

# Über ein orthonormiertes Funktionensystem von D. E. Menchoff

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

1. In mehreren Untersuchungen spielt das folgende Lemma von D. E. MENCHOFF [1] eine wichtige Rolle.

Es sei  $p (\geq 2)$  eine natürliche Zahl. Dann gibt es  $\mu (\leq 1)$ ,  $M$ ,  $C$  positive, von  $p$  unabhängige Zahlen, ein im Intervall  $[0, 1]$  orthonormiertes System von Treppenfunktionen  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{2p^2}(x)$  und ein Intervall  $I (\subseteq [0, 1])$  derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

es gelten

$$|\varphi_n(x)| \leq M \quad (x \in [0, 1], n = 1, \dots, 2p^2),$$

$$\text{mes}(I) \geq \mu,$$

weiterhin für jeden Punkt  $x \in I$  gibt es einen von  $x$  abhängigen Index  $m = m(x) (< 2p^2)$  mit

$$\varphi_n(x) > 0 \quad (n = 1, \dots, m(x)),$$

$$\sum_{n=1}^{m(x)} \varphi_n(x) \geq Cp \log p.$$

Der originelle Beweis dieses Lemmas ist ziemlich kompliziert. In dieser Note werden wir für dieses Lemma einen einfachen Beweis geben.

2. Wir benützen den folgenden Hilfssatz.

**Hilfssatz.** ([1]) Es sein  $d$  und  $q$  positive ganze Zahlen ( $0 < d < q$ ). Zu jedem Indexpaar  $(i, j)$  mit  $1 \leq i, j \leq q$ ,  $|i - j| = d$  soll eine von Null verschiedene Zahl  $\alpha_{i,j}$  zugeordnet werden; wir bezeichnen mit  $\beta_d$  das Maximum der absoluten Beträge der Zahlen  $\alpha_{i,j}$ . In jedem Intervall  $(u, v)$  mit

$$v - u > 2\beta_d$$

können dann Funktionen  $\omega_l(x)$  ( $l = 1, \dots, q$ ) derart definiert werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:  $\omega_l(x)$  ist eine Treppenfunktion, und es gilt:

$$|\omega_l(x)| = 1 \quad (u < x \leq v; l = 1, \dots, q),$$

$$\int_u^v \omega_i(x) \omega_j(x) dx = -\alpha_{i,j} \quad (|i - j| = d, 1 \leq i, j \leq q),$$

$$\int_u^v \omega_i(x) \omega_j(x) dx = 0 \quad (i \neq j, |i - j| \neq d, 1 \leq i, j \leq q).$$

3. Wir gehen von einem Funktionensystem von S. KACZMARZ [2] aus. Im Intervall  $[0, 4)$  definieren wir die Funktionen  $\psi_1(x), \dots, \psi_{2p}(x)$  folgenderweise: es sei

$$\psi_n(x) = \frac{1}{k-p-n-1/2} \quad \left( x \in \left[ \frac{k-1}{p}, \frac{k}{p} \right); k = 1, \dots, 4p, n = 1, \dots, 2p \right).$$

Für die Zahlen

$$\bar{\alpha}_{i,j} = \int_0^4 \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (i, j = 1, \dots, 2p)$$

gilt offensichtlich

$$(1) \quad C_1/p \leq \bar{\alpha}_{n,n} \leq C_2/p \quad (n = 1, \dots, 2p).$$

(Im folgenden bezeichnen  $C_1, C_2, \dots$  positive, von  $p$  unabhängige Konstanten.)  
Ferner haben wir für  $i > j$ :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{i,j} &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{4p} \frac{1}{(k-p-i-1/2)(k-p-j-1/2)} = \\ &= \frac{1}{p(i-j)} \sum_{k=1}^{4p} \left\{ \frac{1}{k-p-i-1/2} - \frac{1}{k-p-j-1/2} \right\} = \\ &= \frac{1}{p(i-j)} \left\{ \sum_{k=1-p-i}^{3p-i} \frac{1}{k-1/2} - \sum_{k=1-p-j}^{3p-j} \frac{1}{k-1/2} \right\} = \\ &= \frac{1}{p(i-j)} \left\{ \sum_{k=1-p-i}^{-p-j} \frac{1}{k-1/2} - \sum_{k=3p-i+1}^{3p-j} \frac{1}{k-1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(2) \quad |\bar{\alpha}_{i,j}| \leq \frac{1}{p(i-j)} \left\{ \frac{i-j}{p+j+1/2} + \frac{i-j}{3p-i-1/2} \right\} \leq \frac{2}{p^2} \quad (i, j = 1, \dots, 2p, i \neq j).$$

