

Über ein Integral

Von S. GOŁĄB (Kraków) und L. TAMÁSSY (Debrecen)

Herrn Professor A. Rapcsák zum 60. Geburtstag zugeeignet

In [1] ist ein Lemma bewiesen, wonach für eine in $[0, \pi]$ stetige Funktion $\varphi(\alpha)$ aus

$$(*) \quad \int_0^\pi \varphi(\alpha) |\sin(\alpha - \beta)| d\alpha = 0 \quad \text{für jede } \beta \in [0, \pi]$$

das Verschwinden von $\varphi(\alpha)$ folgt. Dieses Lemma scheint auch ein selbständiges Interesse zu haben. Wir fanden, das man für Riemann integrierbare Funktionen $\varphi(\alpha)$ aus (*) ein ähnliches Ergebnis, nämlich das fast überall Verschwinden von $\varphi(\alpha)$ folgern kann. Der Beweis des erwähnten Lemmas nützt die Stetigkeit von $\varphi(\alpha)$ wesentlich aus. So mußten wir hier eine völlig andersartige Beweismethode anwenden. Gleichzeitig dehnen wir das Ergebnis auf Funktionen von mehreren Variablen aus.

Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

Die einzige R-integrierbare Funktion $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ für welche

$$(1) \quad \int_{x_1=0}^\pi \dots \int_{x_n=0}^\pi \varphi(x_1, \dots, x_n) |\sin(x_1 + y_1)| \dots |\sin(x_n + y_n)| dx_1 \dots dx_n = 0$$

für jede $y_1, \dots, y_n; 0 \leq y_i \leq \pi$ ($i=1, 2, \dots, n$) gilt, ist die Funktion $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ fast überall in $0 \leq x_i \leq \pi$.

Wir möchten diesen Satz erstens für $n=1$ beweisen. Unsere Annahme lautet in diesem Fall

$$(2) \quad \int_0^\pi \varphi(x) |\sin(x + y)| dx = 0 \quad (\forall y: y \in [0, \pi]).$$

Setzen wir in (2) an die Stelle von y den Wert $y \pm \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir

$$(3) \quad \int_0^\pi \varphi(x) |\cos(x + y)| dx = 0 \quad (\forall y: y \in [0, \pi]).$$

Das Integrand von (2) als Funktion des Parameters y ist differenzierbar in Bezug auf y (abgesehen vom Wert $y = -x + \pi$). Wir zeigen, daß man das Differenzieren von

$$\int_0^{\pi} \varphi(x) |\sin(x+y)| dx = \int_0^{\pi-y} \varphi(x) |\sin(x+y)| dx + \int_{\pi-y}^{\pi} \varphi(x) |\sin(x+y)| dx = 0$$

nach y unter dem Integralzeichen durchführen kann. Da $|\sin(x+y)| = \pm \sin(x+y)$, so genügt es unsere Behauptung bezüglich des Differenzierens unter dem Integralzeichen für

$$(4) \quad \psi(y) = \int_a^b \Phi(x) \sin(x+y) dx, \quad y \notin (a, b)$$

zu beweisen, wo $\Phi(x)$ eine in (a, b) R -integrierbare (und daher beschränkte Funktion) ist. Aus (4) erhalten wir

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\psi(y+h) - \psi(y)}{h} &= \int_a^b \Phi(x) \frac{\sin(x+y+h) - \sin(x+y)}{h} dx = \\ &= \int_a^b \Phi(x) \cos(x+y+\Theta h) dx \quad (\Theta(x+y, h): 0 \leq \Theta \leq 1). \end{aligned}$$

$\Phi(x) \cos(x+y+\Theta h)$ konvergiert aber wegen der Beschränktheit von $\Phi(x)$ für $h \rightarrow 0$ gleichmäßig in Bezug auf x gegen $\Phi(x) \cos(x+y)$, was für die Umkehrung der Reihenfolge des Grenzüberganges und der Integration in (5) genügt:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b \Phi(x) \sin(x+y) dx = \int_a^b \Phi(x) \frac{d}{dy} \sin(x+y) dx.$$

Ähnlicherweise kann man auch das Differenzieren von (3) nach y unter dem Integralzeichen durchführen.

