

Краевые задачи с двумя условиями для дифференциально-функциональных уравнений первого порядка

М. М. КОНСТАНТИНОВ, Д. Д. БАЙНОВ (София)

1. Вводные замечания

Как известно, в краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений число n_b краевых условий обычно равняется порядку n_0 уравнения. В задачах с n_p параметрами, однако, может иметь место случай $n_b > n_0$, причем соответствующие параметры определяются за счет удовлетворения $(n_b - n_0)$ из краевых условий, где числа n_b , n_0 и n_p связаны соотношением $n_b - n_0 \leq n_p$.

В настоящей работе рассматривается теория краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, зависящим от значений искомой функции, при $n_b = 2$ и $n_0 = n_p = 1$. Класс рассматриваемых дифференциально-функциональных уравнений включает уравнения смешанного типа с распределенными и дискретными отклонениями аргумента. Некоторые из полученных результатов при соответствующих изменениях будут иметь место и для систем дифференциальных уравнений с двумя векторными квазилинейными краевыми условиями.

Отметим, что для уравнений без отклонения аргумента и $n_b = 2$, $n_0 = n_p = 1$ некоторые частные результаты при слишком ограничительными предположениями получены в [1].

2. Основные обозначения

R — вещественная ос; $R^m - m$ — мерное пространство над R ; $T = [0, 1]$, $R_+ = [0, \infty)$ — интервалы; $M: T \rightarrow R_+$ — непрерывная функция; $A = \{\lambda: |\lambda| \leq \alpha\}$,

$$\Xi = \left\{ \xi: |\xi| \leq \tilde{M} = \int_0^1 M(t) dt \right\}$$

— подмножества в R ; C_p — пространство p — раз непрерывно дифференцируемых функций $Z: T \rightarrow R$; X, Y — подмножества в C_1 и C_0 , такие, что

$$x \in X \Rightarrow |\dot{x}(t)| \leq M(t), \quad y \in Y \Rightarrow |y(t)| \leq M(t);$$

$V_t = (V_t^1, \dots, V_t^m)$ — m -мерный функционал, определенный на множестве X ;

$$\omega^i = \{\xi: |\xi| \leq a_i\}, \quad a_i = \sup \{|V_t^i(x)|: (t, x) \in T \times X\}, \quad i \in \overline{1, m} \quad —$$

подмножества в R ; $\omega = \omega^1 \times \dots \times \omega^m$ — подмножество в R^m ; $f: (t, u, \lambda) \mapsto f(t, u, \lambda)$ — непрерывная функция определенная на множестве $T \times \omega \times \Lambda$;

$$\varphi: (t, u, \lambda_1, \lambda_2) \mapsto \varphi(t, u, \lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} (f(t, u, \lambda_1) - f(t, u, \lambda_2)) \in R$$

— функция, определенная на множестве $T \times Z$, $Z = \omega \times (\Lambda^2 \setminus \Delta(\Lambda))$, где $\Delta(\Lambda)$ — диагональ произведения Λ^2 . Определим наконец следующие величины

$$L(t) = \sup \{ |\varphi(t, u, \lambda_1, \lambda_2)| : (u, \lambda_1, \lambda_2) \in Z \}$$

$$l(t) = \inf \{ |\varphi(t, u, \lambda_1, \lambda_2)| : (u, \lambda_1, \lambda_2) \in Z \},$$

$$L_1 = \sup \{ L(t) : t \in T \}, \quad l_1 = \inf \{ l(t) : t \in T \},$$

$$l_1 \beta = \max \{ |f(t, u, o)| : (t, u) \in T \times \omega \},$$

$$M_0 = \max \{ M(t) : t \in T \}.$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, V_t(x), \lambda), \quad t \in T$$

$$(2) \quad A_0 x(o) + A_1 x(1) = a, \quad B_0 x(o) + B_1 x(1) = b; \quad D = A_0 B_1 - A_1 B_0 \neq 0,$$

где без ограничения общности будем считать, что $a B_1 = b A_1$.

Пусть выполнено неравенство

$$(3) \quad l_1 > 0$$

Рассмотрим операторы

$$\pi_0 = (P_0, \Pi_0); \quad \pi_0(Z_0) = (P_0(Z_0), \Pi_0(Z_0)), \quad Z_0 = (x, \lambda)$$

и

$$\pi_1 = (P_1, \Pi_1); \quad \pi_1(Z_1) = (P_1(Z_1), \Pi_1(Z_1)), \quad Z_1 = (y, \lambda)$$

определенные на топологических произведениях $\Omega_0 = X \times \Lambda$ и $\Omega_1 = Y \times \Lambda$ формулами

$$P_0(Z_0)(t) = \int_0^t f(s, V_s(x), \lambda) ds,$$

$$\Pi_0(Z_0) = \lambda + \mu \left(I - \int_0^1 f(t, V_t(x), \lambda) dt \right)$$

и

$$P_1(Z_1)(t) = f(t, V_t(v), \lambda),$$

$$\Pi_1(Z_1) = \lambda + \mu \left(I - \int_0^1 f(t, V_t(v), \lambda) dt \right),$$

где

$$v: t \mapsto v(t) = \int_0^t y(s) ds,$$

$$\mu = 2(L_1 - l_1)^{-1} \sin \varphi(t, u, \lambda_1, \lambda_2) = \mu_1 \sin \varphi(t, u, \lambda_1, \lambda_2),$$

$$I = D^{-1}(bA_0 - aB_0).$$

После некоторых выкладок находим, что операторные уравнения $Z_0 = \pi_0(Z_0)$ или $Z_1 = \pi_1(Z_1)$ эквивалентны краевой задаче (1), (2).

