

## Zur Zerlegung artinscher Ringe

Von ALFRED WIDIGER (Halle)

**1.** Ist ein artinscher Ring  $R$ , d.h. ein assoziativer Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale, die direkte Summe zweier Ideale  $R_1$  und  $R_2$ , so sind natürlich  $R_1$  und  $R_2$  selbst artinsche Ringe. Die vorliegende kurze Arbeit befaßt sich mit der folgenden Fragestellung: Inwieweit ist die Eigenschaft eines Ideales  $I$  eines artinschen Ringes  $R$ , artinsch zu sein, hinreichend dafür, daß  $I$  selbst oder wenigstens ein „nur wenig größeres“ Ideal ein direkter Summand von  $R$  ist.

Das Hauptergebnis von [3], nämlich der Satz 3, zeigt, daß ein solches „wenig größeres“ Ideal direkter Summand von  $R$  ist, wenn  $I$  das Radikal von  $R$  bedeutet.

Wir stellen die in der Arbeit benutzten Bezeichnungen kurz zusammen.  $\oplus$  und  $\sum^\oplus$  bezeichnen gruppentheoretische,  $\boxplus$  und  $\sum^\boxplus$  ringtheoretische direkte Summen. Für einen beliebigen Ring  $R$  ist  $(R, +)$  die additive Gruppe von  $R$  und  $R_n$  der Ring aller  $n$ -reihigen quadratischen Matrizen über  $R$ .  $J(R)$  sei das Jacobson-Radikal von  $R$ .

Ein Ring heißt primär, wenn er ein Einselement besitzt, und wenn  $R/J(R)$  ein voller Matrizenring über einem Schiefkörper ist. Der Ring  $R$  mit Einselement wird vollständig primär genannt, falls  $R/J(R)$  ein Schiefkörper ist.

**2.** Den folgenden einfachen Sachverhalt formulieren wir als

**Satz 1.** *Es sei  $R$  ein artinscher Ring. Ist  $I$  ein Ideal von  $R$ , und ist  $I$  selbst artinscher Ring mit  $I \cap J(R) = (0)$ , so ist  $I$  direkter Summand von  $R$ .*

**BEWEIS.** Wegen  $J(I) = I \cap J(R) = (0)$  ist  $I$  radikalfrei und artinsch. Also kann man schreiben:

$$I = e_1 I e_1 \boxplus \dots \boxplus e_k I e_k = e_1 R e_1 \boxplus \dots \boxplus e_k R e_k,$$

wobei die  $e_i$  orthogonale Idempotente von  $I$  (und damit von  $R$ ) sind und die  $e_i R e_i$  einfache Ringe.  $\bar{I}$ , das Bild von  $I$  bei  $R \rightarrow \bar{R} = R/J(R)$  ist direkter Summand von  $\bar{R}$ , so daß man schreiben kann:

$$\bar{R} = \bar{e}_1 \bar{R} \bar{e}_1 \boxplus \dots \boxplus \bar{e}_k \bar{R} \bar{e}_k \boxplus \bar{u}_{k+1} \bar{R} \bar{u}_{k+1} \boxplus \dots \boxplus \bar{u}_n \bar{R} \bar{u}_n,$$

wobei die  $\bar{e}_i, \bar{u}_j$  ( $i=1, \dots, k; j=k+1, \dots, n$ ) orthogonale Idempotente von  $\bar{R}$  sind, und die  $\bar{u}_j \bar{R} \bar{u}_j$  ( $j=k+1, \dots, n$ ) ebenfalls einfach sind. Dann gibt es entsprechend dem Beweis von Prop. 5 auf Seite 54 von [1] die orthogonalen Idempotente  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  von  $R$ , so daß  $\bar{e}_j = \bar{u}_j$  für  $j=k+1, \dots, n$ .

Die zweiseitige Peircesche Zerlegung von  $R$  bezüglich der orthogonalen Idempotente  $e_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , liefert nach [1], Seite 56 eine Zerlegung von  $R$ :

$$R = e_1 R e_1 \oplus \dots \oplus e_n R e_n \oplus N,$$

mit  $N \subseteq J(R)$ . Das heißt

$$R = I \oplus e_{k+1} R e_{k+1} \oplus \dots \oplus e_n R e_n \oplus N.$$

Da  $NI, IN \subseteq I \cap J(R) = (O)$ , genügt es nun zu zeigen, daß  $e_{k+1} R e_{k+1} \oplus \dots \oplus e_n R e_n \oplus N$  ein Unterring von  $R$  ist. Hiervon überzeugt man sich durch Nachrechnen sofort, wenn beachtet, daß  $J(R) \cap I = (O)$  ist.

