

# Über die durch Kurven bestimmten Sektionalkrümmungen der Finslerschen und Weylschen Räume

Von ARTHUR MOÓR (Sopron)

## § 1. Einleitung

Eine Kurve im  $n$ -dimensionalen Finslerraum werden wir als die Mannigfaltigkeit der tangentialen Linienelemente auffassen, d.h. es ist

$$(1.1) \quad x^i = x^i(s), \quad x'^i \equiv \frac{dx^i}{ds} = l^i(s), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo der Parameter „ $s$ “ jetzt und im folgenden die Bogenlänge bedeutet. Die Kurve ist im wesentlichen durch die  $(n-1)$  Krümmungen  $\kappa_{(p)}$  bestimmt, wo der Index „ $p$ “ die Zahlen  $1, 2, \dots, (n-1)$  durchläuft, da eine Kurve auf Grund der Frenetformeln eben durch  $(n-1)$  Invarianten charakterisiert werden kann.

In diesem Aufsatz wollen wir das Problem untersuchen, ob inwieweit die Krümmungen  $\kappa_{(p)}$  durch den Riemannschen Krümmungstensor<sup>1)</sup>  $R_0^j{}_{0m}$ , bzw. durch den Krümmungsskalar des Raumes, d. h. durch

$$(1.2) \quad \mathfrak{R}(x, x') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1} R_0^j{}_{0j}$$

bestimmt werden können, wenn der Raum ein Raum von skalarer Krümmung ist (vgl. [1], § 13.); das bedeutet übrigens für den Krümmungstensor die Form:

$$(1.3) \quad R_{0j0m} = \mathfrak{R}(x, x')(g_{jm} - l_j l_m).$$

In [1] steht statt  $R_0^j{}_{0m}$  immer der Tensor  $K_0^j{}_{0m}$ ; es ist zwar  $R_{ijkm} \neq K_{ijkm}$ , doch es gilt schon:

$$R_{0jkm} \equiv K_{0jkm}.$$

Wir werden immer den Tensor  $R_{ijkm}$  benutzen, da dieser eine unmittelbare Verallgemeinerung des Riemannschen Krümmungstensors der Punkträume ist (vgl. [2], §. 13 insbesondere die Formeln (XIX) und (XIX')). Wir bemerken hier: die

<sup>1)</sup> Der Index „ $0$ “ bedeutet — wie gewöhnlich — die Überschiebung mit dem Vektor  $l^i = x'^i F^{-1}$ .

Annahme, daß der Raum von skalarer Krümmung ist, keine wesentliche Beschränkung bedeutet. Im allgemeinen Fall wird aber statt des Krümmungsskalars  $\mathfrak{R}(x, x')$  der Krümmungsmaß  $\mathfrak{R}(x, x', Y)$  in den Formeln vorkommen (vgl. z. B. Formeln (3.1)).

Das Problem, die Krümmung  $\kappa_{(p)}$  der Kurven mit der Krümmung des  $n$ -dimensionalen Finslerraumes in Zusammenhang zu bringen, ist im Falle der Unterräume gelöst. Wir verweisen auf die Gauß-schen, Codazzischen und Kühn-schen Gleichungen (vgl. [5], Kap V. § 4.). Nach unserem Wissen ist aber dieses Problem für die Krümmungen einer Raumkurve des  $n$ -dimensionalen Finslerraumes nicht untersucht worden.

Dementsprechend wollen wir erstens die Krümmungen  $\kappa_{(p)}$  der Raumkurven in Finslerräumen durch den Krümmungsskalar (1.2) und durch den Krümmungstensor (1.3) ausdrücken und dann das analoge Problem in Weylschen Linien-elementräumen (vgl. [4]) behandeln. Die Beweise werden wir nur für die Weylschen Räume im Paragraphen 6 angeben, da daraus die Resultate der Finslerräume durch Nullsetzen eines Vektors einfach folgen.

Die Weylschen Linienelementräume sind durch die Relationen

$$\nabla_k g_{ij} = \gamma_k g_{ij}, \quad \bar{\nabla}_k g_{ij} = \gamma_k^* g_{ij}$$

gekennzeichnet, wo  $\nabla_k$  und  $\bar{\nabla}_k$  die beiden fundamentalen kovarianten Ableitungen und  $\gamma_k, \gamma_k^*$  die Rekurrenzvektoren des metrischen Grundtensors  $g_{ij}$  sind. Im folgenden werden wir annehmen, daß  $\gamma_k^* \equiv 0$  ist, wodurch der Raum zum Fall der Punkträume, d. h. zum klassischen Weylschen Raum (vgl. [6]) analoge Struktur haben wird. Es kann sogar behauptet werden, daß unsere Resultate auch in den Punkträumen bestehen, falls statt des Vektors  $l^i$ , der Tangentenvektor  $dx^i/ds$  gesetzt wird.

