

Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung im Finslerschen Raum II

Von ENDRE SZOLCSÁNYI (Budapest)

In einer meiner vorigen Arbeiten¹⁾ habe ich folgendes gezeigt: wenn zu jedem Linienelement (x, y) des Finslerschen Raumes F_n wenigstens vier Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung existieren, welche zu zweien orthogonal sind, dann ist auch der Raum F_n ein Riemannscher Raum. In dieser Arbeit werden wir zeigen, wenn zu jedem Linienelement (x, y) des Raumes F_n mindestens eine tangentielle Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung existiert, dann ist auch der Raum F_n ein Riemannscher Raum.

§ 1. Der Finslersche Raum. Die Hyperflächen.

Unter einem Finslerschen Raum F_n (eine Punktmannigfaltigkeit) versteht man in der Cartanschen Theorie der Finslerschen Räume eine $2n-1$ dimensionale Linienelementmannigfaltigkeit²⁾, auf dem eine Grundfunktion $\mathcal{L}(x, y)$ definiert ist, welche zu einem regulären Variationsproblem führt. Die Grundfunktion sei mindestens viermal stetig differenzierbar und es sei in der Veränderlichen y in erster Ordnung positiv homogen. (Hier sind $x=(x^1, \dots, x^n)$ und $y=(y^1, \dots, y^n)$.) Es ist bekannt³⁾, daß die partielle Derivation nach den Veränderlichen y^k zum Tensor einen Tensor anordnet, und die Ordnung der Homogenität vermindert sich um 1.

Der metrische Grundtensor⁴⁾, ⁵⁾ ist

$$(1.1) \quad g_{ik} := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^k}.$$

Die Funktionen $g_{ik}=g_{ik}(x, y)$ sind in der y in 0-ter Ordnung homogen, und es gilt

$$(1.2) \quad g_{ij} = g_{ji}.$$

Der Torsionstensor des Raumes ist

$$(1.3) \quad A_{ijk} = \mathcal{L} C_{ijk},$$

¹⁾ E. SZOLCSÁNYI [3].

²⁾ E. CARTAN [1].

³⁾ H. RUND [2] S. 15.

⁴⁾ Siehe E. CARTAN [1] und H. RUND [2]

⁵⁾ Die lateinischen Indizes laufen von 1 bis n , die griechischen von 1 bis $n-1$.

wo

$$(1.4) \quad C_{ijk} := \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 \mathcal{L}^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}$$

ist.

Es ist klar, daß C_{ijk} und A_{ijk} vollständig symmetrisch sind. Wenn l den Einheitsvektor bezeichnet, der im Linienelement (x, y) definiert ist und zu y parallel ist, dann gilt

$$(1.5) \quad l^i = \frac{y^i}{\mathcal{L}},$$

und

$$(1.6) \quad l_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^i}.$$

Es bestehen noch auch die Beziehungen:

$$(1.7) \quad C_{ijk} l^i = C_{ijk} l^j = C_{ijk} l^k = 0,$$

$$(1.8) \quad A_{ijk} l^i = A_{ijk} l^j = A_{ijk} l^k = 0.$$

Der Raum F_n ist dann und nur dann Riemannscher Raum, wenn die Bedingungen

$$(1.9) \quad C_{ijk} = 0,$$

$$(1.10) \quad A_{ijk} = 0$$

und

$$(1.11) \quad A_i = 0,$$

welche miteinander äquivalent sind, gelten. Hier ist

$$(1.12) \quad A_i = \sum_{j=1}^n A_i^j j.$$

Wir nehmen an, daß die Hyperfläche F_{n-1} des Raumes F_n durch die parametrische Form

$$(1.13) \quad x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1}),$$

oder kurz⁶⁾

$$(1.14) \quad x^i = x^i(u)$$

gegeben werden kann. Wir bezeichnen das Linienelement mit (u, v) , wenn es zur Hyperfläche F_{n-1} gehört. Das Linienelement (u, v) der Hyperfläche fällt mit dem Linienelement (x, y) des Raumes zusammen, wenn

$$(1.15) \quad x^i = x^i(u^x)$$

und

$$(1.16) \quad y^i = y_\alpha^i v^\alpha$$

erfüllt sind, wo

$$(1.17) \quad x_\alpha^i := \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$$

⁶⁾ S. die Fußnote ⁵⁾.