Um die Funktionen  $\psi_n(x)$  auch im Intervall  $[4, 5]$  zu definieren, teilen wir das Intervall  $[4, 5]$  in  $\bar{N} = 2p(2p-1)$  Teilintervalle gleicher Länge  $\bar{I}_{i,j}$  ( $1 \leq i, j \leq 2p, i \neq j$ ). Es sei

$$(3) \quad \psi_n(x) = \begin{cases} \frac{N|\bar{\alpha}_{n,i}|}{2} & (x \in \bar{I}_{n,i}, i = 1, \dots, 2p, i \neq n), \\ \frac{N|\bar{\alpha}_{n,i}|}{2} \operatorname{sign} \alpha_{n,i} & (x \in \bar{I}_{i,n}, i = 1, \dots, 2p, i \neq n), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

( $n = 1, \dots, 2p$ ). Offensichtlich bilden die Funktionen  $\psi_n(x)$  ( $n = 1, \dots, 2p$ ) ein orthogonales System im Intervall  $[0, 5]$ , und aus (1), (2) und (3) folgt leicht:

$$(4) \quad |\psi_n(x)| \leq C_3 \quad (x \in [0, 5], n = 1, \dots, 2p),$$

$$(5) \quad C_4/p \leq \int_0^5 \psi_n^2(x) dx \leq C_5/p \quad (n = 1, \dots, 2p).$$

Ist weiterhin  $x \in [2, 3)$ , so gibt es eine von  $x$  abhängige natürliche Zahl  $v(x) (< p)$  derart, daß

$$x \in \left[ \frac{2p + v(x)}{p}, \frac{2p + v(x) + 1}{p} \right).$$

Nach der Definition von  $\psi_n(x)$  ist also mit der natürlichen Zahl  $v(x) (< 2p) (v(x) \geq p)$

$$(6) \quad \psi_n(x) > 0 \quad (x \in [2, 3), n = 1, \dots, v(x)),$$

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{v(x)} \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{v(x)} \frac{1}{2p + v(x) + 1 - p - n - 1/2} = \sum_{n=1}^{v(x)} \frac{1}{n - 1/2} \cong C_6 \log p.$$

Auf Grund von (5) gibt es Konstanten  $\gamma_n (n = 1, \dots, 2p)$  mit

$$(8) \quad C_7 \leq \gamma_n \leq C_8 \quad (n = 1, \dots, 2p),$$

$$(9) \quad \frac{1}{\gamma_n^2} \int_0^5 \psi_n^2(x) dx = \frac{1}{p} \quad (n = 1, \dots, 2p).$$

Es sei

$$\chi_n(x) = \gamma_n^{-1} \psi_n(x) \quad (x \in [0, 5], n = 1, \dots, 2p).$$

Die Treppenfunktionen  $\chi_n(x) (n = 1, \dots, 2p)$  bilden im Intervall  $[0, 5]$  ein orthogonales System, und aus (4), (6), (7), (8) und (9) erhalten wir

$$(10) \quad |\chi_n(x)| \leq C_9 \quad (x \in [0, 5], n = 1, \dots, 2p),$$

$$(11) \quad \int_0^5 \chi_n^2(x) dx = \frac{1}{p} \quad (n = 1, \dots, 2p),$$

und zu jedem Punkt  $x \in [2, 3)$  gibt es eine von  $x$  abhängige natürliche Zahl  $v(x) (< 2p)$  derart, daß

$$(12) \quad \chi_n(x) > 0 \quad (x \in [2, 3), n = 1, \dots, v(x)),$$

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{v(x)} \chi_n(x) \leq C_{10} \log p$$

erfüllt sind.

Es sei weiterhin

$$\varphi_{kp+n}(x) = \chi_n(x) \quad (n = 1, \dots, 2p, k = 0, \dots, p-1, x \in [0, 5]).$$

Auf Grund von (11), durch Anwendung des Hilfsatzes kann man die Definition der Funktionen  $\omega_n(x) (n = 1, \dots, 2p^2)$  auf das Intervall  $(5, 8]$  derart ausbreiten, daß  $\omega_n(x) (n = 1, \dots, 2p^2)$  im Intervall  $[0, 8]$  Treppenfunktionen sind, und in diesem Intervall ein orthogonales System bilden, weiterhin gilt

$$|\omega_n(x)| = 1 \quad (x \in (5, 8], n = 1, \dots, 2p^2).$$

So ist

$$\int_0^5 \omega_n^2(x) dx = \frac{1}{p} + 3 \quad (n = 1, \dots, 2p^2).$$

Es sei endlich

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{8(1/p+3)}} \omega_n\left(\frac{x}{8}\right) \quad (n = 1, \dots, 2p^2).$$

Aus (10), (12) und (13) folgt, daß für diese Funktionen  $\varphi_n(x)$  die Bedingungen des Lemmas mit  $\mu = \frac{1}{8}$  und  $I = \left[\frac{2}{8}, \frac{3}{8}\right)$  erfüllt sind.

### Bibliografie

- [1] D. E. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Recueil math. Moscou*, **3** (43) (1938), 103—120.
- [2] S. KACZMARZ, Notes on orthogonal series, II, *Studia Math.*, **5** (1934), 103—106.

(Eingegangen am 25. September 1974.)