

## Об одном варианте метода усреднения для нелинейных систем интегро дифференциальных уравнений стандартного вида

Г. Хр. Сарафова—Д. Д. Байнов (София)

Рассмотрим систему

$$(1) \quad \dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s)) ds\right)$$

с начальным условием

$$(2) \quad x(0) = x_0$$

Пусть существует предел

$$(3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x) ds\right) dt = X_0(x).$$

Усредненной системой для системы (1), (2) назовем систему

$$(4) \quad \dot{\xi} = \varepsilon X_0(\xi)$$

с начальным условием

$$(5) \quad \xi(0) = x_0.$$

Справедлива следующая

**Теорема.** Пусть функции  $X(t, x, y)$  и  $\varphi(t, s, x)$  определены и непрерывны соответственно в областях  $Q_1 = \Delta_1 \times \Omega(x) \times \Omega(y)$  и  $Q_2 = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Omega(x)$  где  $\Delta_1 = \Delta_2 = [0, \infty]$ , а  $\Omega(x) \subset R^n$ ,  $\Omega(y) \subset R^q$  — открытые ограниченные области. В соответствующих проекциях области  $\Omega(t, s, x, y) = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Omega(x) \times \Omega(y)$  выполнены неравенства

$$1. \|X(t, x, y)\| \leq M, \quad M = \text{const.}$$

$$2. \|X(t, x', y') - X(t, x'', y'')\| \leq \lambda \{\|x' - x''\| + \|y' - y''\|\}, \quad \lambda = \text{const} > 0.$$

$$3. \|\varphi(t, s, x') - \varphi(t, s, x'')\| \leq \mu(t, s)\|x' - x''\|$$

$$4. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s) ds = 0.$$

5. В каждой точке  $x \in \Omega(x)$  существует предел (3).

$$6. \left\| \int_0^t \bar{X}(\tau, x) d\tau \right\| \leq P, \quad P = \text{const.}$$

$$7. \text{ Функция } \psi(t, x) = \int_0^t \bar{X}(\tau, x) d\tau \text{ непрерывна.}$$

$$8. \left\| \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \bar{X}(\tau, x) d\tau \right\| \leq Q, \quad Q = \text{const.}$$

$$\text{Здесь } \bar{X}(\tau, x(\tau)) = X\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(\tau)) ds\right) - X_0(x(\tau))$$

9. Решение  $\xi = \xi(t)$ ,  $\xi(0) = x_0 \in \Omega(x)$  определено для всех  $t \geq 0$  и лежит в  $\Omega(x)$  с некоторой  $\varrho$ -окрестностью.

Тогда для любого  $L > 0$  существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  на отрезке  $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$

$$(6) \quad \|x(t) - \xi(t)\| \leq [\lambda ML\delta(\varepsilon) + \varepsilon(P + MQ L)] e^{\lambda[L + \delta(\varepsilon)]}$$

где

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{0 \leq \tau \leq L} \tau \bar{\mu}_0\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad \bar{\mu}_0(t) = \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s) ds.$$

Доказательство: Оценим разность  $x(t) - \xi(t)$ . Имеем

$$(7) \quad \begin{aligned} x(t) - \xi(t) &= \varepsilon \int_0^t X\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s)) ds\right) d\tau - \varepsilon \int_0^t X_0(\xi(\tau)) d\tau = \\ &= \varepsilon \int_0^t \left[ X\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s)) ds\right) - X\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(s)) ds\right) \right] d\tau + \\ &+ \varepsilon \int_0^t \left[ X\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(s)) ds\right) - X\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau)) ds\right) \right] d\tau + \\ &+ \varepsilon \int_0^t \left[ X\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau)) ds\right) - X_0(\xi(\tau)) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Из (7) следует

$$\begin{aligned} \|x(t) - \xi(t)\| &\leq \varepsilon \lambda \int_0^t \left[ \|x(\tau) - \xi(\tau)\| + \int_0^\tau \mu(\tau, s) \|x(s) - \xi(s)\| ds \right] d\tau + \\ &+ \varepsilon \lambda \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s) \|\xi(s) - \xi(\tau)\| ds + \varepsilon \left\| \int_0^t \bar{X}(\tau, \xi(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon \lambda \int_0^t \left[ \|x(\tau) - \xi(\tau)\| + \int_0^\tau \mu(\tau, s) \|x(s) - \xi(s)\| ds \right] d\tau + \\ &+ \lambda ML\delta(\varepsilon) + \left\| \varepsilon \int_0^t \bar{X}(\tau, \xi(\tau)) d\tau \right\|. \end{aligned}$$

Имея ввиду, что

$$\int_0^t \bar{X}(\tau, \xi(\tau)) d\tau = \int_0^t \bar{X}(\tau, \xi(t)) d\tau - \int_0^t \left[ \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} \int_0^\tau \frac{\partial \bar{X}(\theta, \xi(\tau))}{\partial \xi(\tau)} d\theta \right] d\tau$$

получаем

$$\begin{aligned} \|x(t) - \xi(t)\| &\equiv \varepsilon \lambda \int_0^t \left[ \|x(\tau) - \xi(\tau)\| + \int_0^\tau \mu(\tau, s) \|x(s) - \xi(s)\| ds \right] d\tau + \lambda ML\delta(\varepsilon) + \\ &+ \varepsilon \left\| \int_0^t \bar{X}(\tau, \xi(t)) d\tau \right\| + \varepsilon \int_0^t \left[ \|\varepsilon X_0(\xi(\tau))\| \int_0^\tau \left\| \frac{\partial \bar{X}(\theta, \xi(\tau))}{\partial \xi(\tau)} \right\| d\theta \right] d\tau \equiv \\ &\equiv \varepsilon \lambda \int_0^t \left[ \|x(\tau) - \xi(\tau)\| + \int_0^\tau \mu(\tau, s) \|x(s) - \xi(s)\| ds \right] d\tau + \\ &+ \lambda ML\delta(\varepsilon) + \varepsilon(P + \varepsilon MQt) \end{aligned}$$

или

$$\|x(t) - \xi(t)\| \equiv [\lambda ML\delta(\varepsilon) + \varepsilon(P + MQL)] e^{\lambda[L + \delta(\varepsilon)]}.$$

Так как функция  $\xi(t)$  принадлежит области  $\Omega(x)$  при  $0 \leq t < \infty$  со своей  $\varrho$ -окрестностью, то можно указать такое  $\varepsilon_0$ , чтобы при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  выполнялось неравенство

$$[\lambda ML\delta(\varepsilon) + \varepsilon(P + MQL)] e^{\lambda[L + \delta(\varepsilon)]} < \varrho.$$

Тогда решение  $x(t)$  не выдет из области  $\Omega(x)$  при  $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$  и выражение (6) справедливо на отрезке  $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$ .

*Замечание.* Метод усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений был впервые обоснован А. Н. Филатовым. Обширная библиография по этой тематике имеется в [1].

### Литература

И. А. Н. Филатов, Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Изд-во "ФАН", Ташкент, 1971.

ПЛОВДИВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. П. ГИЛЕНДАРСЛОГО

(Поступила: 13. X. 1974)