt, in G existiert entweder ein Knotenpunkt x der Valenz 0 oder ein Knotenpunkt y der Valenz $n-1$. Damit muß $G - \{x\} \in \mathfrak{G}_{n-1,r}$ bzw. $G - \{y\} \in \mathfrak{G}_{n-1,r-1}$ gelten. Der letztere Fall ist durch die Induktionsvoraussetzung ausgeschlossen. Der Graph $G - \{x\}$ ist gemäß den bereits erwähnten obigen Bemerkungen nicht irreduzibel. Da $G - \{x\}$ ferner keinen isolierten Knotenpunkt enthalten kann, muß $G - \{x\}$ einen Knotenpunkt z der Valenz $n-2$ aufweisen. Das heißt, es muß $G - \{x, z\} \in \mathfrak{G}_{n-2,r-1}$ gelten, was jedoch der Induktionsvoraussetzung widerspricht.

Die im vorangehenden Beweis benutzte Aussage läßt sich ohne große Schwierigkeiten dahingehend verschärfen, daß $\mathfrak{G}_{n,r} \neq \emptyset$ für $r \geq 0$ genau dann gilt, wenn $r + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + (r+1)\left\lfloor \frac{2}{r+1} \right\rfloor + 1 \leq n \leq 4r + 3$. Entsprechend gilt $\mathfrak{G}_{n,r} \neq \emptyset$ für $n \geq 4$ genau dann, wenn $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lfloor \frac{3n-1}{4} \right\rfloor$.

Es mögen $\mathfrak{G}_{n,r}^{(0)}$ und $\mathfrak{G}_{n,r}^{(n-1)}$ die Teilmengen der Graphen aus $\mathfrak{G}_{n,r}$ mit (mindestens) einem Knotenpunkt der Valenz 0 bzw. der Valenz $n-1$ bedeuten.

Lemma 5. Für jedes $n \geq 3$ und jedes $r \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} |\mathfrak{G}_{n+1,r+1}| &= |\mathfrak{G}_{n+1,r+1}^{\text{irr}}| + |\mathfrak{G}_{n,r+1}| + |\mathfrak{G}_{n,r}| - |\mathfrak{G}_{n,r+1}^{(0)}| - |\mathfrak{G}_{n,r}^{(n-1)}|, \\ |\mathfrak{G}_{n+1,r}^{(0)}| &= |\mathfrak{G}_{n,r}| - |\mathfrak{G}_{n,r}^{(0)}|, \\ |\mathfrak{G}_{n+1,r+1}^{(n)}| &= |\mathfrak{G}_{n,r}| - |\mathfrak{G}_{n,r}^{(n-1)}|. \end{aligned}$$

⁴⁾ Diese Aussage läßt sich auch, wenngleich mit einigem Rechenaufwand, als Spezialfall aus dem in der Fußnote 2 zitierten Satz von Erdős und Gallai ableiten.

Die Anfangswerte sind:

$$|\mathfrak{G}_{3,r}| = 0 \text{ für } r = 1 \text{ und } r \geq 3, \quad |\mathfrak{G}_{3,r}| = 1 \text{ für } r \in \{0, 2\};$$

$$|\mathfrak{G}_{3,r}^{(0)}| = 1 \text{ für } r = 0 \quad |\mathfrak{G}_{3,r}^{(0)}| = 0 \text{ für } r \geq 1;$$

$$|\mathfrak{G}_{3,r}^{(2)}| = 0 \text{ für } r \in \{0, 1\} \text{ und } r \geq 3, \quad |\mathfrak{G}_{3,r}^{(2)}| = 1 \text{ für } r = 2.$$

BEWEIS. Für jedes $n \geq 3$ und jedes $r \geq 0$ gilt offensichtlich

$$|\mathfrak{G}_{n,r}| = |\mathfrak{G}_{n,r}^{\text{irr}}| + |\mathfrak{G}_{n,r}^{(0)}| + |\mathfrak{G}_{n,r}^{(n-1)}|.$$