Das invariante Differential von  $g_{ij}(x, x')$  wird demnach die Form:

$$(1.4) \quad \frac{Dg_{ij}}{Ds} = (\nabla_k g_{ij}) \frac{dx^k}{ds} = \gamma_k \frac{dx^k}{ds} g_{ij} = \gamma_0 g_{ij}$$

erhalten. Für  $\gamma_k \equiv 0$  bekommt man den Finslerraum, möglicherweise einen allgemeineren, aber metrischen Linienelementraum, dessen metrischer Fundamentaltensor  $g_{ij}(x, x')$  „a-priori“ angegeben, und nicht aus einer Grundfunktion  $F(x, x')$  (vgl. [2], Formel (VI.)) abgeleitet ist (vgl. [3], §§ 1, 2 und [3a], die eine unmittelbare Verallgemeinerung von [3] ist).

## § 2. Fundamentalinvarianten der Kurven und Finslerräume

Für eine Kurve von der Form (1.1) gelten in den Finslerräumen die Formeln von Frenet. Wir bezeichnen durch  $\eta_{(j)}^i$  die Vektoren:

$$(2.1) \quad \eta_{(1)}^i \stackrel{\text{def}}{=} l^i = x'^i, \quad \eta_{(p)}^i \stackrel{\text{def}}{=} (D_{p-1} D_p)^{-1/2} \begin{bmatrix} (1, 1) \dots (1, p-1) \zeta_{(1)}^i \\ \vdots \\ (p, 1) \dots (p, p-1) \zeta_{(p)}^i \end{bmatrix}$$

wo  $p=2, 3, \dots, n$ ; und

$$(2.2a) \quad D_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad D_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} (1, 1) \dots (1, k) \\ \dots \dots \dots \\ (k, 1) \dots (k, k) \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$(2.2b) \quad (p, q) \stackrel{\text{def}}{=} g_{kj} \zeta_{(p)}^k \zeta_{(q)}^j, \quad (p, q = 1, 2, \dots, n)$$

$$(2.3) \quad \zeta_{(1)}^i \stackrel{\text{def}}{=} l^i, \quad \zeta_{(p)}^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D \zeta_{(p-1)}^i}{D_s} \quad (p = 2, \dots, n).$$

Die Vektoren  $\vec{\eta}_{(k)}$  bilden ein orthogonales und normiertes  $n$ -Bein, wie es nach bekannten Theorien leicht verifiziert werden kann (vgl. [5], Kapitel V. § 1. Wir bemerken hier, daß die Formeln von  $D_p$  und  $D\eta_{(p)}^i$  auf S. 153 von [5], auch für  $p=1$  gelten!).

Die Formeln von Frenet sind demnach

$$(2.4) \quad \frac{D\eta_{(p)}^i}{D_s} = -\kappa_{(p-1)} \eta_{(p-1)}^i + \kappa_{(p)} \eta_{(p+1)}^i \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

mit

$$(2.5) \quad \kappa_{(0)} \equiv \kappa_{(n)} \equiv 0, \quad \kappa_{(p)} = \frac{\sqrt{D_{p-1} D_{p+1}}}{D_p}, \quad (p = 1, 2, \dots, n-1).$$

*Bemerkung.*  $\eta_{(0)}^i$  und  $\eta_{(n+1)}^i$  sind nicht durch (2.1) definiert, aber sie kommen in (2.4) wegen (2.5) in der Wirklichkeit nicht vor.

Wir benötigen noch im folgenden den Begriff des zur Zweistellung  $(l^i, Y^i)$  gehörigen Krümmungsmaßes der Finslerräume. Es ist:

$$(2.6) \quad \mathfrak{R}(x, x', Y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_{0j0m} Y^j Y^m}{(g_{jm} - l^j l^m) Y^j Y^m}.$$

(Vgl. [1], Formel (13.1)). Offenbar kann in (2.6) wegen der Homogeneität nullter Dimension in den  $x'^i$ , immer statt  $x'^i$  der Einheitsvektor  $l^i = x'^i F^{-1}$  gesetzt werden.

Der Finslerraum heißt einen Finslerraum skalarer Krümmung, falls in (2.6) das Krümmungsmaß von  $Y^i$  unabhängig ist. Dazu ist nach Berwald's Resultaten notwendig und hinreichend, daß der Krümmungstensor  $R_{0j0m}$  die Form (1.3) habe. Der Krümmungsskalar  $\mathfrak{R}(x, x')$  in (1.3) hat die Form (1.2), und stimmt mit dem durch (2.6) definierten Krümmungsmaß  $\mathfrak{R}(x, x', Y)$  überein, falls der Finslerraum von skalarer Krümmung ist (vgl. [1], § 13). Ist  $\mathfrak{R}$  eine Konstante, so ist der Raum ein Raum konstanter Krümmung. Das ist offenbar ein Spezialfall der Räume skalarer Krümmung.