Далее будем предполагать, что выполнено условие (A): Функционал V_t непрерывен на множестве X при $t \in T$ в следующем смысле [2] — для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $x, \bar{x} \in X$, удовлетворяющих условию

$$\|x - \bar{x}\| < \delta, \quad \|x\| = \max \{|x(t)| : t \in T\}$$

и для всех $t, \bar{t} \in T$, удовлетворяющих условию $|t - \bar{t}| < \delta$, выполнены неравенства $|V_t^i(x) - V_{\bar{t}}^i(\bar{x})| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, m$.

4. Существование решений краевой задачи

Теорема 1. Пусть выполнены условия (A) и (3). Пусть кроме того

$$(4) \quad |f(t, u, \lambda)| \leq M(t); \quad \beta + l_1^{-1}I \leq \alpha.$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение $x \in X$.

Доказательство. В силу условия (A) оператор π_1 непрерывен на Ω_1 , а из теорем Тихонова, Асколи и Больцано — Вейерштрасса следует, что множество $\pi_1(\Omega_1) = P_1(\Omega_1) \times \Pi_1(\Omega_1)$ — компактное пространство в соответствующей индуцированной топологии.

Покажем, что $\pi_1(\Omega_1) \subset \Omega_1$. Непосредственно имеем $P_1(\Omega_1) \subset Y$ и $V \in X$ для каждого $Z_1 \in \Omega_1$. Для $Z_1 \in \Omega_1$ в силу теоремы о средноинтегральном значении и неравенства (3) получаем

$$\Pi_1(Z_1) = \lambda + \mu(I - f(\bar{t}, V_i(v), \lambda)), \quad \bar{t} \in T$$

и

$$|\Pi_1(Z_1)| \leq \frac{L_1 - l_1}{L_1 + l_1} |\lambda| + \mu_1(I + |f(\bar{t}, V_i(v), 0)|) \leq \frac{L_1 - l_1}{L_1 + l_1} \alpha + \frac{2l_1 \alpha}{L_1 + l_1} = \alpha,$$

т. е. $\Pi_1(\Omega_1) \subset A$ и $\pi_1(\Omega_1) \subset \Omega_1$. Ссылка на принцип Шаудера о неподвижной точке завершает доказательство теоремы.

Случай когда функционал V_t зависит и от λ ($V_t = V_{t,\lambda}$) рассматривается аналогично, если при определении функции φ , $f(t, u, \lambda_1)$ и $f(t, u, \lambda_2)$ заменить на $f(t, V_{t,\lambda_1}(x), \lambda_1)$ и $f(t, V_{t,\lambda_2}(x), \lambda)$, а при определении $L(t)$ и $l(t)$ брать дополнительно $\supremum$ и $\infimum$ по $x \in X$.

Рассмотрим конкретный вид функционала V_t :

$$(5) \quad V_t(x) = \int_0^1 h(s, t, x(s), \lambda) d_s g(s, t, x(t), \lambda),$$

где $h=(h^1, \dots, h^m)$, $g=\text{diag}(g^1, \dots, g^m)$, а дифференцирование ведется по s . Предположим, что выполнена следующая группа условий (Б):

Б1. Функции h и g определены в области $T^2 \times \Xi \times \Lambda$.

Б2. Функция $h(s, t, \xi, \lambda)$ непрерывна по s, t, ξ и удовлетворяет условию Липшица по λ с достаточно малой константой.

Б3. Функции

$$\bigvee_{s=0}^1 g^i(s, t, \xi, \lambda), \quad i = 1, \dots, m,$$

непрерывны по t, ξ и удовлетворяют условию Липшица по λ с достаточно малой константой.

При выполнении условий (Б) для функционала (5) будет иметь место условие (А). Таким образом справедлива следующая.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (Б) и (3). Пусть кроме того

$$|f(t, u, \lambda)| \leq M(t), \quad \beta + l_1^{-1}I < \alpha.$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение $x \in X$.

5. Единственность решения краевой задачи

Рассмотрим частный случай функционала (5):

$$V_t(x) = (x(\tau_1(t, x(t))), \dots, x(\tau_m(t, x(t))))$$

(аналогичные результаты будут иметь место и когда функции τ_i зависят от λ).

