

О совпадении центральных рядов в сплетении, I

В. СУЩАНСКИЙ (Киев) и П. ЛАКАТОШ *) (Дебрецен)

Введение

Известно [2], что сплетение $A \wr B$ групп A и B является нильпотентным тогда и только тогда, когда A и B суть p -группы (p -простое), причем B конечная, а A имеет конечную экспоненту. Однако, установить класс нильпотентности $A \wr B$ в общем случае не удастся. Либек [3] установил его лишь в случае, когда группы A и B абелевы.

Еще с большими трудностями связано описание верхнего или нижнего центральных рядов в сплетении. Л. А. Калужнин [1] описал полностью верхний и нижний центральные ряды для кратных сплетений циклической группы порядка p на себя. В [6] этот результат обобщается на случай кратных сплетений конечной элементарной абелевой группы на себя. Оказалось, что здесь верхний и нижний центральные ряды совпадают. Кроме этого Мельдрум [4] описал верхний α -центральный ряды сплетений циклической p -группы A с конечной абелевой p -группой B (т. е. пересечения членов верхнего центрального ряда с базой сплетения). Вопрос об установлении нижнего центрального ряда сплетения хотя бы произвольных абелевых групп пока открыт.

В работе рассматриваются сплетения абелевых групп, верхний и нижний центральные ряды которых совпадают.

Установлено, что имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Нижний и верхний центральные ряды сплетения $W = A \wr B$ двух абелевых p -групп совпадают тогда и только тогда, когда группы A и B элементарны абелевы.*

При доказательстве устанавливаются базисы членов нижнего центрального ряда сплетения циклической группы порядка p на конечную абелевую p -группу.

Напомним определение сплетения и фиксируем обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть $\{A(b)\}_{b \in B}$ -семейство изоморфных копий группы A , индексированных элементами группы B и

$$K = A^{(B)} = \prod_{b \in B} A(b)$$

*) Piroska Lakatos

-прямое произведение групп этого семейства. Элементы из K можно рассматривать как отображения из B в A , которые лишь для конечного числа аргументов $b \in B$ принимают значения, отличные от единицы. При этом, групповая операция определяется равенством

$$(f \cdot g)(b) = f(b) \cdot g(b),$$

для любого $b \in B$. Определим теперь мономорфизм из B в группу автоморфизмов группы $A^{(B)}$, сопоставляя каждому элементу $b \in B$ автоморфизм $f \rightarrow f^b$, где для всех $x \in B$ имеем $f^b(x) = f(x \cdot b^{-1})$. Расщепляемое расширение группы $A^{(B)}$ при помощи группы B , рассматриваемой как группа автоморфизмов $A^{(B)}$, называется (ограниченным) сплетением групп A и B (в таком же порядке). Очевидно, сплетение содержит подгруппы, изоморфные B и K , которые мы будем обозначать теми же символами. Нормальный делитель K называется изомомфизмом сплетения. Нам удобно будет в дальнейшем обозначать иногда элементы из $A^{(B)}$ в виде произведений

$$a(b_1) \cdot a(b_2) \cdot \dots \cdot a(b_t)$$

В этих обозначениях сплетение W групп A и B можно определить так:

$$W = \{K, B; b_1^{-1}a(b)b_1 = a(bb_1), a \in A; b, b_1 \in B\}.$$

Коммутатор двух элементов x, y будем обозначать символом $[x, y]$. Если $b \in B$ и $f \in K$, то $[f, b] = f^{-1}f^b$. На протяжении всей статьи рассматриваются лишь нильпотентные сплетения, поэтому в дальнейшем мы всегда считаем, что B есть конечная p -группа, а p -группа A имеет конечный показатель, не оговаривая специально этого каждый раз.

§ 1. Вспомогательные результаты

При изучении групп, каждая из которых раскладывается в прямое произведение, могут оказаться полезными теоремы, устанавливающие связи между свойствами сплетений самих групп и свойствами сплетений их сомножителей.