Wir erhalten durch Differentiation von (3) nach y

$$(6) \quad \int_0^{\pi} \varphi(x) |\sin(x+y)| \operatorname{sgn} B dx = 0,$$

wo

$$B \equiv \{-\sin(x+y)\} \left\{ \frac{\pi}{2} - (x+y) + \left[\frac{x+y+\frac{\pi}{2}}{2\pi} \right]_e 2\pi \right\}$$

und $[g]_e$ den ganzen Teil von g bedeutet. Die Subtraktion der Gleichung (2) von (6) ergibt

$$(7) \quad \int_0^{\pi} \varphi(x) |\sin(x+y)| \{-1 + \operatorname{sgn} B\} dx = 0.$$

$-1 + \operatorname{sgn} B$ hat den Wert -2 für $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} - y\right)$ und für $x \in (\pi - y, \pi)$, und den

Wert 0 für $x \in \left(\frac{\pi}{2} - y, \pi - y\right)$, falls y zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ fällt. Wir wollen jetzt $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ annehmen. Infolgedessen nimmt (7) die Form

$$-2 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}-y} \varphi(x) |\sin(x+y)| dx + \int_{\pi-y}^{\pi} \varphi(x) |\sin(x+y)| dx \right\} = 0$$

an, oder wenn das Vorzeichen von $\sin(x+y)$ berücksichtigt wird

$$(8) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}-y} \varphi(x) \sin(x+y) dx - \int_{\pi-y}^{\pi} \varphi(x) \sin(x+y) dx = 0.$$

Andererseits erhalten wir durch Differentiation von (2) nach y und durch nachfolgende Addition von (3)

$$(9) \quad \int_0^{\pi} \varphi(x) |\cos(x+y)| \{1 + \operatorname{sgn} A\} dx = 0,$$

wo

$$A \equiv \cos(x+y) \left\{ \pi - (x+y) + \left[\frac{x+y}{2\pi} \right] 2\pi \right\}.$$

$1 + \operatorname{sgn} A$ hat den Wert 2 für $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und für $x \in (\pi - y, \pi)$, und den Wert 0 für $x \in \left(\frac{\pi}{2} - y, \pi - y\right)$ (falls $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$). So folgt aus (9)

$$2 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}-y} \varphi(x) |\cos(x+y)| dx + \int_{\pi-y}^{\pi} \varphi(x) |\cos(x+y)| dx \right\} = 0,$$

und daraus wegen

$$\cos(x+y) \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in \left(0, \frac{\pi}{2} - y\right), \\ < 0 & \text{für } x \in (\pi - y, \pi): \end{cases}$$

$$(10) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}-y} \varphi(x) \cos(x+y) dx - \int_{\pi-y}^{\pi} \varphi(x) \cos(x+y) dx = 0.$$

$\varphi(x)$ ist voraussetzungsgemäß R -integrierbar in $(0, \pi)$ und daher ist sie fast überall stetig. So ist die Menge $\mathfrak{U}$ derjenigen Punkte x , $x + \frac{\pi}{2}$ ($0 < x < x + \frac{\pi}{2} < \pi$), für welche $\varphi(x)$ zumindest an einer der beiden Stellen $x, x + \frac{\pi}{2}$ unstetig ist, abzählbar. Ist also $x \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{U}$, so ist φ für x stetig.

Wir betrachten nun (8) für $y+h$ statt y und wir nehmen an, daß $\frac{\pi}{2}-y \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{U}$ gilt. So erhalten wir die Relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-(y+h)} \varphi(x) \sin(x+y+h) dx - \int_{\pi-(y+h)}^{\pi} \varphi(x) \sin(x+y+h) dx = 0$$

$$\left(0 < y+h < \frac{\pi}{2}\right).$$

Daraus folgt

$$(11) \quad \cos h \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-(y+h)} \varphi(x) \sin(x+y) dx - \int_{\pi-(y+h)}^{\pi} \varphi(x) \sin(x+y) dx \right] +$$

$$+ \sin h \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-(y+h)} \varphi(x) \cos(x+y) dx - \int_{\pi-(y+h)}^{\pi} \varphi(x) \cos(x+y) dx \right] = 0.$$

Der erste eckige Klammerausdruck läßt sich folgendermassen umändern:

$$\left[\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-y} - \int_{\pi-y}^{\pi} \right) - \left(\int_{\frac{\pi}{2}-(y+h)}^{\frac{\pi}{2}-y} + \int_{\pi-(y+h)}^{\pi-y} \right) \right].$$

Der erste runde Klammerausdruck verschwindet nach (8). Daher gilt

$$- \cos h \left[\int_{\frac{\pi}{2}-(y+h)}^{\frac{\pi}{2}-y} \varphi(x) \sin(x+y) dx + \int_{\pi-(y+h)}^{\pi-y} \varphi(x) \sin(x+y) dx \right] +$$

$$+ \sin h \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-(y+h)} \varphi(x) \cos(x+y) dx - \int_{\pi-(y+h)}^{\pi} \varphi(x) \cos(x+y) dx \right] = 0.$$

