

**Vom Parallelenpostulat unabhängige Konstruktionen
mit Hilfe eines Lineals mit zwei Kanten,
von denen die eine eine Gerade ist, von der jeder Punkt der anderen
gleich weit absteht**

Von J. STROMMER (Budapest)

Herrn Professor A. Rapcsák zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Im Jahre 1890 hat A. ADLER¹⁾ bewiesen, daß alle bestimmten Aufgaben der euklidischen Geometrie, die mit dem Lineal und der Zirkel lösbar sind, allein mit Hilfe des Lineals mit zwei parallelen Kanten gelöst werden können.

Später hat A. S. SMOGORSCHESKIJ²⁾ gezeigt, daß man alle Konstruktionsaufgaben der Bolyai—Lobatschewskijschen Geometrie, die man gewöhnlich mit Zirkel und Lineal ausführt, mittels des Lineals und eines Instrumentes, welches das Ziehen von Linien, deren Punkte von einer schon gezeichneten Geraden einen ganz bestimmten Abstand haben, streng lösen kann.

Aus diesem Ergebnis entnimmt man, daß sich dieselben Aufgaben mit Hilfe eines Lineals mit zwei Kanten, von denen die eine eine gerade Linie ist, von der alle Punkte der anderen gleichen Abstand haben, ausführen lassen.

Bei der Gültigkeit des euklidischen Parallelenpostulates stimmt das zuletzt genannte Instrument mit dem Parallellineal überein, da ja die Linie gleichen Abstands von einer Geraden im euklidischen System eine zu ihr parallele Gerade ist.

Es liegt nun der Gedanke nahe, zu untersuchen, ob sich nicht allein mit einem solchen Lineal (eine Abstandslinie und ihre Grundlinie) ohne jede Annahme über das Schneiden oder Nichtschneiden der Geraden alle geometrischen Konstruktionsaufgaben, die mit Zirkel und Lineal lösbar sind, ausführen lassen.

Der Ausführung dieses Gedankes ist die vorliegende Note gewidmet. Als Resultat wird sich ergeben, daß *jede geometrische Konstruktionsaufgabe auch in der absoluten Geometrie mit Hilfe eines Lineals mit zwei Kanten gelöst werden kann.*

¹⁾ Über die zur Ausführung geometrischer Konstruktionen notwendigen Hilfsmittel, *S.-B. Akad. Wien* 99 (1890), Abt. II a, S. 846—859, insbesondere S. 850—853; ferner ders., Theorie der geometrischen Konstruktionen (Sammlung Schubert LII), *Leipzig* 1906, S. 126—130.

²⁾ Siehe dessen Aufsatz: Geometrische Konstruktionen in dem Lobatschewskijschen Raum, der in russischer Sprache geschrieben ist und in der zur Erinnerung an das fünfzigjährige Bestehen des polytechn. Instituts in Kiew herausgegebenen Sammlung gelehrter Abhandlungen 1948 veröffentlicht wurde. — Man sehe auch das ebenfalls in russischer Sprache geschriebene Werk von demselben Verfasser: Geometrische Konstruktionen in der Lobatschewskijschen Ebene (Die Lobatschewskijsche Geometrie und die Entwicklung ihrer Ideen, Bd. III), *Moskau—Leningrad* 1951, § 30, S. 106—109.

Wir erwähnen noch, daß die unmittelbarste Benutzungsart des Lineals mit zwei Kanten, die in der Ziehung eines Bogens der Abstandslinie, welche von einer gegebenen Geraden den konstanten Abstand gleich der Breite des Lineals hat, nur die Lösung derjenigen Aufgaben liefert, welche man mit Hilfe des Lineals und des Eichmaßes lösen kann. Um jede Aufgabe zu lösen, die mit dem Zirkel und Lineal lösbar sind, ist die kompliziertere Benutzungsart nötig,³⁾ die darin besteht, das Lineal so zu legen, daß jede seiner beiden Kanten durch einen von zwei Punkten geht, dessen Entfernung größer als die Breite des Lineals oder ihr gleich ist, und die dadurch bestimmte Gerade zu ziehen.