### § 3. Zusammenhang der Krümmungen im Fall $n \geq 3$

Wir werden im folgenden die zur Zweistellungen  $(\vec{l}, D\vec{\eta}_{(p)})$  ( $p=1, 2, \dots, n$ ) gehörigen Krümmungsmaße bestimmen. Auf Grund der Definitionsformel (2.6) wird in Hinsicht auf (2.4) und (2.5)

$$(3.1a) \quad \mathfrak{R}(x, x', D\eta_{(1)}) = \frac{1}{\kappa_{(1)}^2} R_{0j0m} D\eta_{(1)}^j D\eta_{(1)}^m,$$

$$(3.1b) \quad \mathfrak{R}(x, x', D\eta_{(p)}) = \frac{R_{0j0m} D\eta_{(p)}^j D\eta_{(p)}^m}{\kappa_{(p-1)}^2 [1 - (l_j \eta_{(p-1)}^j)^2] + \kappa_{(p)}^2} \quad (p = 2, 3, \dots, n-1)$$

$$(3.1c) \quad \mathfrak{R}(x, x', D\eta_{(n)}) = \frac{1}{\kappa_{(n-1)}^2} R_{0j0m} D\eta_{(n)}^j D\eta_{(n)}^m, \quad n \geq 3,$$

wo wir Einfachheit halber  $D$  statt  $D/Ds$  geschrieben haben, und ferner noch beachteten, daß die durch (2.1)–(2.3) bestimmten Vektoren  $\vec{\eta}_{(p)}$  ein orthogonales und normiertes  $n$ -Bein bilden. Wir weisen darauf hin, daß in (3.1b) die Invariante  $\kappa_{(1)}$  nicht vorkommt, da für  $p=2$ :  $l_j \eta_{(1)}^j$  im Nenner vorkommt, und  $l_j \eta_{(1)}^j = 1$  ist, wie das auf Grund der Definition von  $\eta_{(1)}^j$  unmittelbar bestätigt werden kann.

Nehmen wir nun an, daß der Finslerraum ein Raum von skalarer Krümmung ist, d. h. daß Krümmungsmaß in den Formeln (3.1a)–(3.1c) ist von  $D\eta_{(p)}^i$  unabhängig, und stimmt mit dem durch (1.2) angegebenen Krümmungsskalar überein. Es soll  $\mathfrak{R}(x, x') \neq 0$  vorausgesetzt werden. Offenbar ist  $\mathfrak{R}(x, x')$  eine Konstante, wenn der Raum von konstanter Krümmung ist.

Führen wir nun die Bezeichnung;

$$(3.2) \quad \mathfrak{T}_{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} R_{0j0m} D\eta_{(p)}^j D\eta_{(p)}^m, \quad D \equiv D/Ds$$

ein, so ist  $\mathfrak{T}_{(p)}$  offenbar eine Invariante und statt der Formeln (3.1a)–(3.1c) können wir im Fall — wie wir es sehen werden — die Formeln

$$(3.3a) \quad \kappa_{(1)}^2 = \mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{T}_{(1)}, \quad \mathfrak{R} \equiv \mathfrak{R}(x, x') \neq 0,$$

$$(3.3b) \quad \kappa_{(2)}^2 = \mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{T}_{(2)},$$

$$(3.3c) \quad \kappa_{(p)}^2 = \mathfrak{R}^{-1} (\mathfrak{T}_{(p)} - \mathfrak{T}_{(p-1)} + \dots + (-1)^p \mathfrak{T}_{(2)}), \quad (p = 3, \dots, n-1),$$

$$(3.3d) \quad \kappa_{(n-1)}^2 = \mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{T}_{(n)}, \quad (n \geq 3)$$

schreiben. Die entsprechenden Formeln für den Fall  $n=2$  werden wir im Paragraphen 4 angeben.

Wir bemerken noch, daß in dem dreidimensionalen Fall, d. h. im Fall  $n=3$ , wegen (2.5)  $\kappa_{(3)}=0$  folgt, und somit erhält man aus der Formel (3.3c) für  $p=3$ :

$$\mathfrak{T}_{(3)} - \mathfrak{T}_{(2)} = 0.$$

Die Formel (3.3d) wird somit überflüssig.

Die Beweise der Formeln (3.3) geben wir im Paragraphen 6, aber für die Krümmungen der Weylschen Linienelementräume. Der behandelte Fall erhält man unmittelbar von den Invarianten der Weylschen Räume, wenn — wie in der Einleitung schon bemerkt wurde —  $\gamma_k=0$  gesetzt wird.