Приведем некоторые из сюда относящихся утверждений, которые будут полезны нам в дальнейшем.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$, и B -произвольные абелевы p -группы и $U_i = A_i \wr B$, $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, $U = A \wr B$. Пусть также φ_i -естественное вложение группы A_i^B в A^B и ψ_i -проекция A^B на A_i^B . Отображение φ_i можно продолжить до мономорфизма $\bar{\varphi}_i$ группы U_i в группу U , полагая для любого $bf \in U_i$:

$$\bar{\varphi}_i(bf) = b\varphi_i(f).$$

Образ группы U_i при этом отображении будем обозначать символом $\bar{U}_i$. Аналогично, проектирование ψ_i индуцирует гомоморфизмы $\bar{\psi}_i$ группы U на группы U_i , действующие на произвольный элемент bf группы U так

$$\bar{\psi}_i(bf) = b \cdot \psi_i(f).$$

Действительно, имеем:

$$\bar{\psi}_i(b \cdot f \cdot b_1 f_1) = \bar{\psi}_i(b \cdot b_1 \cdot f \cdot f_1^b) = b \cdot b_1 \cdot \psi_i(f \cdot f_1^b) = b \cdot b_1 \psi_i(f) \psi_i(f_1^b).$$

С другой стороны

$$\bar{\psi}_i(b \cdot f) \bar{\psi}_i(b_1 f_1) = b \psi_i(f) b_1 \psi_i(f_1) = b b_1 \psi_i(f) [\psi_i(f)]^b.$$

Но, очевидно $\psi_i(f^b) = [\psi_i(f)]^b$, т. е. отображение ψ_i — гомоморфизм.

Лемма 1. (См. также [8]). *Группа U является подпрямым произведением групп $\bar{U}_i$.*

Действительно, любой элемент $b \cdot f$ из U можно записать в виде $b \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$, где $f_i = \bar{\varphi}_i(\bar{\psi}_i(f))$. Все элементы $b \in B$ и $f_i \in A_i^B$ при такой записи встречаются. Легко видеть также, что такое разложение однозначно.

Отметим, что правило умножения для элементов из U , так записанных, примет следующий вид:

$$(1') \quad b \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n \cdot c \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n = b \cdot c \cdot f_1 \cdot \dots \cdot f_n \cdot g_1^b \cdot \dots \cdot g_n^b.$$

Коммутант сплетения U содержится в его базе. Поэтому элементы любого члена нижнего центрального ряда группы U (отличного от U) можно записать в виде $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$.

Теорема 2. *Элемент $f_1 f_2 \dots f_n$ содержится в k -ом члене нижнего центрального ряда группы U тогда и только тогда, когда элементы $\bar{f}_i = \bar{\varphi}_i^{-1}(f_i)$ содержатся в k -ых членах $\Gamma_k(U_i)$ нижних центральных рядов групп U_i для $i = 1, 2, \dots, n$.*

Доказательство этого утверждения проведем индукцией по числу k .

Случай $k=0$ -база индукции тривиален.

Пусть $f = f_1 f_2 \dots f_n$ содержится в k -ом члене нижнего центрального ряда группы U . Это означает, что найдутся такие элементы $g_1, g_2, \dots, g_t$, содержащиеся в $\Gamma_{k-1}(U)$ и элементы $b_1, b_2, \dots, b_t \in B$, для которых имеем

$$f = \prod_{i=1}^t g_i^{-1} \cdot g_i^{b_i}.$$

Запишем разложение для элементов g_i :

$$g_i = g_i^{(1)} \cdot g_i^{(2)} \cdot \dots \cdot g_i^{(n)}$$

где $g_i^{(j)} \in \bar{U}_j$, $i = 1, 2, \dots, t$, $j = 1, 2, \dots, n$. Легко видеть, что для каждого $j = 1, 2, \dots, n$ имеем

$$\bar{f}_j = \prod_{i=1}^t (\overline{g_i^{(j)}})^{-1} \cdot (\overline{g_i^{(j)}})^{b_i},$$

причем, согласно предположению индукции, элементы $\bar{g}_i^{(j)}$ содержатся в $\Gamma_{k-1}(U_j)$. Отсюда получаем, что элемент $\bar{f}_i$ содержится в k -ом члене нижнего центрального ряда группы U_j ($j = 1, 2, \dots, n$), что и требуется.

Наоборот, если элемент $\bar{f}_i$ содержится в $\Gamma_k(U_i)$, то поскольку отображение $\bar{\varphi}_i$ есть гомоморфизм, элемент $\bar{\varphi}_i(\bar{f}_i) = f_i$ содержится в k -ом члене нижнего центрального ряда группы U .

Значит и любое произведение $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ элементов $f_i \in \bar{U}_i$, для которых $\bar{f}_i \in \Gamma_k(U_i)$ будет содержаться в $\Gamma_k(U)$. Теорема доказана.