ist. Wir nehmen an, daß

$$(1.18) \quad \text{rang } \|x_\alpha^i\| = n-1$$

ist. Aus der Formel (1.16) folgt, daß

$$(1.19) \quad \frac{\partial y^i}{\partial v^\alpha} = x_\alpha^i.$$

Es ist natürlich daß

$$(1.20) \quad \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial v^\beta} = 0$$

ist. Bezeichnet ξ_α den Vektor $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$, dann spannen diese Vektoren den Tangentialraum $T_{(x)}F_{n-1}$ auf. Sie bilden eine Basis in $T_{(x)}F_{n-1}$. Wenn n der Normal-einheitsvektor der Hyperfläche in (u) ist, der im Linienelement (u, v) definiert wird, d. h. gelten die Beziehungen

$$(1.21) \quad \langle n, n \rangle = 1$$

$$(1.22) \quad \langle n, \xi_\alpha \rangle = 0,$$

dann bilden $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, n$ eine Basis von $T_{(x)}F_n$, wo das Symbol $\langle, \rangle$ das innere Produkt im Raum F_n bezeichnet. Wir benötigen noch die zur Basis $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, n$ duale Basis. Wir werden diese mit $\xi^{*\alpha}$ ($\alpha=1, \dots, n-1$) und mit n^* bezeichnen. Natürlich gelten die Relationen:

$$(1.23) \quad \langle \xi_\alpha, \xi^{*\beta} \rangle = \delta_\alpha^\beta,$$

$$(1.24) \quad \langle \xi_\alpha, n^* \rangle = 0,$$

$$(1.25) \quad \langle n, \xi^{*\alpha} \rangle = 0,$$

$$(1.26) \quad \langle n, n^* \rangle = 1.$$

Aus den Formeln (1.21)–(1.26) folgen⁷⁾

$$(1.27) \quad x_\alpha^i x_i^\beta = \delta_\alpha^\beta$$

und

$$(1.28) \quad x_\alpha^i x_j^\alpha = \delta_j^i - n^i n_j.$$

Dann ist $\xi^{*\alpha} = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$.

Der metrische Grundtensor⁸⁾ $\bar{g}$ der Hyperfläche

$$(1.29) \quad \bar{g} = pr g$$

ist. Deshalb gilt

$$(1.30) \quad g_{\alpha\beta} = x_\alpha^i x_\beta^j g_{ij}.$$

Ähnlich bestehen die Relationen:

$$(1.31) \quad \bar{C} = pr C,$$

$$(1.32) \quad \bar{A} = pr A,$$

^{7), 8)} E. SZOLCSÁNYI [3] und O. VARGA [4].

d. h.

$$(1.33) \quad C_{\alpha\beta\gamma} = x_{\alpha}^i x_{\beta}^j x_{\gamma}^k C_{ijk},$$

$$(1.34) \quad A_{\alpha\beta\gamma} = x_{\alpha}^i x_{\beta}^j x_{\gamma}^k A_{ijk}.$$

Es gilt noch

$$(1.35) \quad A_{\alpha\beta\gamma} = LC_{\alpha\beta\gamma},$$

wo

$$(1.36) \quad L(u, v) := \mathcal{L}(x(u), y(u, v))$$

ist. Die Darstellung⁹⁾ des Tensors C ist in Basis $(\zeta^{*1}, \dots, \zeta^{*n-1}, \eta^*)$:

$$(1.37) \quad \begin{aligned} C = & C_{\alpha\beta\gamma} \zeta^{*\alpha} \otimes \zeta^{*\beta} \otimes \zeta^{*\gamma} + C_{n\beta\gamma} n^* \otimes \zeta^{*\beta} \otimes \zeta^{*\gamma} + C_{\alpha n\gamma} \zeta^{*\alpha} \otimes n^* \otimes \zeta^{*\gamma} + \\ & + C_{\alpha\beta n} \zeta^{*\alpha} \otimes \zeta^{*\beta} \otimes n^* + C_{nn\gamma} n^* \otimes n^* \otimes \zeta^{*\gamma} + C_{n\beta n} n^* \otimes \zeta^{*\beta} \otimes n^* + \\ & + C_{\alpha nn} \zeta^{*\alpha} \otimes n^* \otimes n^* + C_{nnn} n^* \otimes n^* \otimes n^*. \end{aligned}$$

Damit ist die Darstellung des Tensors A vollständig analog. Endlich besteht auch die Beziehung

$$(1.38) \quad g_{ij} = x_i^{\alpha} x_j^{\beta} g_{\alpha\beta} + n_i n_j.$$

§ 2. Finslersche Räumen, in welchen zu allen Linienelementen tangentielle Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung existiert.