Bezüglich der Beweise der Formeln (3.3) bemerken wir hier nur soviel, daß sie auf Grund von (3.1) durch vollständige Induktion unmittelbar bewiesen werden könnten.

Aus den Formeln (3.3) folgt der

**Satz 1.** *In einem Finslerraum skalarer bzw. konstanter Krümmung sind die Krümmungen  $\kappa_{(p)}$  ( $p=1, 2, \dots, n-1$ ) der Kurven durch den Riemannschen Krümmungstensor und durch die invarianten Differentialquotienten der Vektoren des orthogonalen und normierten  $n$ -Beins  $\tilde{\eta}_{(p)}$  durch die Formeln (3.3) ausdrückbar.*

In den Formeln (3.3) sind nur  $(n-1)$  Krümmungen  $\kappa_{(p)}$ , hingegen  $n$  invariante  $\mathfrak{I}_{(j)}$  vorhanden. Doch sind die  $\mathfrak{I}_{(j)}$  voneinander nicht linear unabhängig. Wählt man nämlich in (3.3c)  $p=n-1$ , so folgt nach der Substitution von  $\kappa_{(n-1)}^2$  aus (3.3d) die Relation:

$$(3.5) \quad \mathfrak{I}_{(n)} - \mathfrak{I}_{(n-1)} + \mathfrak{I}_{(n-2)} + \dots + (-1)^n \mathfrak{I}_{(2)} \equiv 0, \quad n \geq 3.$$

In nächsten Paragraphen werden wir zeigen, daß diese Relation im allgemeinen für  $n \geq 2$  gültig ist.

Auf Grund der Formeln (3.1) und (3.3) folgt in Hinsicht auf die Bezeichnung (3.2) unmittelbar auch die folgende Ergänzung von Satz 1.:

**Satz 2.** *Die Systeme der Krümmungsinvarianten  $\kappa_{(p)}$  und  $\mathfrak{I}_{(p)}$  ( $p=1, 2, \dots, n-1$ ), die die Kurven charakterisieren, sind vollständig gleichberechtigt.*

Aus (3.1) und (3.2) folgt noch der

**Satz 3.** *Das Vorzeichen von  $\mathfrak{I}_{(p)}$  stimmt mit dem Vorzeichen von  $\mathfrak{R}(x, x')$  überein, falls der Finslerraum eine skalare Krümmung hat.*

#### § 4. Der zweidimensionale Fall

Die zweidimensionalen Finslerräume sind bekanntlich immer Räume skalarer Krümmung. In diesem Fall existiert nur eine Krümmung der Kurven, nämlich  $\kappa_{(1)}$ . Die Formeln von Frenet, d. h. (2.4) reduzieren sich auf:

$$(4.1) \quad \frac{Dl^i}{Ds} = \kappa_{(1)} \eta_{(2)}^i, \quad \frac{D\eta_{(2)}^i}{Ds} = -\kappa_{(1)} l^i.$$

Aus (3.1a) folgt wieder nach der Bezeichnung (3.2) die Formel (3.3a); die durch (3.2) definierte Invariante:  $\mathfrak{I}_{(2)}$  verschwindet aber auf Grund der zweiten Formel von (4.1) in Hinsicht auf die schiefsymmetrischen Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors (vgl. [2], § 38.). Die Formel (3.5) wird somit auch im zweidimensionalen Fall bestehen, aber sie reduziert sich auf  $\mathfrak{I}_{(2)}=0$ .

### § 5. Frenetformeln in Weylschen Räumen

Ein Weylscher Linienelementraum ist eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente  $(x, x')$ , in der die Metrik durch einen symmetrischen Fundamentaltensor  $g_{ik}(x, x')$  bestimmt ist, und in der das invariante Differential unserer Relation (1.4) genügt. Diese Theorie entwickelten wir in unserer Arbeit [4]; in den vorliegenden Untersuchungen spezialisieren wir die Übertragung von [4] durch die Bedingung  $\gamma_k^* = 0$ , wodurch das invariante Differential des metrischen Grundtensors immer die Form (1.4) haben wird, ebenso wie in den Punkträumen (vgl [6]). Die Größen sind aber selbstverständlich vom Linienelement  $(x, x')$  abhängig.