2. Um den obigen Satz zu beweisen, sind einige Bemerkungen wichtig, die wir jetzt geben wollen:

In einer Arbeit⁴⁾ des Verfassers wurde auf Grund der ebenen Axiome I—III des von HILBERT in seiner Festschrift „Grundlagen der Geometrie“ aufgestellten Systems unter Hinzuziehung des Axioms über das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden der Satz bewiesen, daß die aus irgendeinem äußeren Punkt der gemeinsamen Sekante zweier sich schneidenden Kreise an dieselben gelegten Tangenten untereinander gleich sind; es wurde daselbst mittels der genannten Axiome, d.h. in der Ebene und unabhängig vom Parallelenaxiom auch der Satz bewiesen, daß sich zwei Kreise, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Radien ist, in zwei Punkten schneiden, so daß dieser Satz im folgenden nicht als Axiom hingestellt werden soll.

In einer zweiten Arbeit⁵⁾ wurde mit Hilfe der obigen Axiome folgender allgemeinere Satz bewiesen: Wenn zwei Zyklen zwei Punkte gemein haben, so sind die Tangenten aus irgendeinem Punkte der gemeinsamen Sekante an die beiden gegebenen Zyklen einander gleich.

Es sei nun ABC (Fig. 1) ein beliebiges Dreieck, in welchem $AC > CB$ ist, und D der Fußpunkt der von der Spitze C gefällten Höhe. Man schlage um C einen Kreis

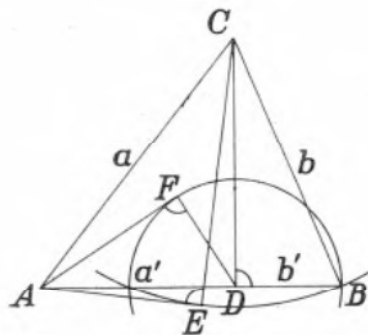


Fig. 1

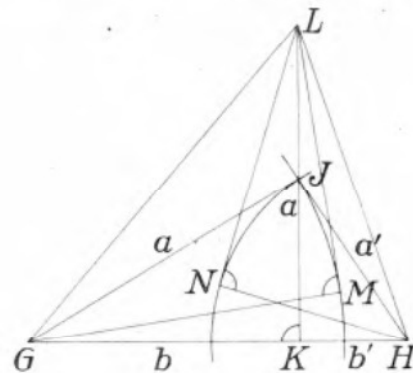


Fig. 2

³⁾ Vgl. hierüber z. B. F. ENRIQUES, Fragen der Elementargeometrie II. Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit, deutsch von H. FLEISCHER, Leipzig 1907, Art. IV, § 13, S. 135—136.

⁴⁾ Über die Kreisaxiome, *Per. Math. Hung.* 4 (1973) S. 3—16.

⁵⁾ Über das Schneiden von Geraden und Zyklen in der absoluten Geometrie, *Beitr. Alg. Geom.* 2 (1974), S. 37—53.

mit dem Radius BC und um D einen Kreis mit dem Radius BD ; legt man dann aus A die Tangenten AE und AF an dieselben, so ist $AE=AF$. Hieraus folgt, daß, wenn man AC, BC, AD, BD bez. mit a, b, a', b' bezeichnet, es ein Dreieck GHI gibt (Fig. 2), in welchem $GI=a, HI=a'$ und dieselben Seiten die Projektionen $GK=b$ und $HK=b'$ auf GH haben. Bestimmt man auf KI den Punkt L so, daß $KL=a$ wird, und legt hierauf aus L die Tangenten LM und LN an die um G bez. H durch I geschlagenen Kreise, so ist $LM=LN$.

Wir führen die folgende Bezeichnungsweise ein. In einem rechtwinkligen Dreieck ist offenbar die Hypotenuse c durch die Katheten a und b eindeutig bestimmt: wir setzen kurz

$$c = a \dot{+} b \quad \text{oder} \quad c = b \dot{+} a,$$

so daß das Symbol $a \dot{+} b$ bez. $b \dot{+} a$ stets eine bestimmte Strecke bedeutet, sobald a und b beliebig gegebene Strecken sind.

Wenn a und b beliebig gegebene Strecken sind und a größer als b ist, so existiert stets eine und nur eine Strecke x , so daß

$$a = b \dot{+} x$$

wird; diese Strecke x wird mit $a \dot{-} b$ bezeichnet.