Предположим, что в областях $T \times \Xi^m \times \Lambda$ и $T \times \Xi$ функции f и $0 < \tau_i < 1$, $i=1, \dots, m$, удовлетворяют условиям Липшица

$$(6) \quad \begin{aligned} |f(t, u, \lambda) - f(t, \bar{u}, \lambda)| &\leq \sum_{i=1}^m N_i |u^i - \bar{u}^i|, \\ |\tau_i(t, \xi) - \tau_i(t, \bar{\xi})| &\leq v_i |\xi - \bar{\xi}|. \end{aligned}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть выполнены условия (3), (4) и (6). Пусть кроме того

$$q_0 = N_0 \left(1 + \frac{L_1}{l_1} \right) < 1,$$

где

$$N_0 = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m N_i (\tau_i(t, \xi) + M_0 v_i t) : (t, \xi) \in T \times \Xi \right\}.$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $x \in X$. Доказательство. Введем в Ω_1 норму

$$\|Z_1\|_1 = \|y\| + q|\lambda|, \quad \|y\| = \max \{|y(t)| : t \in T\},$$

где $q = \frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{L_1}{l_1} + \frac{1}{N_0} - 1 \right)$. Пусть $Z_1, \bar{Z}_1 = (\bar{y}, \bar{\lambda}) \in \Omega_1$. Тогда

$$\|P_1(Z_1) - P_1(\bar{Z}_1)\| \leq \sum_{i=1}^m N_i |v(\tau_i) - \bar{v}(\bar{\tau}_i)| + L_1 |\lambda - \bar{\lambda}| \leq N_0 \|y - \bar{y}\| + L_1 |\lambda - \bar{\lambda}|$$

и

$$\begin{aligned} |\Pi_1(Z_1) - \Pi_1(\bar{Z}_1)| &\leq \mu_1 \sum_{i=1}^m N_i |v(\tau_i) - \bar{v}(\bar{\tau}_i)| + \frac{\mu_1(L_1 - l_1)}{2} |\lambda - \bar{\lambda}| \leq \\ &\leq \mu_1 N_0 \|y - \bar{y}\| + \frac{\mu_1(L_1 - l_1)}{2} |\lambda - \bar{\lambda}|. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\|\pi_1(Z_1) - \pi_1(\bar{Z}_1)\|_1 \leq N_0(1 + \mu_1 q) \|y - \bar{y}\| + \left(L_1 + \frac{\mu_1 q}{2} (L_1 - l_1) \right) |\lambda - \bar{\lambda}|.$$

Так как

$$N_0(1 + \mu_1 q) = \frac{N_0}{2} \left(\frac{L_1}{l_1} + \frac{1}{N_0} + 1 \right) = \frac{1}{2} (1 + q_0) < 1$$

и

$$\begin{aligned} L_1 + \frac{\mu_1 q}{2} (L_1 - l_1) &= \frac{q}{h+1} \left(\frac{4h}{h-1+q_1^{-1}(h+1)} + h-1 \right) = \\ &= q \frac{h(1+q_0)+q_0-1}{h(1+q_0)+1-q_0} < q, \quad h = \frac{L_1}{l_1}, \end{aligned}$$

то π_1 оператор сжатия на множестве Ω_1 . Отсюда в силу принципа Банаха получаем утверждение теоремы.

Отметим, что при применении оператора π_0 в условиях теоремы 3 пришлось бы принять

$$N_0 = \sum_{i=1}^m N_i (1 + M_0 v_i).$$

Отсюда следует, что в краевых задачах с отклоняющимся аргументом надо использовать операторы вида π_1 .

Введением другой метрики в множестве Ω_1 результаты теоремы 3 можно несколько улучшить. Точнее, имеет место

Теорема 4. Пусть выполнены условия (3), (4) и (6). Пусть кроме того

$$q_0^* = N(q_0) \left(1 + \frac{L_1}{l_1} \right) < 1,$$

где

$$N(q) = \frac{1}{q} \max \left\{ \sum_{i=1}^m N_i (e^{q\tau_i(t, \xi)} - 1 + M_0 v_i (e^{q\tau} - 1)) e^{-q\tau} : (t, \xi) \in T \times \Xi \right\}$$

и

$$N(\varrho_0) = \min \{N(\varrho) : 0 < \varrho < \infty\}.$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $x \in X$.

Доказательство теоремы 4 проводится вполне аналогично как в теореме 3 при использовании нормы

$$\|Z_1\|_1^* = \|y\|^* + q^* |\lambda|, \quad \|y\|^* = \max \{|y(t)| e^{\varrho_0 t} : t \in T\},$$

где

$$q^* = \frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{L_1}{l_1} + \frac{1}{N(\varrho_0)} - 1 \right),$$

и при учетывании, что $|y(t)| \leq \|y\|^* e^{\varrho_0 t}$.

Литература

- [1] К. Т. Ахмедов, Н. А. Сваричевская, М. А. Ягубов, Приближенное решение двухточечной краевой задачи с параметром методом осреднения функциональных поправок. *Докл. АН Азерб. ССР, т. XXIX, № 8, 1973.*
- [2] В. П. Рудаков, К вопросу существования решений дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от решения. *Дифференциальные уравнения, т. 7, № 11, 1971.*

ВЫСШИЙ МАШИННО—ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА — СОФИЯ
ПЛОВДИВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ П. ХИЛЕНДАРСКОГО

(Поступила: 24. XII. 1974.)