Die Kurven werden wir wieder als die Mannigfaltigkeit ihrer tangentialen Linienelemente auffassen, d. h. sie haben die Form (1.1), wo der Parameter „ $s$ “ wieder die Bogenlänge bedeutet. Wenn  $\eta_{(1)}^i \equiv l^i$  den Tangentenvektor der Kurve  $x^i(s)$  ist, so folgt aus

$$(5.1) \quad g_{ik}(x, x') \eta_{(1)}^i \eta_{(1)}^k = 1, \quad \eta_{(1)}^i \equiv l^i$$

nach einer Ableitung nach  $s$  im Hinblick auf (1.4):

$$2g_{ik}(x, x') \eta_{(1)}^i D\eta_{(1)}^k + \gamma_k dx^k = 0, \quad D \equiv D/Ds, \quad d \equiv d/ds.$$

Wenn wir noch die Relation  $l^k = dx^k/ds$  beachten, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$(5.1^*) \quad g_{ik}(x, x') \eta_{(1)}^i D\eta_{(1)}^k = -\frac{1}{2} \gamma_0(x, x'),$$

was die Orthogonalität der Vektoren  $\vec{\eta}_{(1)}$  und  $(D\vec{\eta}_{(1)} + \frac{1}{2} \gamma_0 \vec{\eta}_{(1)})$  in sich enthält. Aus (5.1\*) folgt nämlich

$$(5.2) \quad g_{ik}(x, x') \eta_{(1)}^i (D\eta_{(1)}^k + \frac{1}{2} \gamma_0 \eta_{(1)}^k) = 0.$$

Es kann somit

$$(5.3) \quad \eta_{(2)}^k \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{(1)}^{-1} (D\eta_{(1)}^k + \frac{1}{2} \gamma_0 \eta_{(1)}^k), \quad \eta_{(1)}^k \equiv l^k,$$

wo  $\kappa_{(1)}^{-1}$  einen Normierungsfaktor bezeichnet, als erster Normalvektor der Kurve genannt werden, wo

$$(5.3a) \quad \kappa_{(1)} = \sqrt{g_{ik} (D\eta_{(1)}^i + \frac{1}{2} \gamma_0 \eta_{(1)}^i) (D\eta_{(1)}^k + \frac{1}{2} \gamma_0 \eta_{(1)}^k)}$$

die erste Krümmung bezeichnet.

Aus (5.3) erhält man nun die erste Frenetformel der Weylschen Räume in der Form:

$$(5.4) \quad D\eta_{(1)}^k + \frac{1}{2} \gamma_0 \eta_{(1)}^k = \kappa_{(1)} \eta_{(2)}^k.$$

Im weiteren wird das folgende Lemma von Wichtigkeit sein:

**Lemma.** Ist  $\vec{\eta}$  ein Einheitsvektor, so steht  $(D\vec{\eta} + \frac{1}{2} \gamma_0 \vec{\eta})$  immer orthogonal zu  $\vec{\eta}$ , d. h. es ist:

$$(5.5) \quad g_{ik} \eta^i (D\eta^k + \frac{1}{2} \gamma_0 \eta^k) = 0, \quad g_{ik} \eta^i \eta^k = 1.$$

BEWEIS. Ebenso, wie bei dem Vektor  $\eta_{(1)}^i$  aus (5.1) die Relation (5.2) abgeleitet wurde, erhält man aus  $g_{ik}\eta^i\eta^k=1$  nach Ableitung nach „ $s$ “ die der Gleichung (5.2) entsprechende Formel für  $\eta^i$ , und das bedeutet schon das Bestehen von (5.5).

Die erste Frenetformel ist durch (5.4) angegeben, wo  $\tilde{\eta}_{(2)}$  und  $\kappa_{(1)}$  durch (5.3) und (5.3a) festgelegt sind. Die weiteren Vektoren und Krümmungsskalare können durch Rekursion, auf Grund des folgenden Satzes bestimmt werden:

**Satz 4.** Ist  $x^i(s)$  eine Raumkurve des  $n$ -dimensionalen Weylschen Raumes, die nicht in einem Unterraum enthalten ist, gilt ferner  $\kappa_{(0)}\equiv 0$ , sind endlich  $\tilde{\eta}_{(t)}$  ( $t=1, 2, \dots, p+1$ ) zueinander orthogonale Einheitsvektoren mit  $p\leq n-1$ , für die

$$(5.6) \quad D\eta_{(j)}^k + \frac{1}{2}\gamma_0\eta_{(j)}^k = -\kappa_{(j-1)}\eta_{(j-1)}^k + \kappa_{(j)}\eta_{(j+1)}^k \quad (j=1, 2, \dots, p)$$

bestehen (die  $\kappa_{(t)}$  ( $t=1, \dots, p$ ) bedeuten Skalare), so besteht (5.6) auch für  $j=p+1$ , falls  $\kappa_{(n)}\equiv 0$  gesetzt wird, und  $\tilde{\eta}_{(p+2)}$  einen, zu den Vektoren  $\tilde{\eta}_{(1)}, \dots, \tilde{\eta}_{(p+1)}$  orthogonalen Vektor bedeutet. ( $\tilde{\eta}_{(0)}$  und  $\tilde{\eta}_{(n+1)}$  kommen wegen  $\kappa_{(0)}\equiv \kappa_{(n)}\equiv 0$  nicht vor).