Sei (x, y) ein beliebiges Linienelement im Raum F_n und F_{n-1} eine Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung, welche das Linienelement berührt. Wir bezeichnen mit g_{ij} bzw. mit $g_{\alpha\beta}$ des Grundtensors des Raumes F_n bzw. der Hyperfläche F_{n-1} im Linienelement $(x, y) = (u, v)$. Gemäß der Formel (1.38) gilt es

$$(2.1) \quad g_{ij} = x_i^{\alpha} x_j^{\beta} g_{\alpha\beta} + n_i n_j.$$

Das erste Glied der Gleichung (2.1) ist von v unabhängig. Aus (2.1) und (1.4) folgt

$$(2.2) \quad 2C_{ijk} = n_{ik} n_j + n_i n_{jk},$$

wo

$$(2.3) \quad n_{ik} := \frac{\partial n_i}{\partial v^k}$$

ist.

Vertauschen wir die Indizes i, k und bilden wir die Differenz $2C_{ijk} - 2C_{kij}$. Zuzufolge der Symmetrie des Tensors C bekommen wir, daß

$$(2.4/a) \quad (n_{ik} - n_{ki}) n_j + n_i n_{jk} - n_k n_{ij} = 0$$

ist. Vollständig ähnlicherweise bekommen wir (mit dem Vertauschen der Indizes j, k):

$$(2.4/b) \quad (n_{jk} - n_{kj}) n_i + n_j n_{ik} - n_k n_{ij} = 0.$$

⁹⁾ S. E. SZOLCSÁNYI [3] (2.21) und O. VARGA [4] (2.11)

Die Differenz von (2.4/a) und (2.4/b) ist

$$(2.5) \quad n_{kj}n_i - n_{ki}n_j = 0$$

gleich.

Lemma 1. *Es sei (x, y) ein beliebiges Linienelement des Raumes F_n . Wir nehmen die Existenz einer Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung an, die das Linienelement (x, y) berührt. Wenn $t \in T_{(x)}F_{n-1}$ gilt, dann folgt*

$$(2.6) \quad t^i C_{ijk} = 0$$

wo $t = t^i e_i$ ist.

BEWEIS. Zuzufolge unserer Bedingung ist $\langle t, n \rangle = 0$. Aus (2.5) folgt

$$(n_{ki} t^i) n_j = 0.$$

Wenn wir mit n_j diese Formel überschieben, dann bekommen wir aus (1.26) die Beziehung

$$(2.7) \quad n_{ki} t^i = 0.$$

Dies überschieben wir mit t^k , dann besteht nach (2.7) die Relation

$$2C_{ijk} t^k = (n_{ik} t^k) n_j + n_i (n_{jk} t^k) = 0.$$

Aus dieser Relation — zufolge der Symmetrie des Tensors C — folgt

$$(2.8) \quad C_{ijk} t^i = C_{ijk} t^j = C_{ijk} t^k = 0.$$

Anmerkungen: 1°. Zuzufolge (1.3) gilt es

$$(2.9) \quad A_{ijk} t^i = A_{ijk} t^j = A_{ijk} t^k = 0$$

2°. Es ist klar, daß noch auch

$$(2.10) \quad C_{ijk} x_\alpha^i = C_{ijk} x_\beta^j = C_{ijk} x_\gamma^k = 0,$$

$$(2.11) \quad A_{ijk} x_\alpha^i = A_{ijk} x_\beta^j = A_{ijk} x_\gamma^k = 0$$

gelten.

3°. Die Formel (2.10) bedeutet: wenn $t \in T_{(x)}F_{n-1}$ ein beliebiger Vektor ist, dann ist die Verjüngung des Tensors

$$C \otimes t$$

(nebst zwei beliebigen Indizes) gleich 0.

Lemma II. *Nehmen wir an, daß zu einem Linienelement (x, y) des Finslerschen Raumes F_n mindestens eine tangentielle Hyperfläche F_{n-1} mit Riemannscher Maßbestimmung existiert. Dann ist*

$$(2.12) \quad C = C_{nnn} n^* \otimes n^* \otimes n^*.$$

Anmerkung: Wenn wir die Vargasche Konvention einführen

$$(2.13) \quad C_{\times \times \times} = C_{pqr} n^p n^q n^r,$$

dann kann die Formel (2.12) in der Form

$$C_{ijk} = C_{\times \times \times} n_i n_j n_k$$

geschrieben¹⁰⁾ werden.