Beachtet man, daß in Fig. 1

$$CE = b, \quad DF = b', \quad AE = AF,$$

so erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken ACE und ADF

$$(1) \quad a \dot{-} b = a' \dot{-} b'.$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken HKL und HLN (Fig. 2), in welchen

$$KL = a, \quad HK = b', \quad HN = a'$$

ist, folgt weiterhin, daß

$$LN = (a \dot{+} b') \dot{-} a'.$$

Analog folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken GKL und GLM , in welchen

$$GK = b \quad \text{und} \quad LK = GM = a$$

ist,

$$LM = (b \dot{+} a) \dot{-} a = b.$$

Da aber

$$LN = LM,$$

so ergibt sich:

$$(a \dot{+} b') \dot{-} a' = b,$$

d.h.

$$(2) \quad a \dot{+} b' = b \dot{+} a'.$$

Damit haben wir bewiesen, daß aus (1) die Gleichung (2) folgt.

Umgekehrt, besteht die Gleichung (2), wo $a > b$ und $a > a'$ ist, so muß notwendig die Gleichung (1) gelten.

Um dies zu beweisen, tragen wir die Strecken $a' = AD$ und $b' = DB$ auf einer

Geraden ab (Fig. 1), errichten in D die Senkrechte auf AB und bestimmen auf derselben den Punkt C so, daß $AC=a$ wird. Setzen wir $BC=b_1$, so ist

$$a \div a' = b_1 \div b',$$

folglich

$$a \div b' = b_1 \div a';$$

daraus ergibt sich:

$$(a \div b') \div a' = b_1.$$

Aus Gleichung (2) folgt weiter:

$$(a \div b') \div a' = b.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt $b_1=b$, und mithin gilt nach dem vorigen die Gleichung (1).

Aus diesem Ergebnis entnehmen wir leicht, daß für die oben definierte Operation auch das assoziative Gesetz

$$(a \div b) \div c = a \div (b \div c)$$

gültig ist.⁶⁾ Zu dem Zwecke tragen wir auf einer Geraden von einem Punkte D aus die Strecken $a=AD$ und $c=DC$ ab (Fig. 3), und ziehen die Strecke $DB=b$ senkrecht

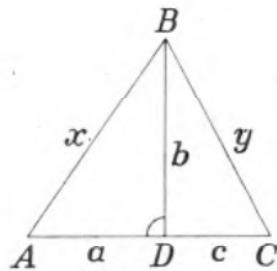


Fig. 3

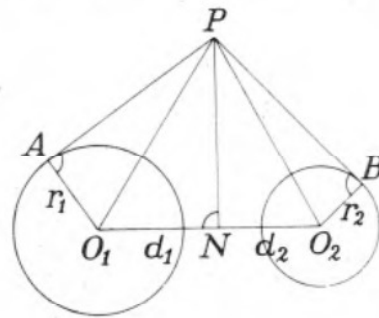


Fig. 4

zu CD ; setzen wir nun $AB=x$ und $BC=y$, so folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken ABD und BCD

$$x \div a = y \div c;$$

daher ist

$$x \div c = a \div y,$$

da aber in denselben Dreiecken

$$x = a \div b \quad \text{und} \quad y = b \div c,$$

so ist schon:

$$(a \div b) \div c = a \div (b \div c).$$

⁶⁾ Dieser Satz, der sich oft sehr nützlich erweist, wurde durch räumliche Betrachtung, jedoch ohne das Axiom über das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden bereits von J. HJELMSLEV (Om et af den Danske Matematiker Georg Mohr udgivet Skrift „Euclides Danicus“ udkomet i Amsterdam 1672, Mat. Tidsskrift B 1928, S. 1—7) unmittelbar bewiesen.

3. Mit Hilfe des Auseinandergesetzten können wir leicht beweisen, daß der Ort desjenigen Punktes P , dessen Abstände von zwei festen Punkten A, B die Bedingung

$$PA \div PB = \text{konstant}$$

erfüllen, eine Gerade ist, welche zur Verbindungslinie der beiden Punkte A, B senkrecht ist und sie in einem Punkte D trifft, für welchen

$$PA \div PB = DA \div DB$$

ist.