Die  $\tilde{\eta}_{(h)}$  ( $h=1, 2, \dots, n$ ) bilden ein orthonormiertes System der Vektoren. In (5.6) kommen somit nur  $n$  linear unabhängige Vektoren  $\tilde{\eta}_{(h)}$  vor.

BEWEIS. Vor allem bemerken wir, daß die Formel (5.6) für  $p=1$  wegen  $\kappa_{(0)}\equiv 0$  eben in (5.4) übergeht, d. h. (5.6) ist für  $p=1$  immer gültig. Dabei ist  $\kappa_{(1)}$  bzw.  $\tilde{\eta}_{(2)}$  durch die Formel (5.3a) bzw. (5.3) festgelegt. Nehmen wir nun an, daß (5.6) für irgendein  $p$  mit  $1 < p \leq n-1$  gültig ist. Nach unserem Lemma muß dann  $(D\eta_{(p+1)}^k + \frac{1}{2}\gamma_0\eta_{(p+1)}^k)$  zum Vektor  $\eta_{(p+1)}^k$  orthogonal sein, somit wird

$$(5.7) \quad D\eta_{(p+1)}^k + \frac{1}{2}\gamma_0\eta_{(p+1)}^k = \sum_{j=1}^p \alpha_j \eta_{(j)}^k + \kappa_{(p+1)}\eta_{(p+2)}^k$$

gelten, wo die  $\alpha_j$  Skalare bedeuten,  $\kappa_{(p+1)}$  ein Normierungsfaktor ist, und der Einheitsvektor  $\tilde{\eta}_{(p+2)}$  erst dann bestimmt wird, wenn die  $\alpha_j$  schon bekannt sind. Offenbar können wir annehmen, daß  $\tilde{\eta}_{(p+2)}$  zu den  $\tilde{\eta}_{(j)}$  ( $j=1, \dots, p+1$ ) orthogonal ist, falls  $p \leq n-2$  ist; für  $p=n-1$  kommt schon dieser Vektor wegen der Annahme  $\kappa_{(n)}\equiv 0$  nicht vor.

Eine Kontraktion auf beiden Seiten von (5.7) mit  $g_{ik}\eta_{(t)}^i$  ( $t=1, 2, \dots, p$ ) gibt auf Grund der Orthogonalität und Normierung:

$$\alpha_t = g_{ik}\eta_{(t)}^i D\eta_{(p+1)}^k, \quad (t=1, 2, \dots, p).$$

Nun wird aus

$$g_{ik}\eta_{(t)}^i \eta_{(p+1)}^k = 0 \quad (t=1, 2, \dots, p)$$

nach Ableitung nach  $s$  auf Grund von (1.4):

$$\alpha_t = g_{ik}\eta_{(t)}^i D\eta_{(p+1)}^k = -g_{ik}D\eta_{(t)}^i \eta_{(p+1)}^k, \quad (t=1, 2, \dots, p).$$

Beachten wir jetzt (5.6), so sieht man unmittelbar, daß  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{p-1} = 0$ ,  $\alpha_p = -\kappa_{(p)}$  gelten. Aus (5.7) erhält man somit

$$(5.8) \quad D\eta_{(p+1)}^k + \frac{1}{2}\gamma_0\eta_{(p+1)}^k = -\kappa_{(p)}\eta_{(p)}^k + \kappa_{(p+1)}\eta_{(p+2)}^k.$$

Die Gleichung (5.8) hat schon die Form von (5.6), wenn in der Gleichung (5.6)  $p$  durch  $(p+1)$  ersetzt wird; wir müssen aber noch  $\eta_{(p+2)}^k$  und  $\kappa_{(p+1)}$  bestimmen, falls  $p < n-1$  ist, da für  $p=n-1$  kommt schon — wegen  $\kappa_{(n)} \equiv 0$  —  $\vec{\eta}_{(n+1)}$  offenbar nicht vor. Im Fall  $p=n-1$  kann nämlich  $(D\vec{\eta}_{(n)} + \frac{1}{2}\gamma_0\vec{\eta}_{(n)})$  durch die  $\vec{\eta}_{(j)}$  ( $j=1, 2, \dots, n-1$ ) bestimmt werden, da  $\vec{\eta}_{(n)}$ , nach dem Lemma, in der Darstellung von  $(D\vec{\eta}_{(n)} + \frac{1}{2}\gamma_0\vec{\eta}_{(n)})$  mit Hilfe des  $n$ -Beins  $\vec{\eta}_{(1)}, \dots, \vec{\eta}_{(n)}$ , nicht vorkommen kann.