Следствие: Если группы $U_1, U_2, \dots, U_n$ нильпотентны класса $k_1, k_2, \dots, k_n$ соответственно, то U -нильпотентная группа класса $\max \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$.

Сформулируем и докажем теперь аналогичную теорему о строении верхнего центрального ряда группы U .

Теорема 3. *Элемент $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ содержится в k -ом члене верхнего центрального ряда $Z_k(U)$ группы U тогда и только тогда, когда каждый из элементов $\bar{f}_i$ содержится в k -ом члене верхнего центрального ряда $Z_k(U_i)$ группы U_i ($i=1, 2, \dots, n$).*

Доказательство снова проведем индукцией по k . Известно (см. например [7]), что центр сплетения U состоит из всех постоянных функций. Поскольку функция f постоянна тогда и только тогда, когда постоянными являются функции f_i , в случае $k=1$ утверждение теоремы правильно.

Пусть $f_1 = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ -элемент из $Z_k(U)$. Это значит, для любого $b \in B$, $[f, b] = f^{-1} \cdot f^b \in Z_{k-1}(U)$. Поскольку группа $A^{(B)}$ абелева, то учитывая правило умножения (1') имеем

$$\begin{aligned} f^{-1} \cdot f^b &= (f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)^{-1} \cdot f_1^b \cdot f_2^b \cdot \dots \cdot f_n^b = f_1^{-1} \cdot f_2^{-1} \cdot \dots \cdot f_n^{-1} \cdot f_1^b \cdot f_2^b \cdot \dots \cdot f_n^b = \\ &= (f_1^{-1} \cdot f_1^b) \cdot (f_2^{-1} \cdot f_2^b) \cdot \dots \cdot (f_n^{-1} \cdot f_n^b). \end{aligned}$$

Так как элемент $f^{-1} \cdot f^b$ содержится в $Z_{k-1}(U)$, то, согласно предположению индукции имеем, что $f_i^{-1} \cdot f_i^b$ для каждого $i=1, 2, \dots, n$ содержится в $Z_{k-1}(U)$. Учитывая, что $\bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b = \bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b = \bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b$, получаем требуемое.

Наоборот, если $\bar{f}_i \in Z_{k-1}(U_i)$, то для любого $b \in B$ элемент $\bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b$ содержится в $Z_{k-1}(U_i)$. По предположению индукции и учитывая равенство $\bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b = \bar{f}_i^{-1} \cdot \bar{f}_i^b$, получаем, что $f_i^{-1} \cdot f_i^b \in Z_{k-1}(U)$.

Значит и любое произведение $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ элементов f_i , для которых $\bar{f}_i \in Z_k(U_i)$ содержится в $Z_k(U)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательств теорем 2. и 3. легко усмотреть, что эти утверждения остаются правильными, если вместо конечной последовательности групп $A_1, A_2, \dots, A_n$, рассматривать бесконечную последовательность $A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ и полагать, что группа A является их прямым (декартовым) произведением.

Рассмотрим теперь случай, когда другая из сплетаемых групп раскладывается в прямое произведение сомножителей. При этом, в силу установленных выше теорем, можно считать, что крыша сплетения (т. е. группа A) является циклической.

Итак, пусть $B_1, B_2, \dots, B_n$ -произвольные конечные абелевы p -группы, A -циклическая порядка p^2 и пусть $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$, $V = A \wr B$, $V_i = A \wr B_i$, ($i=1, 2, \dots, n$). Группу A будем рассматривать как аддитивную группу кольца вычетов по модулю p^2 и будем обозначать символом $*$ операцию умножения в этом кольце (групповая операция в A , как и прежде, обозначается символом $\cdot$). Для каждого набора $f_1, f_2, \dots, f_n$ элементов $f_i \in A^{B_i}$ ($i=1, 2, \dots, n$) определим функцию $f = f_1 * \dots * f_n \in K$, полагая, что она для произвольного элемента $b = b_1 \cdot \dots \cdot b_n \in B$ принимает значение

$$f(b) = f_1(b_1) * f_2(b_2) * \dots * f_n(b_n).$$

Лемма 2. *Функции вида $f_1 * f_2 * \dots * f_n$, где f_i пробегает всю группу A^{B_i} , $i=1, 2, \dots, n$ порождают группу K .*

Действительно, функции из K , принимающие неединичные значения лишь для одного элемента из B , являются системой образующих для этой группы. Но каждая такая функция, как легко видеть, может быть записана в требуемом виде.