Durch Anwendung des Mittelwertsatzes folgt

$$(12) \quad (-\cos h)h[M_1 + M_2] +$$

$$+ \sin h \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-(y+h)} \varphi(x) \cos(x+y) dx - \int_{\pi-(y+h)}^{\pi} \varphi(x) \cos(x+y) dx \right] = 0,$$

wo M_1 ein Wert mit der Eigenschaft

$$\inf_{x \in \sigma} \varphi(x) \cos(x+y) \equiv M_1 \equiv \sup_{x \in \sigma} \varphi(x) \cos(x+y),$$

$$\sigma = \left(\frac{\pi}{2} - (y+h), \frac{\pi}{2} - y \right),$$

und M_2 ein ähnlicher Wert bezüglich des Intervalls $(\pi - (y+h), \pi)$ ist. Wir dividieren (12) beiderseits durch h und lassen h gegen Null streben. Dann bekommen wir wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$ für $x = \frac{\pi}{2} - y$ und $x = \pi - y$ die Relation

$$(13) \quad - \left[\varphi \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \sin \frac{\pi}{2} + \varphi(\pi - y) \sin \pi \right] + \\ + \left[\int_0^{\frac{\pi}{2} - y} \varphi(x) \cos(x+y) dx - \int_{\pi-y}^{\pi} \varphi(x) \cos(x+y) dx \right] = 0.$$

Der zweite eckige Klammerausdruck von (13) verschwindet aber nach (10). So erhalten wir

$$(14) \quad \varphi \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = 0 \quad \text{fast überall in} \quad \left(0, \frac{\pi}{2} \right),$$

d.h. $\varphi(x)$ verschwindet in $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ fast überall.

Wir zeigen nun, daß $\varphi(x)$ auch in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ fast überall verschwindet. Es sei y wieder ein Wert, wofür $\varphi(x)$ sowohl in $x = \frac{\pi}{2} - y$ als auch in $x = \pi - y$ $\left(0 < y < \frac{\pi}{2} \right)$

stetig ist. Wenn wir das obige Verfahren statt (8) aus (10) ausgehend durchführen, so bekommen wir

$$\varphi(\pi - y) = 0 \quad \text{fast überall in} \quad \left(0, \frac{\pi}{2} \right).$$

Dies und (14) bedeutet aber, daß $\varphi(x) = 0$ fast überall in $(0, \pi)$, w. z. b. w.

Der allgemeine Fall läßt sich jetzt einfach auf den bewiesenen Spezialfall zurückführen. Wir setzen

$$\int_{x_2=0}^{\pi} \dots \int_{x_n=0}^{\pi} \varphi(x_1, \dots, x_n) |\sin(x_2 + y_2)| \dots |\sin(x_n + y_n)| dx_2 \dots dx_n = \\ =: \Phi_1(x_1; y_2, \dots, y_n) \equiv \Phi_1(x_1; \mathfrak{Y}_1),$$

wo

$$\mathfrak{Y}_1 := (y_2, y_3, \dots, y_n).$$

So nimmt (1) die Form

$$\int_0^{\pi} \Phi_1(x_1; \mathfrak{Y}_1) |\sin(x_1 + y_1)| dx_1 = 0 \quad (\forall y_1: 0 \leq y_1 \leq \pi)$$

an. Hieraus folgt nach dem bewiesenen Spezialfall $n=1$

$$\Phi_1(x_1; \mathfrak{Y}_1) = 0 \quad \text{für alle} \quad x_1 \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{M}_1,$$

wo $\mathfrak{M}_1 \subset (0, \pi)$ eine abzählbare Menge ist. Daher ist

$$(15) \quad \int_0^\pi \Phi_2(x_1, x_2; \mathfrak{Y}_2) |\sin(x_2 + y_2)| dx_2 = 0 \quad (\forall y_2: 0 \leq y_2 \leq \pi)$$

für jedes $x_1 \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{M}_1$, wo $\mathfrak{Y}_2 := (y_3, y_4, \dots, y_n)$ und

$$\begin{aligned} \Phi_2(x_1, x_2; \mathfrak{Y}_2) &:= \\ &= \int_{x_3=0}^\pi \dots \int_{x_n=0}^\pi \varphi(x_1, \dots, x_n) |\sin(x_3 + y_3)| \dots |\sin(x_n + y_n)| dx_3 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Aus (15) folgt wieder nach dem bewiesenen Spezialfall $n=1$:

$$\Phi_2(x_1, x_2; \mathfrak{Y}_2) = 0 \quad \text{für } x_1 \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{M}_1, \quad x_2 \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{M}_2,$$

wo $\mathfrak{M}_2$ eine abzählbare Menge ist. Dieses Verfahren fortsetzend erhalten wir endlich

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \mathfrak{Y}_n) = 0$$

für

$$x_i \in (0, \pi) \setminus \mathfrak{M}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo die $\mathfrak{M}_i$ abzählbare Mengen sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

- [1] L. TAMÁSSY, A characteristic property of the sphere. *Pacific J. Math.* **29** (1969), 439—446.

(Eingegangen am 16. September, 1973.)