BEWEIS. Betrachten wir die Darstellung (1.37) des Tensors C . In diesem Falle ist der Wert der Form

$$\xi_{\bar{\alpha}} \otimes n \otimes \xi_{\bar{\gamma}}$$

auf dem Tensor C nach (1.23)–(1.26)

$$0 = C_{\bar{\alpha} n \bar{\gamma}}$$

gleich. Da $\bar{\alpha}$ und $\bar{\gamma}$ beliebig sind, deshalb ist

$$(2.14/a) \quad C_{\alpha n \gamma} = 0.$$

Ähnlich bekommen wir mit der Verwendung des Tensors

$$n \otimes \xi_{\bar{\beta}} \otimes \xi_{\bar{\alpha}} \quad \text{bzw.} \quad \xi_{\bar{\alpha}} \otimes \xi_{\bar{\beta}} \otimes n,$$

daß

$$(2.14/b) \quad C_{n \beta \alpha} = C_{\alpha \beta n} = 0$$

ist. Da der Raum F_{n-1} Riemannscher ist, deshalb gilt

$$(2.14/c) \quad C_{\alpha \beta \gamma} = 0.$$

Wir bekommen, daß

$$C = C_{n n \gamma} n^* \otimes n^* \otimes \xi^{* \gamma} + C_{n \beta n} n^* \otimes \xi^{* \beta} \otimes n^* + \\ + C_{\alpha n n} \xi^{* \alpha} \otimes n^* \otimes n^* + C_{n n n} n^* \otimes n^* \otimes n^*$$

ist. Mit der Hilfe der Methode, die wir in Anfang des Beweises angewandt haben, aber mit den Anwendungen der Tensoren $n \otimes n \otimes \xi_{\bar{\gamma}}$; $n \otimes \xi_{\bar{\beta}} \otimes n$ und $\xi_{\bar{\alpha}} \otimes n \otimes n$ bekommen wir:

$$(2.16) \quad C_{n n \gamma} = C_{n \beta n} = C_{\alpha n n} = 0.$$

Aus (2.15) und (2.16) folgt schon unsere Behauptung.

Anwendung: Die Gleichung $C_{\alpha \beta \gamma} = 0$ kann man mit der obigen Methode, mit Hilfe der Anwendung des Tensors $\xi_{\bar{\alpha}} \otimes \xi_{\bar{\beta}} \otimes \xi_{\bar{\gamma}}$, bekommen. Deshalb ist es genügend im Lemma II. anzunehmen, daß die Relation (2.6) gilt, und die Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung unnötig ist.

Lemma III. Sei F_{n-1} eine Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung, und nehmen wir $(x) = (x^1, \dots, x^n) \in F_{n-1}$ an. Wir betrachten die Menge der Linien-elementen (x, y) mit Zentrum (x) , die die Hyperfläche F_{n-1} berührt. Die Koordinaten C_{ijk} des Tensors C sind im ganzen Raume Funktionen der Linienelementen, d. h. $C_{ijk} = C_{ijk}(x, y)$ ist. Bezeichnen wir mit $\tilde{C}_{ijk}$ die Beschränkung der Funktion C_{ijk} auf die obige Linienelementmenge. In diesem Falle ist $\tilde{C}_{ijk} = \tilde{C}_{ijk}(v)$. Wir behaupten daß

$$(2.17) \quad \frac{\partial \tilde{C}_{ijk}}{\partial v^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n-1)$$

ist.

¹⁰⁾ S. O. VARGA [4] bzw. E. SZOLCSÁNYI [3].

BEWEIS. Es gilt in allen Linienelementen der Hyperfläche F_{n-1} nach (1.16)

$$(2.18) \quad y^l = x_\alpha^l v^\alpha.$$

Mit der Anwendung der Formel (1.19) bekommen wir

$$(2.19) \quad \frac{\partial \tilde{C}_{ijk}}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial \tilde{C}_{ijk}}{\partial y^l} \cdot \frac{\partial y^l}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^l} x_\alpha^l.$$

Zufolge (1.4) ist

$$(2.20) \quad \frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^l} x_\alpha^l = \frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^l} x_\alpha^k.$$

Aus (1.20) folgt

$$(2.21) \quad \frac{\partial}{\partial y^l} (C_{ijk} x_\alpha^k) = \frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^l} x_\alpha^k.$$

Die F_{n-1} ist ein Riemannscher Raum und $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) \in T_{(x)} F_{n-1}$, deswegen gilt nach dem Lemma I.

$$(2.22) \quad \frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^l} x_\alpha^k = 0.$$

Aus (2.22) und (2.19) folgt bereits die Behauptung des Lemmas.