Таким образом, любой элемент $b \cdot f \in V$ можно записать в виде

$$b \cdot f = b \cdot \prod_{i=1}^k f_1^{(i)} * f_2^{(i)} * \dots * f_n^{(i)},$$

для подходящим образом выбранных элементов $f_j^{(i)}$. Однако, такая запись не является однозначной.

Из самого определения операции $*$ следует, что для любых $f_i \in A^{B_i}$ имеют место такие равенства:

- а) $(f_1 * \dots * f_{k-1} * f_k * f_{k+1} * \dots * f_n) \cdot (f_1 * \dots * f_{k+1} * f'_k * f_{k+1} * \dots * f_n) =$
 $= f_1 * \dots * f_{k-1} * (f_k \cdot f'_k) * f_{k+1} * \dots * f_n$
- б) $e * f_2 * \dots * f_n = f_1 * e * \dots * f_n = f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1} * e = e$
- в) $(f_1 * f_2 * \dots * f_n)^{-1} = f_1^{-1} * f_2 * \dots * f_n = f_1 * f_2^{-1} * \dots * f_n = f_1 * f_2 * \dots * f_n^{-1}$
- г) $(f_1 * f_2 * \dots * f_n)^{(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n)} = f_1^{b_1} * f_2^{b_2} * \dots * f_n^{b_n}$

(в равенстве б) символом e обозначена функция, тождественно равная единице (т. е. нулю кольца A); в равенстве г) $(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n)$ -произвольный элемент из B).

Приведем теперь ряд нужных коммутаторных формул, которые доказываются с использованием стандартных для вычисления коммутаторов произведений элементов а также равенств а)–г).

- (1) $[b_i, f_1 * \dots * f_n] = (f_1 * \dots * f_n)^{-1} \cdot (f_1 * \dots * f_n)^{b_i} = (f_1 * \dots * f_i^{-1} * \dots * f_n) *$
 $* (f_1 * \dots * f_i^{b_i} * \dots * f_n) = f_1 * \dots * f_i^{-1} * f_i^{b_i} * \dots * f_n = f_1 * \dots * [b_i, f_i] * \dots * f_n.$
- (2) $[b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n, f_1 * f_2 * \dots * f_n] = \prod_{i=1}^n (f_1 * \dots * f_{i-1} * [b_i, f_i] * \dots * f_{i+1} * \dots * f_n)^{c_i}$

где $c_i = b_{i+1} \cdot b_{i+2} \cdot \dots \cdot b_n$ ($1 \leq i \leq n-1$) и $c_n = 1$.

$$(3) \quad \left[b, \prod_{i=1}^k (f_1^{(i)} * \dots * f_n^{(i)}) \right] = \sum_{i=1}^k [b, f_1^{(i)} * f_2^{(i)} * \dots * f_n^{(i)}].$$

Определим на группах V и V_i целозначную функцию $\varkappa(x)$, полагая для $bf \in V$ ($b_i f_i \in V_i$) $\varkappa(b \cdot f) = k$ тогда и только тогда, когда $bf \in \Gamma_k(V)$ ($b_i f_i \in \Gamma_k(V_i)$), $k = 0, 1, \dots$

Теорема 4. Если A -циклическая группа порядка p , то элемент

$$f = \prod_{i=1}^t f_1^{(i)} * f_2^{(i)} * \dots * f_n^{(i)}$$

содержится в $\Gamma_k(V)$ ($k \geq 0$) тогда и только тогда, когда выполняется следующее неравенство

$$d(f) = \min_i \sum_{j=1}^n \kappa(f_j^{(i)}) \geq k.$$

Доказательство снова проведем индукцией. Если $k=0$ утверждение теоремы выполняется тривиальным образом.

Пусть элемент f содержится в $\Gamma_k(V)$. По определению это означает, что существуют такие элементы $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(r)} \in B$ и $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(r)} \in \Gamma_{k-1}(V)$ для которых имеем:

$$f = \prod_{i=1}^r [b^{(i)}, g^{(i)}].$$

Элементы $g^{(i)}$ можно записать в виде

$$g^{(i)} = \prod_{j=1}^{s_i} g_1^{(i,j)} * g_2^{(i,j)} * \dots * g_n^{(i,j)},$$

для подходящих $g_l^{(i,j)} \in A^{B_l}$.