Ferner ist jedem Graphen aus $\mathfrak{G}_{n+1,r}^{(0)}$ mit $n \geq 3$ eindeutig ein Graph aus $\mathfrak{G}_{n,r} - \mathfrak{G}_{n,r}^{(0)}$ zugeordnet, und umgekehrt kann man jedem Graphen aus $\mathfrak{G}_{n,r} - \mathfrak{G}_{n,r}^{(0)}$ durch Adjunktion eines (isolierten) Knotenpunktes eindeutig einen Graphen aus $\mathfrak{G}_{n+1,r}^{(0)}$ zuordnen. Das heißt, es gilt die zweite Rekursionsgleichung. Entsprechend ergibt sich die dritte Rekursionsgleichung. Durch Einsetzen dieser beiden Rekursionsbeziehungen in die obige Gleichung erhält man schließlich die erste Rekursionsgleichung.

Aus der Gleichung im voranstehenden Beweis und der zweiten Rekursionsbeziehung des Lemmas 5 folgt durch Summation über n und darauffolgende Substitution die Beziehung $|\mathfrak{G}^{(r)}| \equiv |\mathfrak{G}_{3,r}^{(0)}| \pmod{2}$. Damit ergibt sich der

Satz 4. Für jedes $r \geq 1$ gilt $|\mathfrak{G}^{(r)}| \equiv 0 \pmod{2}$.

Hiernach sind wir in der Lage, eine Antwort auf folgende Frage zu geben: Unter welchen Bedingungen lassen sich die Glieder einer vorgegebenen Folge nicht-negativer ganzer Zahlen $s_1, \dots, s_n$ mit $n \geq 3$, die bis auf drei übereinstimmende sämtlich paarweise verschieden sind, als die Valenzen der Knotenpunkte eines schlichten Graphen mit n Knotenpunkten repräsentieren?⁵⁾

Angenommen, es sei $s_1 \leq \dots \leq s_n$ die Folge der Valenzen eines Graphen $G \in \mathfrak{G}_{n,r}$. Dann gilt notwendigerweise $0 \leq s_1 \leq 2$ und $n-3 \leq s_n \leq n-1$. Betrachten wir zunächst seiner Sonderstellung wegen den Fall $n=3$. Für ihn muß $s_1 + s_2 + s_3 = 3r$ geradzahlig sein, also $r=0$ oder $r=2$ gelten. Für $n \geq 4$ sind folgende drei Fälle denkbar: (I) $s_1=1$ und $s_n = n-2$, (II) $s_n = n-1$, (III) $s_1=0$. Im Falle (I) ist der Graph G irreduzibel. Das heißt, es muß, wie oben dargelegt, $n \equiv e \pmod{4}$ mit $e \in \{1, 2\}$ und $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lceil \frac{3n-1}{4} \right\rceil$ gelten. In den Fällen (II) und (III) kommt genau eine natürliche Zahl l mit $1 \leq l \leq n-2$ nicht unter den Valenzen von G vor. In beiden Fällen ist der Graph G reduzibel; d.h., er läßt sich sukzessive abbauen. Im Falle (II) streicht man zunächst den Knotenpunkt maximaler Valenz einschließlich sämtlicher mit ihm inzidenten Kanten; im entstehenden Graphen streicht man gegebenenfalls den isolierten Knotenpunkt, im dadurch entstehenden Graphen wiederum den mit allen übrigen Knotenpunkten verbundenen Knotenpunkt, etc. Für diese Betrachtung erscheint eine weitere Fallunterscheidung zweckmäßig:

a) $l > r+1$. Dann muß $r \geq n-l$ gelten. Denn andernfalls entstünde aus G durch $(2r-1)$ -malige Reduktion ein Graph aus $\mathfrak{G}_{n-2r+1,0}$. Wegen $n-2r+1 \geq l-r+2 \geq 4$ gilt jedoch $\mathfrak{G}_{n-2r+1} = \emptyset$. Nachdem man $2(n-l-1)$ -mal abwechselnd