Sind nun zwei Kreise mit den Mittelpunkten O_1, O_2 und den Radien r_1, r_2 gegeben, wobei $r_1 \geq r_2$ ist, so ist der Ort des Punktes, aus welchem die Tangenten an die Kreise einander gleich sind, der außerhalb der Kreise gelegene Teil der Geraden, deren Punkte P die Bedingung

$$O_1P \div O_2P = r_1 \div r_2$$

erfüllen.

Es sei nämlich P (Fig. 4) ein Punkt von dieser Eigenschaft, d.h. es sind aus P an die Kreise gelegten Tangenten PA, PB einander gleich, so folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken PAO_1 und PBO_2 :

$$PO_1 \div r_1 = PO_2 \div r_2$$

und daher

$$PO_1 \div PO_2 = r_1 \div r_2 = \text{konst.}$$

Umgekehrt, wenn N ein Punkt auf der Zentralen der beiden Kreise ist, für den

$$O_1N \div O_2N = r_1 \div r_2$$

gilt, und wenn man aus irgendeinem Punkte M der in N auf die Zentrale errichteten Senkrechte an jeden Kreis eine Tangente legt, deren Berührungspunkte A, B sind, so ist

$$O_1M \div O_2M = r_1 \div r_2,$$

also

$$O_1M \div r_1 = O_2M \div r_2,$$

d.h. es müssen vermöge der rechtwinkligen Dreiecke MAO_1 und MBO_2 die Tangenten MA, MB einander gleich sein.

Wegen dieser Eigenschaft ihrer Punkte, welche außerhalb der Kreise liegen, wollen wir die Ortslinie PN nach STEINER⁷⁾ die *Linie der gleichen Tangenten* der zwei Kreise nennen.

Es ist noch zu bemerken, daß im Falle die gegebenen Kreise einander schneiden, die Linie der gleichen Tangenten der beiden Kreise zugleich ihre gemeinsame Sekante ist. Nämlich für jeden ihrer beiden Schnittpunkte, wenn man ihn mit P bezeichnet, gilt:

$$O_1P = r_1 \quad \text{und} \quad O_2P = r_2,$$

d.h. er liegt in der zu jenen Kreisen gehörenden Ortslinie.

⁷⁾ Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, *Berlin* 1833, S. 62, Ges. Werke I, *Berlin* 1881, S. 461—522, insbesondere S. 496 und Ostwalds Klassiker Nr. 60, *Leipzig* 1895, S. 46.

a absteht. Legt man nun das verwendete Lineal so, daß die gerade Kante des Lineals durch A und die andere Kante durch S geht, und zieht mit der geraden Kante eine Linie, so schneidet dieselbe die Abstandslinie durch B in einem Punkte B_1 , der zu dem Spiegelbilde des Punktes B an l in bezug auf A symmetrisch liegt, d.h. AB und AB_1 Spiegelbilder an der Geraden sind, welche in A auf l senkrecht steht.

Man nehme auf der Abstandslinie durch B einen Punkt C an (Fig. 7), der zwischen B und B_1 liegt, und bestimme nach obigem den symmetrischen Punkt C_1 zu C in bezug auf die Gerade, welche in A auf l senkrecht steht; einer der Punkte B_1, C_1, C , sei er C , liegt zwischen der beiden anderen. Dann wähle man auf der Geraden AB_1 einen Punkt D so, daß A zwischen B_1 und D liegt, sowie auf l einen Punkt E , der auf derselben Seite der Geraden AB wie der Punkt C liegt. Nun verbinde man den Schnittpunkt F von AB und CD mit dem Punkte E . Die Geraden DE und AB mögen sich in G , und die Geraden EF und AB_1 in H schneiden; es sei nun J der Treffpunkt von CD und GH : dann ist die Gerade AJ zu l senkrecht.

In der Tat, im gegenteiligen Falle errichte man in A auf l die Senkrechte. Die Gerade l schneide CD und GH bez. in K und L . Dann müßte jene Senkrechte eine der Strecken JK oder KL schneiden; träfe sie etwa JK in J_1 , so würde J_1 zu den Punkten D, F, K der vierte, zu K zugeordnete harmonische Punkt, und mithin wäre der Schnittpunkt J_2 von GH und EJ_1 zu den Punkten G, H, L der vierte, zu L zugeordnete harmonische Punkt, d.h. J_2 müßte auch ein Punkt von AJ_1 sein, was nicht möglich ist.