Используя это, запишем по формуле (3), элемент f так:

$$f = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{s_i} [b^{(i)}, g_1^{(i,j)} * g_2^{(i,j)} * \dots * g_n^{(i,j)}].$$

Кроме этого, так как $b^{(i)}$ можно записать в виде $b_1^{(i)} * b_2^{(i)} * \dots * b_n^{(i)}$, для подходящих $b_j^{(i)} \in B_j$, используя формулу (2), отсюда получаем, что

$$(4) \quad f = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{s_i} \prod_{l=1}^n (g_l^{(i,j)} * \dots * [b_l, g_l^{(i,j)}] * \dots * g_n^{(i,j)})^{c_l},$$

где c_l определены как и в случае (2). Согласно предположению индукции $d(g^{(i)}) \geq k-1$. Отсюда поскольку $\kappa(f^c) = \kappa(f)$, для любых f и c , из равенства (4) получаем, что $d(f) \geq k$. Наоборот, если $d(f) \geq k$, то для любого i $\kappa(f_1^{(i)} * \dots * f_n^{(i)}) \geq k$ и (т. к. $k > 0$) найдется l , для которого $f_l \in \Gamma_k(V_l)$. Отсюда имеем,

что $f_l = \prod_{j=1}^m [b_l^{(j)}, f_l^{(j)}]$. Согласно равенству а) получаем

$$f_1^{(i)} * \dots * f_n^{(i)} = \prod_{j=1}^m f_1 * \dots * [b_l^{(j)}, f_l^{(j)}] * \dots * f_n,$$

а используя (1) теперь имеем

$$f_1^{(i)} * \dots * f_n^{(i)} = \prod_{j=1}^m [b_l^{(j)}, f_1 * \dots * f_l^{(j)} * \dots * f_n],$$

причем для каждого j $\kappa(f_1 * f_2 * \dots * f_l^{(j)} * \dots * f_n) < \kappa(f_1 * \dots * f_j * \dots * f_n)$. Применяя те же рассуждения к элементам $f_1 * \dots * f_l^{(j)} * \dots * f_n$, мы можем добиться через какое-то число шагов, что элемент $f_1 * f_2 * \dots * f_n$ запишется в виде произведения коммутаторов подходящим образом выбранных элементов $b_l^{(n)} \in B_l$ и таких функций $f^{(n)} = f_1 * \dots * f_l^{(n)} * \dots * f_n$, для которых $\kappa(f^{(n)}) = k-1$. Согласно предположению индукции каждая из этих функций содержится в $\Gamma_{k-1}(V_l)$, а это означает, что $f_1^{(i)} * \dots * f_n^{(i)} \in \Gamma_k(V)$, что есть и функция f там содержится.

§ 2. Условия совпадения центральных рядов сплетений абелевых групп

Рассмотрим сначала более подробно сплетение $W_n = A \wr B$ циклической группы $A = \{a\}$ порядка p на прямое произведение $B = \{b_1\} \times \{b_2\} \times \dots \times \{b_n\}$ циклических групп $\{b_i\}$ порядков p^{a_i} ($i = 1, 2, \dots, n$). Условимся употреблять ряд удобных сокращений. Нам будут часто встречаться n -мерные векторы, координаты которых являются натуральными числами. Мы будем обозначать их как обычно:

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n).$$

В частности, полагаем

$$\mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

и для $0 < j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ k -тое место определяем вектор $\mathbf{e}(j_1, j_2, \dots, j_k)$ равенством

$$\mathbf{e}(j_1, j_2, \dots, j_k) = \mathbf{e}_{j_1} + \mathbf{e}_{j_2} + \dots + \mathbf{e}_{j_k}.$$

Вектор же $\mathbf{e}(1, 2, \dots, n) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n$ обозначим просто символом $\mathbf{e}$. Если $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ некоторый вектор, то определяем $p^{\mathbf{j}}$ как вектор $(p^{j_1}, p^{j_2}, \dots, p^{j_n})$. Для вектора

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n), \quad k_l \leq j_l \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

полагаем, что

$$C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}} = C_{j_1}^{k_1} \cdot C_{j_2}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{j_n}^{k_n}.$$

Кратные произведения вида

$$\prod_{j_1=k_1}^{i_1} \prod_{j_2=k_2}^{i_2} \dots \prod_{j_s=k_s}^{i_s} f(j_1, j_2, \dots, j_s),$$

которые нам будут часто встречаться, мы будем обозначать так

$$\prod_{\mathbf{j}=\mathbf{k}}^{\mathbf{i}} f(\mathbf{j}).$$

Удобно также функции вида

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} a & \text{если } x_1 = b_1^{i_1}, \quad x_2 = b_2^{i_2}, \dots, x_n = b_n^{i_n} \\ 1 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

обозначать просто символом

$$a(i_1, i_2, \dots, i_n) = a(\mathbf{i}) \quad (1 \leq i_k \leq p^{a_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Эти элементы, очевидно, образуют базис абелевой группы K , то есть K является прямым произведением p^{a_i} экземпляров циклической группы порядка p .