Aus (5.8) folgt nun, daß

$$(5.9) \quad \kappa_{(p+1)}\eta_{(p+2)}^k = D\eta_{(p+1)}^k + \frac{1}{2}\gamma_0\eta_{(p+1)}^k + \kappa_{(p)}\eta_{(p)}^k,$$

und wenn  $\vec{\eta}_{(p+2)}$  ein Einheitsvektor sein soll, so ist  $\kappa_{(p+1)}$  der absolute Wert des Vektors auf der rechten Seite von (5.9).

Für  $j=n$  gilt nach dem Satz 4:

$$(5.10) \quad D\eta_{(n)}^k + \frac{1}{2}\gamma_0\eta_{(n)}^k = -\kappa_{(n-1)}\eta_{(n-1)}^k.$$

Es kann nun behauptet werden:

*Die Formeln (5.6) und (5.10) bilden die Frenetformeln der Weylschen Räume, wenn in (5.6)  $p=1, \dots, (n-1)$  gesetzt wird. Die Vektoren  $\vec{\eta}_{(1)}, \dots, \vec{\eta}_{(n)}$  und die Krümmungen  $\kappa_{(1)}, \dots, \kappa_{(n-1)}$  sind nach  $\vec{\eta}_{(1)}=\vec{l}$ , (5.3), (5.3a), (5.6) und*

$$(5.11) \quad \kappa_{(j)} = |D\vec{\eta}_{(j)} + \frac{1}{2}\gamma_0\vec{\eta}_{(j)} + \kappa_{(j-1)}\vec{\eta}_{(j-1)}|, \quad (j=1, 2, \dots, n-1)$$

*durch Rekursion bestimmbar.*

*Bemerkung 1.*  $\vec{\eta}_{(j+1)}$  erhält man aus (5.6) und (5.11) ausgedrückt mit Hilfe von  $D\vec{\eta}_{(j)}$ ,  $\vec{\eta}_{(j)}$  und  $\vec{\eta}_{(j-1)}$ .

*Bemerkung 2.* Die Frenetformeln in Weylschen Räumen stimmen nach (2.4) und (2.5) formal mit denen der Finsler-Räumen überein, nur nimmt die Rolle von  $D\vec{\eta}_{(j)}$  in den Weylschen Räumen der Vektor  $(D\vec{\eta}_{(j)} + \frac{1}{2}\gamma_0\vec{\eta}_{(j)})$  über.

## § 6. Zusammenhang der Krümmungen in Weylschen Räumen

Im folgenden wollen wir wieder die Bezeichnungen  $\mathfrak{F}_{(p)}$  von (3.2) und  $\mathfrak{R}(x, x', Y)$  von (2.6) benutzen, jetzt soll aber der Krümmungstensor  $R_{ijkm}$  den des Weylschen Raumes bedeuten (vgl. [4], Formeln (8.8) und (8.6)). *Der Skalar  $\mathfrak{R}$  in der Formel (2.6) soll auch in diesen Räumen nur von  $(x, x')$  abhängig sein.* (Diese Bedingung ist wieder unwesentlich; vgl. die Einleitung dieses Aufsatzes.) Setzen wir in (2.6)  $Y^i = D\eta_{(p)}^i$ , so wird nach unserer Annahme und nach (3.2)

$$(6.1) \quad \mathfrak{R}(x, x') = \mathfrak{F}_{(p)}[(g_{ik} - l_i l_k) D\eta_{(p)}^i D\eta_{(p)}^k]^{-1}, \quad (p=1, 2, \dots, n).$$

Berechnen wir jetzt  $D\eta_{(p)}^k$  aus (5.6), beachten wir ferner die Orthogonalität der Vektoren  $\vec{\eta}_{(1)} = \vec{l}, \vec{\eta}_{(2)}, \dots, \vec{\eta}_{(n)}$ , so wird für  $j=1, 2, \dots, n$  aus<sup>2)</sup> (5.6) und (6.1):

$$(6.2a) \quad \mathfrak{I}_{(1)} = \Re \kappa_{(1)}^2, \quad (6.2b) \quad \mathfrak{I}_{(2)} = \Re(\kappa_{(2)}^2 + \frac{1}{4} \gamma_0^2),$$

$$(6.3) \quad \mathfrak{I}_{(p)} = \Re(\kappa_{(p-1)}^2 + \kappa_{(p)}^2 + \frac{1}{4} \gamma_0^2), \quad (2 < p \leq n).$$

Wir bemerken hier, daß diese Formeln mit (3.1a)—(3.1c) übereinstimmen, falls  $\gamma_k=0$  gesetzt, und  $\kappa_{(0)} \equiv 0, \kappa_{(n)} \equiv 0$  beachtet wird. (Bei den Formeln (3.1) wurde die Unabhängigkeit von  $\Re$  von den  $D\vec{\eta}_{(p)}$  nicht vorausgesetzt, die aber eine unwesentliche Beschränkung ist.)