⁵⁾ Dieses Problem ließe sich prinzipiell auch als Spezialfall des in der Fußnote 2 zitierten Satzes von Erdős und Gallai behandeln. Im Vergleich zu dem hier gewählten Vorgehen erscheint dieser Weg jedoch ausgesprochen mühsam und unzweckmäßig.

den Knotenpunkt maximaler Valenz bzw. den isolierten Knotenpunkt gestrichen hat, entsteht aus G ein Graph aus $\mathfrak{G}_{2(l+1)-n, r+l+1-n}^{\text{irr}}$. Das heißt, es muß $n \equiv 2l + e - 1 \pmod{4}$ mit $e \in \{1, 2\}$ und $\left\lfloor \frac{3n-2(l+1)}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lfloor \frac{n+2l+1}{4} \right\rfloor$ gelten. Darüber hinaus gilt $n \geq 7$, da $2(l+1)-n \geq 5$ und $n-l-1 \geq 1$.

b) $l = r+1$. Dann muß $2r-3 \leq n \leq 2r+2$ gelten. Denn wäre $n \geq 2r+3$, so entstünde durch $(2r-1)$ -malige Reduktion aus G ein Graph aus $\mathfrak{G}_{n-2r+1, 0}$. Wegen $n-2r+1 \geq 4$ gilt jedoch $\mathfrak{G}_{n-2r+1, 0} = \emptyset$. Wäre $n \leq 2r-4$, so entstünde durch $2(n-r-2)$ -malige Reduktion aus G ein Graph aus $\mathfrak{G}_{2r-n+4, 2r-n+2}$. Wegen $2r-n+2 \geq 6$ folgt jedoch aus den Bemerkungen im Anschluß an Satz 3, daß $\mathfrak{G}_{2r-n+4, 2r-n+2} = \emptyset$ gilt. — Die Fälle $n = 2r+1$, $n = 2r$ und $n = 2r-3$ würden bei dem Reduktionsprozeß auf Graphen mit den Valenzen 1, 1, 1 bzw. 1, 2, 2, 2 bzw. 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5 führen. Dies widerspräche jedoch der Tatsache, daß $\mathfrak{G}_{3,1} = \emptyset$ gilt und weder $\mathfrak{G}_4$ noch $\mathfrak{G}_7$ irreduzible Graphen enthalten. Folglich muß $n = 2r-2$, $n = 2r-1$ oder $n = 2r+2$ gelten. Diese letzteren Fälle führen bei der Reduktion von G zu dem Graphen G' aus $\mathfrak{G}_{6,4}^{\text{irr}}$, $\mathfrak{G}_{5,3}^{\text{irr}}$ bzw. $\mathfrak{G}_{3,0}$, womit zugleich ersichtlich ist, daß $n \geq 8$, $n \geq 7$ bzw. $n \geq 4$ gelten muß.

c) $l = r-1$. Dann muß $2r-1 \leq n \leq 2r+4$ gelten. Denn wäre $n \leq 2r-2$, so entstünde aus G durch $2(n-r-1)$ -malige Reduktion ein Graph aus $\mathfrak{G}_{2r-n+2, 2r-n+1}$, während wegen $2r-n+2 \geq 4$ jedoch $\mathfrak{G}_{2r-n+2, 2r-n+1} = \emptyset$ gilt. Wäre $n \geq 2r+5$, so entstünde durch $[2(r-2)+1]$ -malige Reduktion aus G ein Graph aus $\mathfrak{G}_{n-2r+3, 1}$, während gemäß den Bemerkungen im Anschluß an den Satz 3 $\mathfrak{G}_{n-2r+3, 1} = \emptyset$ gilt. — Die Fälle $n = 2r$, $n = 2r+1$ und $n = 2r+4$ würden bei dem Reduktionsprozeß auf Graphen mit den Valenzen 1, 1, 1 bzw. 1, 1, 1, 2 bzw. 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5 führen. Doch aus denselben Gründen wie oben im Fall b) existieren keine derartigen Graphen. Folglich muß $n = 2r-1$, $n = 2r+2$ oder $n = 2r+3$ gelten. Diese letzteren Fälle führen bei der Reduktion von G zu dem Graphen G' aus $\mathfrak{G}_{3,2}$, $\mathfrak{G}_{5,1}^{\text{irr}}$ bzw. $\mathfrak{G}_{6,1}^{\text{irr}}$, womit zugleich ersichtlich ist, daß $n \geq 5$, $n \geq 6$ bzw. $n \geq 7$ gelten muß.