Legt man nun das Lineal mit seiner geraden Kante zweimal an AJ , so kann man auf l die Punkte X, Y bestimmen, für welche gilt:

$$XA = AY = a.$$

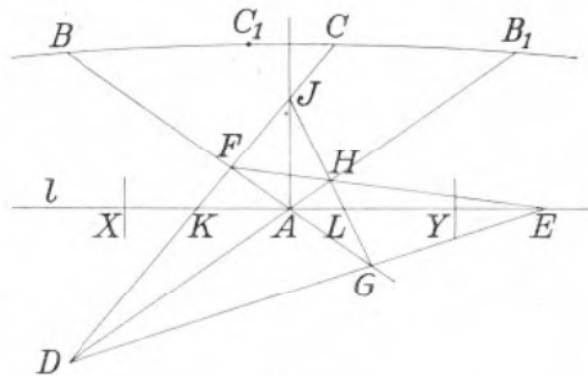


Fig. 7

5. Mit Hilfe der vorstehenden Konstruktion wollen wir folgende fundamentale Aufgabe behandeln:

Es sind die Schnittpunkte X und Y einer Geraden l mit einem Kreise K vom Mittelpunkt O und Radius r zu finden; den Radius des Kreises K (welcher Kreis natürlich nicht gezeichnet vorliegt) können wir dabei (mit Rücksicht auf die in der vorigen Nummer gelöste Aufgabe) senkrecht zu l als Strecke OA annehmen, die von l in M geschnitten wird.

Man kann diese Aufgabe immer an den speziellen Fall reduzieren, wo der Radius des Kreises K gleich der Breite des angewandten Lineals ist, indem man K und l einer (direkten oder inversen) Halbdrehung um O unterwirft, bei der K in einen Kreis K' übergeht, dessen Radius gleich a ist.

Bei der Zurückführung der allgemeinen Aufgabe auf diesem angedeuteten Wege auf den speziellen Fall sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Radius des Kreises K größer oder kleiner als a ist. Im ersten Falle (Fig. 8) lege man von A aus

eine Tangente an den Kreis K' , indem man das Lineal so in die Zeichenfläche legt, daß seine gerade Kante durch A und die andere Kante durch O geht, sodann fälle man von O aus auf diese Tangente das Lot OA' , ferner von M aus auf OA' das Lot $MM' = l'$, welches den Kreis K' in X' schneiden möge. Die gesuchten Punkte X, Y

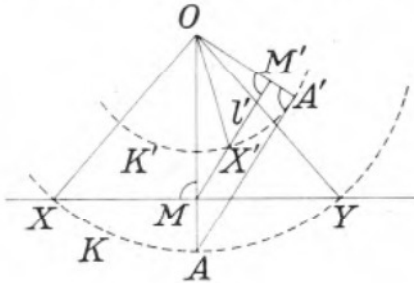


Fig. 8

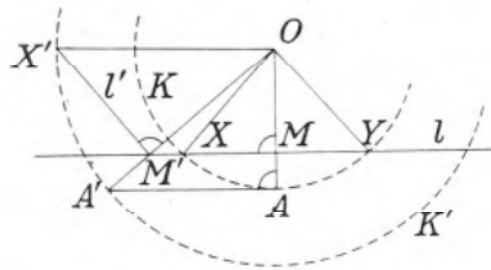


Fig. 9

sind die Schnittpunkte von l mit denjenigen Geraden, welche durch O gehen und mit OA einen Winkel einschließen, der gleich dem Winkel $A'OX'$ ist.

Im zweiten Falle (Fig. 9) konstruiere man in A auf OA die Senkrechte; dieselbe schneidet K' in A' und die im Schnittpunkte M' von OA' und l auf OA' errichtete Senkrechte in X' . Die gesuchten Punkte X, Y sind wieder die Schnittpunkte von l mit denjenigen Geraden, welche durch O gehen und mit OA einen Winkel einschließen, der gleich dem Winkel $A'OX'$ ist.

Wir müssen noch zeigen, wie man die Aufgabe in dem oben erwähnten speziellen Fall löst.