Для каждого набора $(j_1, j_2, \dots, j_n) = \mathbf{j}$, $1 \leq j_k \leq p^{a_k}$, ($k = 1, 2, \dots, n$) определим теперь рекуррентно элементы

$$\alpha(i_1, i_2, \dots, i_n; j_1, j_2, \dots, j_n) = \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j}),$$

полагая

$$(5) \quad \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{e}) = a(\mathbf{i}), \quad \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{e} + \mathbf{e}_k) = [b_k, \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{e})]$$

$$\alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = [b_k, \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j} - \mathbf{e}_k)].$$

Как показано в [5], в случае $n=1$ имеют место следующие соотношения для элементов $\alpha(i, j)$

$$(6) \quad \alpha(1, j) = \prod_{v=1}^j a(v)^{(-1)^{v-1} C_{j-1}^{v-1}}, \quad a(i) = \prod_{\mu=1}^i \alpha(1, \mu)^{(-1)^{\mu-1} C_{i-1}^{\mu-1}}$$

где индексы v приводят по модулю p^{z_1} .

Индукцией по числу n эти соотношения легко обобщить на произвольный случай $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$(7) \quad \alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \prod_{v=0}^{i-e} a(\mathbf{i} + \mathbf{v})^{(-1)^{v_1+v_2+\dots+v_n} C_{i-e}^v}$$

$$(8) \quad a(\mathbf{i}) = \prod_{\mu=e}^i \alpha(\mathbf{e}, \mu)^{(-1)^{(\mu_1-1)+\dots+(\mu_n-1)} C_{i-e}^{\mu-e}},$$

где координаты вектора $\mathbf{i} + \mathbf{v}$ приводятся по модулям p^{z_k} ($k=1, 2, \dots, n$ соответственно).

Установим теперь, для произвольного n , базы членов нижнего центрального ряда группы W_n .

Теорема 5. Элементы $\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{j})$, $\mathbf{j}=(j_1, j_2, \dots, j_n)$, для которых

$$\sum_{l=1}^n j_l \equiv k+n$$

образуют базис группы $\Gamma_k(W_n)$.

Доказательство. Из равенства (8) следует, что всевозможные элементы вида $\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{j})$ являются системой образующих группы K . Но поскольку их число равно $p^{z_1+z_2+\dots+z_n}$, ясно, что они независимы в K . Из элементов такого вида, по построению, лишь $\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{e})$ не содержится в группе $\Gamma_1(W_n)$. Поэтому порядок $\Gamma_1(W_n)$ не меньше $p^{p^{z_1+z_2+\dots+z_n}-1}$, так как $K \neq \Gamma_1(W_n)$, этот порядок, в действительности, и равен $p^{p^{z_1+z_2+\dots+z_n}-1}$. Т.е. при $k=1$ утверждение справедливо.

Равенства (2) из §1, применительно к нашему случаю можно переписать следующим образом:

$$[b_1^{k_1} \cdot b_2^{k_2} \cdot \dots \cdot b_n^{k_n}, a(\mathbf{i})] = b_n^{k_n}, a(\mathbf{i} + \mathbf{k}_n)] \cdot [b_{n-1}^{k_{n-1}}, a(\mathbf{i} + \mathbf{k}_{n-1})] \cdot \dots \cdot [b_1^{k_1}, a(\mathbf{i} + \mathbf{k}_1)]$$

где $0 \equiv k_i < p^{z_i}$,

$$\mathbf{k}_i = (k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, 0, \dots, 0) \quad (i=2, \dots, n), \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{0}.$$

Из этих равенств следует, что можно определить базис группы $\Gamma_k(W_n) = [W_n, \Gamma_{k-1}(W_n)]$ как совокупность коммутаторов базисных элементов $\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{j})$ группы $\Gamma_{k-1}(W_k)$ с элементами $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Теперь доказательство легко завершается индукцией по числу k .