d) $l < r-1$. Dann muß $r \leq n-l-1$ gelten. Denn andernfalls entstünde aus G durch $2(n-r-1)$ -malige Reduktion ein Graph aus $\mathfrak{G}_{2r-n+2, 2r-n+1}$. Wegen $2r-n+2 \geq r-l+2 \geq 4$ gilt jedoch $\mathfrak{G}_{2r-n+2, 2r-n+1} = \emptyset$. Nachdem man $[2(l-1)+1]$ -mal abwechselnd den Knotenpunkt maximaler Valenz bzw. den isolierten Knotenpunkt gestrichen hat, entsteht ein irreduzibler Graph aus $\mathfrak{G}_{n-2l+1, r-l}$. Das heißt, es muß $n \equiv 2l+e-1 \pmod{4}$ mit $e \in \{1, 2\}$ und $\left\lfloor \frac{n+2l+1}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lfloor \frac{3n-2l+2}{4} \right\rfloor$ gelten. Darüber hinaus gilt $n \geq 6$, da $n \geq 2l+4$ und $l \geq 1$.

Im Falle (III) streicht man den isolierten Knotenpunkt. Dadurch entsteht ein Graph $\hat{G} \in \mathfrak{G}_{n-1, r}$. Falls $n=4$, so muß $r=2$ gelten. Gilt $s_n = n-3$, so ist der Graph $\hat{G}$ irreduzibel; d.h., es muß $n \equiv e+1 \pmod{4}$ mit $e \in \{1, 2\}$ und $\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor - 1$ gelten. Falls schließlich $s_n = n-2$ gilt ($n \geq 5$), so reduziert sich das Problem auf den Fall (II):

a) $l > r+1$. Dann muß $n \equiv 2l+e \pmod{4}$ mit $e \in \{1, 2\}$ und $\left\lfloor \frac{3n-2l-1}{4} \right\rfloor - 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n+2l}{4} \right\rfloor$ gelten. Darüber hinaus gilt $n \geq 8$. *

b) $l = r + 1$. Dann muß $n = 2r - 1$, $n = 2r$ oder $n = 2r + 3$ gelten und $n \geq 9$, $n \geq 8$ bzw. $n \geq 5$.

c) $l = r - 1$. Dann muß $n = 2r$, $n = 2r + 3$ oder $n = 2r + 4$ gelten und $n \geq 6$, $n \geq 7$ bzw. $n \geq 8$.

d) $l < r - 1$. Dann muß $n \equiv 2l + e \pmod{4}$ mit $e \in \{1, 2\}$ und $\left\lfloor \frac{n + 2l}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lfloor \frac{3n - 2l - 1}{4} \right\rfloor$ gelten. Darüber hinaus gilt $n \geq 7$.

Nach diesen Ausführungen bedarf es keiner prinzipiell neuen Überlegungen, um nachzuweisen, daß sämtliche in der voranstehenden Analyse gefundenen Folgen $s_1, \dots, s_n$ sich auch tatsächlich als die Valenzen eines Graphen aus $\mathfrak{G}_n$ realisieren lassen. Damit darf der nachfolgende Satz als bewiesen betrachtet werden:

Satz 5. Zu einer Folge $s_1, \dots, s_n$ mit $s_i \equiv 0 \pmod{1}$, $0 \leq s_i \leq n - 1$, $s_i < s_{i+1}$ für $i \leq i_0 - 1$ sowie für $i \geq i_0 + 2$ und $s_{i_0} = s_{i_0+1} = s_{i_0+2} = r$, wobei $i_0 \in \{0, \dots, n - 2\}$, existiert genau dann ein schlichter Graph mit n Knotenpunkten und den Valenzen s_i ($1 \leq i \leq n$), wenn eine der nachstehenden sechzehn Bedingungen erfüllt ist. Dabei gilt $e \in \{1, 2\}$ und $l = \min \{x/x \in \mathbb{N} \wedge \forall i (1 \leq i \leq n \Rightarrow x \neq s_i)\}$.⁶⁾

(1) $n = 3$ und $r = 0$ oder $r = 2$;

(2) $s_1 = 1$ und $s_n = n - 2$, $n \geq 5$ und $n \equiv e \pmod{4}$ und $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lfloor \frac{3n - 1}{4} \right\rfloor$;

(3) $s_n = n - 1$, $l > r + 1$, $n \geq 7$ und $n \equiv 2l + e - 1 \pmod{4}$,

$$\left\lfloor \frac{3n - 2l - 2}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lfloor \frac{n + 2l + 1}{4} \right\rfloor;$$

(4) $s_n = n - 1$, $l = r + 1$, $n \geq 4$ und $r = \frac{n - 2}{2}$;

(5) $s_n = n - 1$, $l = r + 1$, $n \geq 6 + e$ und $r = \frac{n + e}{2}$;

(6) $s_n = n - 1$, $l = r - 1$, $n \geq 5$ und $r = \frac{n + 1}{2}$;

(7) $s_n = n - 1$, $l = r - 1$, $n \geq 5 + e$ und $r = \frac{n - e - 1}{2}$;

(8) $s_n = n - 1$, $l < r - 1$, $n \geq 6$ und $n \equiv 2l + e - 1 \pmod{4}$,

$$\left\lfloor \frac{n + 2l + 1}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lfloor \frac{3n - 2l + 2}{4} \right\rfloor;$$

(9) $s_1 = 0$, $n = 4$ und $r = 2$;

⁶⁾ $\mathbb{N}$ bedeutet die Menge der natürlichen Zahlen.

$$(10) \quad s_1 = 0, \quad n \geq 6 \text{ und } n \equiv e+1 \pmod{4} \text{ und } \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor - 1;$$

$$(11) \quad s_1 = 0, \quad l > r+1, \quad n \geq 8 \text{ und } n \equiv 2l+e \pmod{4},$$

$$\left\lfloor \frac{3n-2l-1}{4} \right\rfloor - 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{n+2l}{4} \right\rfloor;$$

$$(12) \quad s_1 = 0, \quad l = r+1, \quad n \geq 5 \text{ und } r = \frac{n-3}{2};$$

$$(13) \quad s_1 = 0, \quad l = r+1, \quad n \geq 7+e \text{ und } r = \frac{n+e-1}{2};$$

$$(14) \quad s_1 = 0, \quad l = r-1, \quad n \geq 6 \text{ und } r = \frac{n}{2};$$

$$(15) \quad s_1 = 0, \quad l = r-1, \quad n \geq 6+e \text{ und } r = \frac{n-e}{2} - 1;$$

$$(16) \quad s_1 = 0, \quad l < r-1, \quad n \geq 7 \text{ und } n \equiv 2l+e \pmod{4},$$

$$\left\lfloor \frac{n+2l}{4} \right\rfloor \leq r \leq \left\lfloor \frac{3n-2l-1}{4} \right\rfloor.$$

Literatur

- [1] M. BEHZAD and G. CHARTRAND, No graph is perfect. *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 962—963.
- [2] P. ERDŐS és T. GALLAI, Gráfok előírt fokú pontokkal. *Mat. Lapok* **11** (1960), 264—274.
- [3] F. HARARY, Graph Theory. *Reading, Mass.*, (1969), p. 59.

(Eingegangen am 30 März 1972.)