Lemma IV. Wenn zu dem Linienelement $(x, y) \in F_n$ zwei orthogonale berührende Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung existieren, dann ist

$$(2.23) \quad C_{ijk}(x, y) = 0.$$

BEWEIS. Im Punkt (x) des Raumes F_n wählen wir das Koordinatensystem folgendermaßen: wir betrachten eine der Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung, die das Linienelement (x, y) berührt. Diese Hyperfläche bezeichnen wir mit F_{n-1}^1 und, wir nehmen an, daß die Tangentialvektoren der Parameterlinien dieser Hyperfläche $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ im Punkt (x) sind. Man kann annehmen, daß diese Vektoren eine orthonormierte Basis des Raumes $T_{(x)} F_{n-1}^1$ bilden. (Dies kann man mit einer Koordinatentransformation erreichen.) Sei n der Normaleinheitsvektor der Hyperfläche F_{n-1}^1 im (x) . In diesem Falle bilden die Vektoren $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, n$ eine orthonormierte Basis des Raumes $T_{(x)} F_n$. Wir bezeichnen mit F_{n-1}^2 die andere Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung, die das Linienelement (x, y) enthält. Man kann leicht mit einer neueren Koordinatentransformation erreichen, daß der Vektor ξ_k im Punkt (x) der Normaleinheitsvektor der Hyperfläche F_{n-1}^2 sei. In diesem Falle wird der Raum $T_{(x)} F_{n-1}^2$ durch die Vektoren $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n, n$ aufgespannt. Wir parametrisieren die F_{n-1}^2 so, daß die Tangenten der Parameterlinien die obigen Basisvektoren des Raumes $T_{(x)} F_{n-1}^2$ seien. Dann gilt die Darstellung (1.37) des Tensors C . Dem Lemma II. zufolge ((2.12)) ist

$$(2.24/a) \quad C = C_{nnn} n^* \otimes n^* \otimes n^*.$$

Wenn wir das Lemma II. auf die F_{n-1}^2 anwenden, bekommen wir:

$$(2.24/b) \quad C = C_{kkk} \xi^{*k} \otimes \xi^{*k} \otimes \xi^{*k}, \quad k \neq n.$$

Deshalb folgt aus (2.24/a) und (2.24/b), daß

$$(2.25) \quad C = 0$$

ist.

Endlich beweisen wir den folgenden

Satz. Wenn zu jedem Linielement (x, y) des Finslerschen Raumes F_n mindestens eine Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung existiert, die dieses Linielement berührt, dann ist der Raum F_n ein Riemannscher Raum.

BEWEIS. Sei (x, y) ein beliebiges Linielement, und F_{n-1}^1 eine tangentielle Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung. Wir bezeichnen mit n den Normalenheitsvektor der Hyperfläche F_{n-1}^1 in (x) . Zuzufolge des Lemmas III. ist der Tensor $\tilde{C}$ auf der Menge der Linielementen mit gemeinsamem Zentrum (x) eine Konstante, d.h.

$$(2.26) \quad \tilde{C}(x, y) = \text{const}$$

ist.

Jetzt betrachten wir das Linielement (x, n) . Nach unserer Bedingung existiert eine Hyperfläche F_{n-1}^2 mit Riemannscher Maßbestimmung, die das Linielement (x, n) berührt. Natürlich enthält der $T_{(x)}(F_{n-1}^1) \cap T_{(x)}(F_{n-1}^2)$ irgendeines Linielement (x, y') . Diesem Linielement passen sich wenigstens zwei orthogonale Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung an; wir haben sie mit F_{n-1}^1 und F_{n-1}^2 bezeichnet. Nun folgt aus dem Lemma IV. ((2.23)) daß

$$(2.27) \quad \tilde{C}(x, y') = 0.$$

ist. Aus den Formeln (2.26) und (2.27) folgt unsere Behauptung, weil $C(x, y) = \tilde{C}(x, y)$ im Definitionsbereich des Tensors $\tilde{C}$ ist.

Bemerkung: Im Beweis benutzen wir natürlich, daß $n \geq 3$ ist.

Literatur

- [1] E. CARTAN, Les espaces de Finsler. *Paris*, 1934.
- [2] H. RUND, The differential geometry of Finsler spaces. *Berlin*, 1959.
- [3] E. SZOLCSÁNYI, Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung im Finslerschen Raum. *Publ. Math. (Debrecen)* **22**. (1975), 133—150.
- [4] O. VARGA, Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen. *Deutsche Math.* **6**. (1941), 192—212.

(Eingegangen am 3. Juli 1976.)