Отметим, что равенства (6) и теорема 4. дают возможность легко определить класс нильпотентности группы W_n (см. [3]). В самом деле, при $n=1$, поскольку $C_{p^{z_1}-1}^i \equiv (-1)^i \pmod{p}$, элемент $\alpha(1, p^{z_1})$ содержится в центре групп W_n , т.е. нильпотентна класса p^{z_1} . Используя теорему 4, получаем отсюда, что W_n является, для любого $n \geq 1$, нильпотентной класса $s=p^{z_1}+p^{z_2}+\dots+p^{z_n}-n+1$.

Теорема 6. В сплетении $\overline{W}_n = C_p \wr C_p^{(n)}$ верхний и нижний центральные ряды совпадают.

Доказательство. В случае, когда $n=1$ эта группа детально изучена в [1]. В этой работе установлено, что элементы этой группы можно представлять в виде таблиц $[a, a(x)]$, где $a \in Z_p$, $a(x)$ -многочлен степени не выше $p-1$ над Z_p (Z_p -поле из p элементов).

Группа $C_p \wr C_p$ является нильпотентной класса p . Причем элемент из этой группы содержится в ее k -том члене нижнего центрального ряда или $p-k$ -ом члене верхнего ($k \geq 1$) тогда и только тогда когда ему соответствует таблица вида $[0, a(x)]$, где ст. $a(x) \leq p-1-k$ [8]. Согласно рассуждениям из §1 отсюда имеем, что любой элемент из $C_p \wr C_p^{(n)}$ представляется таблицей $[(a_1, a_2, \dots, a_n), a(x_1, x_2, \dots, x_n)]$, где $a_i \in Z_p$, $a(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -многочлен от n неизвестных с коэффициентами из Z_p , причем все неизвестные входят в него в степенях, которые не превышают $p-1$. Согласно теореме 4 таблица вида $[(0, \dots, 0), a(x_1, \dots, x_n)]$ будет содержаться в k -ом члене нижнего центрального ряда из $\overline{W}_n$ ($k \geq 1$) тогда и только тогда, когда $a(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно представить в виде суммы $\sum_j a_1^{(j)}(x_1) \cdot a_2^{(j)}(x_2) \cdot \dots \cdot a_n^{(j)}(x_n)$ произведений многочленов от одного неизвестного, причем для любого j ст. $a_1^{(j)}(x_1) + \text{ст. } a_2^{(j)}(x_2) + \dots + \text{ст. } a_n^{(j)}(x_n) \leq n(p-1)-k$. Поскольку любой многочлен степени $n(p-1)-k$ и ниже можно так представить, отсюда имеем, что $\Gamma_k(\overline{W}_n)$ состоит из всех таблиц вида $[(0, \dots, 0), a(x_1, x_2, \dots, x_n)]$, где ст. $a(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq n(p-1)-k$. А так как для любой группы G степени нильпотентности t имеем $Z_k(G) \supseteq \Gamma_{t-k}(G)$, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что элементу, который содержится в $Z_k(\overline{W}_n)$ соответствует таблица вида $[(0, \dots, 0), c(x_1, \dots, x_n)]$ где ст. $c(x_1, \dots, x_n) \leq k-1$. Это легко проверяется непосредственно, индукцией по k .

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1., сформулированной во введении.

Достаточность условия этой теоремы следует из теорем 2, 3, замечания к ним и теоремы 6.

Поэтому остается доказать лишь необходимость условия. Покажем сначала, что в группе W_n , для которой $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \geq 2$, подгруппа $Z_{s-2}(W_n)$ -неабелева, т. е. $Z_{s-2}(W_n) \neq \Gamma_2(W_n)$ (s — класс нильпотентности W_n). Пусть $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \alpha_m$, $1 \leq m \leq n$. Согласно теореме 5, для любого вектора $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ ($0 \leq i_l \leq p^{\alpha_l}$; $l=1, 2, \dots, n$) элемент

$$\alpha(\mathbf{i}, \mathbf{e} + p^{\alpha_m-1} \mathbf{e}_m) = \prod_{v_m=0}^{p^{\alpha_m-1}} a(\mathbf{i} + v_m \mathbf{e}_m) = a(\mathbf{i}) a^{-1}(\mathbf{i} + p^{\alpha_m-1} \mathbf{e}_m) = [b^{p^{\alpha_m-1}}, a(\mathbf{i})]$$

содержится в подгруппе $\Gamma_{p^{\alpha_m-1}}(W_n)$, т. е. содержится также и в подгруппе $Z_{s-p^{\alpha_m-1}}(W_n)$. Это означает, что для произвольного элемента $a(\mathbf{i})$ из базиса подгруппы K имеет место включение $[b_m^{p^{\alpha_m-1}}, a(\mathbf{i})] \in Z_{s-p^{\alpha_m-1}}(W_n)$.