**Satz 2.** Es sei  $R$  ein artinscher Ring und  $I$  ein Ideal von  $R$  mit der Eigenschaft, daß  $I$  selbst artinscher Ring ist und daß  $I \supseteq J(R)$ . Dann gibt es ein Ideal  $I^*$  von  $R$ , so daß

$$R = \sum_{k=1}^t \oplus S_{n_k}^{(k)} \oplus I^*.$$

wobei  $I^* \supseteq I$ ,  $I^*/I$  endlich,  $S_{n_k}^{(l)} S_{n_l}^{(l)} = (O)$  für alle  $k, l=1, \dots, t$  und  $k \neq l$  und  $I^* S_{n_k}^{(k)} = (O)$  für alle  $k=1, \dots, t$ . Dabei sind die  $S^{(k)}$  Schiefkörper.

**BEWEIS.** Nach [1] (S. 56, Theorem 2) existiert für  $R$  eine gruppentheoretische direkte Zerlegung:

$$R = e_1 R e_1 \oplus \dots \oplus e_n R e_n \oplus N,$$

wobei  $e_1, \dots, e_n$  orthogonale Idempotente von  $R$ ,  $e_i R e_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) primäre Ringe sind, und  $N$  eine Untergruppe von  $(J(R), +)$  ist. Die  $e_i R e_i$  sind artinsche Ringe. Es gilt  $J(e_i R e_i) = e_i J(R) e_i$  (siehe [2], S. 157).  $e_i I e_i$  ist Ideal von  $e_i R e_i$  und aus  $I \supseteq J(R)$  folgt  $e_i I e_i \supseteq J(e_i R e_i)$ . Da  $e_i R e_i / J(e_i R e_i)$  einfach ist, folgt  $e_i I e_i = e_i R e_i$ , d.h.  $e_i R e_i \subseteq I$ , oder  $e_i I e_i = e_i J(R) e_i$ . Wir schreiben

$$(1) \quad R = e_1 R e_1 \oplus \dots \oplus e_t R e_t \oplus I^*,$$

wobei wir so numeriert haben, daß  $e_i R e_i \not\subseteq I$  und die Faktorringe  $e_i R e_i / J(e_i R e_i)$  unendlich sind für  $i=1, \dots, t$ . Dann gilt

$$(2) \quad e_i R e_i \cap I = e_i I e_i = J(e_i R e_i) \subseteq J(R)$$

für  $i=1, \dots, t$ .

Wir zeigen  $J(R) e_i R e_i = (O)$ : Es sei  $m$  der Nilpotenzgrad von  $J(R)$ . Wir nehmen an  $b \in J(R)^{m-k}$  und beweisen  $b e_i R e_i = (O)$  durch Induktion nach  $k$ .

Für  $k=0$  ist die Behauptung richtig. Die Induktionsvoraussetzung besagt  $J^{m-k} R^{(i)} = (O)$ , wobei mit  $R^{(i)}$  der Ring  $e_i R e_i$  gemeint ist. Weiter sei  $J(R^{(i)}) = J^{(i)}$  gesetzt.  $R^{(i)} / J^{(i)}$  ist voller Matrizenring über einem Schiefkörper  $\bar{S}^{(i)}$  mit dem Einselement  $\bar{e}_i$ . Der Ring  $R^{(i)} / J^{(i)}$  besitzt einen zu  $\bar{S}^{(i)}$  isomorphen Unterschiefkörper  $\bar{K}^{(i)}$ , der unendlich ist und dessen Einselement genau  $\bar{e}_i$  ist. In  $(\bar{K}^{(i)}, +)$  gibt es eine streng absteigende unendliche Kette von Untergruppen

$$\bar{U}_1 \supset \bar{U}_2 \supset \dots$$

Die vollständigen Urbilder von  $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots$  seien  $U_1, U_2, \dots$ . Nun wählen wir  $b \in J^{m-k-1}$ . Angenommen, es gälte  $b R^{(i)} \neq (O)$ . Dann folgte, daß