Zu diesem Zwecke bestimme man den symmetrischen Punkt B zu A in bezug auf O (Fig. 10) und zu A, B, M den vierten, zu M zugeordneten harmonischen Punkt N . Legt man nun das Lineal so in die Zeichenfläche, daß seine gerade Kante durch N und die andere Kante durch O geht, was auf zwei verschiedene Arten möglich ist, so erhält man die gesuchten Schnittpunkte X und Y .

Es kann aber auch der Fall eintreten, daß N uneigentlich ist. Wie man sich in diesem Falle helfen kann, ergibt sich aus folgender Überlegung:

Es sei P (Fig. 11) irgendein Punkt von K und C der Fußpunkt des von O auf die Verbindungslinie PN gefällten Lotes. Wir bezeichnen die Punkte, in denen die durch A und M senkrecht zu OC gezogenen Geraden OP treffen bez. mit A' und M' . Ist dann X' einer der beiden Schnittpunkte der Geraden l' , welcher in M' auf OA' senkrecht steht, mit dem Kreise um O durch A' , so liegen die Schnittpunkte X, Y von l mit K , wie man sofort sieht, auf denjenigen Geraden durch O , welche OA unter dem Winkel $A'OX'$ schneiden.

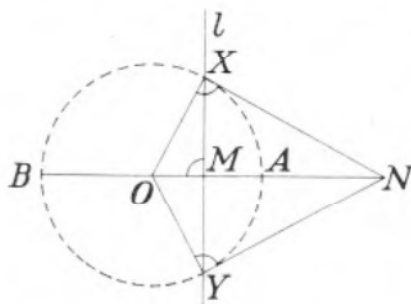


Fig. 10

Bestimmt man also den symmetrischen Punkt C zu M in bezug auf O (Fig. 12) und zu A, C, M den vierten, zu A zugeordneten harmonischen Punkt L , so liegen die gesuchten Schnittpunkte X, Y auf den von O aus durch diejenigen Punkte

uneigentlichen) Schnittpunkte H derselben mit OE eine Gerade senkrecht zu FG (man kann diese Normale in dem Falle, wo H uneigentlich ist, konstruieren, indem man von F und G auf die Verbindungslinie von G bez. F mit H Lote fällt, und durch den Schnittpunkt derselben eine Gerade senkrecht zu FG zieht; dabei kann man die Verbindungslinie FH , GH mit Hilfe des Satzes über perspektiv liegende Dreiecke durch bloßes Ziehen von geraden Linien finden). Diese Senkrechte trifft die Gerade OA in einem Punkte J , welcher der Mittelpunkt jenes Kreises ist, der durch G und durch die Schnittpunkte X_1 , Y_1 hindurchgeht.

In der Tat, der durch die Achsen HE und HJ und den Punkt E bestimmte Zykel, welcher von dem Kreise um F durch E rechtwinklig geschnitten wird, schneidet den um J durch G geschlagenen Kreis zum zweitenmal auf der Geraden FG ; mithin wird nach dem in Nr. 2 erwähnten Satz auch dieser Kreis von dem Kreise um F rechtwinklig geschnitten. Da ferner auch der um O durch M geschlagenen Kreis von demselben Kreise rechtwinklig geschnitten wird, so schneidet nach Nr. 3 der Kreis um J den Kreis um O auf der von F auf die Zentrale OJ gefällten Senkrechte FL .

Da nun $GJ > OA > AX_1$ ist, also die in X_1 an den Kreis um J gelegte Tangente die Gerade OA notwendig schneidet, so kann man nach dem oben angegebenen Vorgange auf den Fall kommen, welchen Fig. 10 darstellt.

Die andere fundamentale Aufgabe, „die Schnittpunkte zweier Kreise zu bestimmen, deren Mittelpunkte und Radien gegeben sind“, kann man auf die eben gelöste Hauptaufgabe zurückführen, indem man auf die in Nr. 3 angegebene Weise die gemeinsame Sehne der gegebenen Kreise bestimmt und ihre Schnittpunkte mit einem der beiden Kreise sucht.

Man bemerkt, daß diese Konstruktion genau dieselbe ist, welche ADLER zu demselben Zwecke angibt.

Damit ist gezeigt (wie schon einleitend erwähnt wurde), daß *alle Aufgaben, die mit dem Lineal und dem Zirkel lösbar sind, allein mit Hilfe unseres Zweikantenlineals gelöst werden können.*

(Eingegangen am 20. September 1973.)