Таким образом взаимный коммутант $[\{b_m^{p^{\alpha_m-1}}\}, K]$ подгрупп $\{b_m^{p^{\alpha_m-1}}\}$ и K содержится в $s-p^{\alpha_m-1}$ члене верхнего центрального ряда группы W_m . То есть фактор-группа

$$\{b_m^{p^{\alpha_m-1}}\} \cdot Z_{s-p^{\alpha_m-1}} / Z_{s-p^{\alpha_m-1}}$$

содержится в центре группы $W_n/Z_{s-p\alpha_m-1}^1$. Иными словами, циклическая подгруппа $\{b_m^{p^{\alpha_m-1}}\}$ содержится в $Z_{s-p\alpha_m-1+1}(W_n)$. Поскольку для любых p, α_m имеем $Z_{s-p\alpha_m-1} \subseteq Z_{s-2}(W_n)$, то $Z_{s-2}(W_n)$ всегда является неабелевой подгруппой.

Из только что доказанного следует, что верхний центральный ряд сплетения $A \geq \{b_1\} \times \{b_2\} \times \dots \times \{b_n\}$ ($b_i^{p^{\alpha_i}} \equiv 1$, $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \geq 2$) содержит неабелевы члены ряда при любой нетривиальной p -группе A . Это следует из того, что, поскольку в группе A всегда можно выбрать циклическую подгруппу порядка p , сплетение $A \geq \{b_1\} \times \{b_2\} \times \dots \times \{b_n\}$ содержит подгруппу, изоморфную W_n , для которой это имеет место.

Поэтому для окончания доказательства, в силу теорем 2. и 3., достаточно рассмотреть сплетение

$$\{a\} \geq \{b_1\} \times \{b_2\} \times \dots \times \{b_n\} \quad \text{где} \quad a^{p^\alpha} = 1, \quad \alpha > 2, \quad b_i^p = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть $n=1$. Используя равенства (6) имеем для элемента

$$\begin{aligned} x &= a(1) \cdot a(2) \cdot \dots \cdot a(p)^{p^{\alpha-2}} = \prod_{v=1}^p \alpha(1, v)^{(-1)^{v-1} C_p^v \cdot p^{\alpha-2}} = \\ &= \alpha(1, 1)^{p^{\alpha-2} C_p^1} = \alpha(1, 1)^{p^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

где

$$\alpha(1, 1) = \alpha(1), \quad \alpha(1, x) = [b_1, \alpha(1, k-1)] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Поскольку, согласно теореме 5 подгруппа $\Gamma_1(\{a\} \geq \{b_1\})$ порождается элементами $\alpha(1, 2), \alpha(1, 3), \dots, \alpha(1, p)$, элемент x не содержится в ней. Но ясно, что x содержится в центре этого сплетения. Таким образом при $n=1$ все установлено.

Если же $n > 1$, то, согласно теореме 4, элемент $\underbrace{x * x * \dots * x}_n$ не содержится в коммутанте сплетения, но очевидно содержится в его центре.

Теорема 1. полностью доказана.

Литература

- [1] L. Kaloujnine, La structure de p -groupes de Sylow des des groupes symetriques finis. *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, **68** (1948), 239—276.
- [2] G. Baumslag, Wreath products and p -groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **55** (1959), 224—231.
- [3] H. Liebeck, Concerning nilpotent wreath products, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **58**. (1962), 443—451.
- [4] L. Meldrum, Central series in wreath products, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **63**. (1963), 551—567.
- [5] К. Бузаши, Ядра неприводимых представлений силовской p -подгруппы симметрической группы $S_{p,n}$, *Publ. Math.* **16**. (1969), 199—227.
- [6] В. И. Суцанский, Сплетения элементарных абелевых групп., *Мат. заметки II*. № I. (1972), 61—72.
- [7] P. Neuman, On the structure of standard wreath products of groups, *Math. Z.*, **84**. (1964), 344—373.
- [8] Л. А. Калужнин, В. И. Суцанский, О сплетениях абелевых групп, *Труды Моск. Мат. общества*, т. **29** (1973), 147—163.

(Поступила: 16. II. 1974.)