$$b U_1 + J^{m-k} \supset b U_2 + J^{m-k} \supset \dots$$

eine streng absteigende Kette von Untergruppen wäre. Denn wäre etwa  $bu_1 = bu_2 + r$  ( $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, r \in J^{m-k}$ ) für solche  $u_1, u_2$  mit  $u_1 - u_2 \notin J^{(i)}$ , so folgte wegen der Existenz eines  $(u_1 - u_2)^*$  mit  $(u_1 - u_2)(u_1 - u_2)^* = e_i + a$  mit  $a \in J^{(i)}$

$$be_i + ba = r(u_1 - u_2)^*.$$

Die rechte Seite ist gleich Null, da nach Induktionsvoraussetzung  $J^{m-k}R^{(i)} = (0)$  ist. Weiter ist  $ba \in J^{m-k-1}J^{(i)} \subseteq J^{m-k}$ . Da  $a \in J^{(i)}$ , ist  $bae_i = ba \in J^{m-k}e_i = (0)$  wieder nach Induktionsvoraussetzung. Also folgte  $be_i = 0$ , im Widerspruch zur Annahme. Die  $bU_l + J^{m-k}$  ( $l=1, 2, \dots$ ) sind aber sogar Rechtsideale von  $I$ , weil

$$(bU_l + J^{m-k})I \subseteq J^{m-k} \subseteq bU_l + J^{m-k}$$

wegen (2) richtig ist. Das wäre ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß  $I$  artinsch ist. Damit ist gezeigt:

$$JR^{(i)} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, t.$$

Das bedeutet insbesondere  $e_i J e_i R^{(i)} = e_i J e_i = (0)$ , das heißt, die Ringe  $e_i R e_i$ ,  $i=1, \dots, t$ , sind radikalfrei, also volle Matrizenringe über Schiefkörpern  $S^{(i)}$ . Also gilt auch  $I^* \supseteq I$ ,  $I^*/I$  endlich. Der Beweis von Satz 2 ist erbracht, wenn gezeigt wird, daß  $I^*$  ein Ideal von  $R$  ist. Es seien

$$I^* \ni s = s_{t+1} + \dots + s_n + b_s$$

$$R \ni u = u_1 + \dots + u_n + b_u$$

in der Darstellung (1).

$$us = (u_{t+1}s_{t+1} + \dots + u_ns_n) + (ub_s + b_us - b_ub_s).$$

Das Element in der ersten Klammer gehört zu  $I^*$ , das in der zweiten zu  $J \subseteq I^*$ . Der gleiche Schluß für  $su$  liefert die Behauptung.

**Satz 3.** Es sei  $R$  ein artinscher Ring und  $I$  ein Ideal von  $R$  mit der Eigenschaft, daß  $I$  rechts- und linksartinscher Ring sei und daß  $I \supseteq J(R)$ . Dann gibt es ein Ideal  $I^*$  von  $R$ , so daß

$$R = \sum_{k=1}^t \overline{I+} S_{n_k}^{(k)} \boxplus I^*,$$

wobei  $I^* \supseteq I$ ,  $I^*/I$  endlich ist, und die  $S^{(k)}$  Schiefkörper sind.

Wegen Satz 2 gibt es nichts zu beweisen.

Die Bedingung, daß  $I$  rechts- und linksartinsch ist, ist nicht überflüssig. Zum Beispiel ist der Ring

$$R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

mit einem unendlichen Körper  $K$  artinsch. Das Ideal

$$I = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

ist artinsch, aber nicht linksartinsch, und der Ring  $R$  zerfällt nicht entsprechend Satz 3.

Wird das Radikal  $J(R)$  eines artinschen Ringes  $R$  als artinsch vorausgesetzt, so folgt schon aus der Nilpotenz von  $J(R)$ , daß  $J(R)$  auch linksartinsch ist ( $(J(R), +)$  genügt sogar der Minimalbedingung für Untergruppen), so daß Satz 3 gilt. Dieser Fall liefert also in der Tat das Hauptergebnis von [3].

### Literatur

- [1] N. JACOBSON, Structure of rings. *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications*, 37, Providence 1956.
- [2] A. KERTÉSZ, Vorlesungen über artinsche Ringe. Akadémiai Kiadó, Budapest Leipzig 1968.
- [3] A. KERTÉSZ, und A. WIDIGER, Artinsche Ringe mit artinschem Radikal. *J. Reine Angew. Math.* **242** (1970), 8—15.

(Eingegangen am 19. Mai 1973.)