(6.2a) und (6.2b) zeigen schon, daß die  $\mathfrak{I}_{(1)}$  und  $\mathfrak{I}_{(2)}$  mit den  $\kappa_{(1)}$  und  $\kappa_{(2)}$  gleichberechtigt sind. Für  $\kappa_{(p)}$  beweisen wir den:

**Satz 5.** *Es besteht die Relation:*

$$(6.4) \quad \kappa_{(p)}^2 = \Re^{-1}(\mathfrak{I}_{(p)} - \mathfrak{I}_{(p-1)} + \dots + (-1)^p \mathfrak{I}_{(2)}) - \frac{1}{8} (1 + (-1)^p) \gamma_0^2 \\ (p = 2, 3, \dots, n-1).$$

**BEWEIS.** Wir werden den Beweis durch vollständige Induktion durchführen. Für  $p=2$  geht (6.4) in (6.2b) über, d. h. die Relation (6.4) ist für  $p=2$  gültig.

Nehmen wir jetzt an, daß (6.4) für ein  $p \leq n-1$  gültig ist. Setzen wir in (6.3) statt  $p$  den Wert  $(p+1)$  ein, so wird:

$$\mathfrak{I}_{(p+1)} = \Re(\kappa_{(p)}^2 + \kappa_{(p+1)}^2 + \frac{1}{4} \gamma_0^2).$$

Bestimmen wir aus dieser Gleichung  $\kappa_{(p+1)}^2$  ausgedrückt mit  $\kappa_{(p)}^2$ , beachten wir dann (6.4), so wird:

$$(6.5) \quad \kappa_{(p+1)}^2 = \Re^{-1}(\mathfrak{I}_{(p+1)} - \mathfrak{I}_{(p)} + \dots + (-1)^{p+1} \mathfrak{I}_{(2)}) - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{(-1)^p}{8} \right) \gamma_0^2.$$

Es ist aber

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{(-1)^p}{8} = \frac{1}{8} (1 + (-1)^{p+1}),$$

somit beweist (6.5), daß (6.4) auch für  $(p+1)$  gültig wird, womit der Beweis beendet ist.

Der Zusammenhang von  $\mathfrak{I}_{(n)}$  mit  $\kappa_{(n-1)}$  kann auch aus (5.10) bestimmt werden. Nach der Bezeichnung (3.2) wird im Hinblick auf (2.6):

$$(6.6) \quad \mathfrak{I}_{(n)} = \Re(\kappa_{(n-1)}^2 + \frac{1}{4} \gamma_0^2). \quad |$$

<sup>2)</sup> Für  $D\eta_k^{(1)}$  ist sogar (5.4) günstiger.

Über die durch Kurven bestimmten Sektionalkrümmungen der Finslerschen und Weylschen Räume

Bestimmen wir  $\kappa_{(n-1)}^2$  aus dieser Formel, substituieren wir das in (6.4), wo  $p=n-1$  gesetzt wurde, so wird für  $n \geq 3$ :

$$(6.7) \quad \mathfrak{I}_{(n)} - \mathfrak{I}_{(n-1)} + \dots + (-1)^n \mathfrak{I}_{(2)} - \frac{1}{8} (1 + (-1)^n) \Re \gamma_0^2 \equiv 0.$$

Für  $\gamma_k \equiv 0$  geht der Weylsche Raum in den Finslerraum über. Aus (5.6) bekommt man (2.4). Die Formeln (6.2a) und (6.2b) gehen in (3.3a) und (3.3b) über; die Formel (6.4) gibt (3.3c), während (6.6) in (3.3d) übergeht. Die Identität (6.7) liefert (3.5).

*Wir haben somit alle Formeln von § 3. aus denen von § 6. abgeleitet.*

Die Resultate (6.2a)—(6.4) fassen wir im folgenden Satz zusammen;

**Satz 6.** *Das System  $\kappa_{(p)}$  der Invarianten ist in den Weylschen Räumen mit dem von  $\mathfrak{I}_{(p)}$  gleichberechtigt, ( $p=1, 2, \dots, n-1$ ).*

Endlich weisen wir darauf hin, daß der Satz 3 auf Grund der Formel (6.3) auch in den Weylschen Räumen gültig bleibt.

### § 7. Der zweidimensionale Fall

Im zweidimensionalen Fall ist die Formel (5.4) die erste Frenetformel der Kurven; die zweite erhält man aus (5.6), wenn darin  $j=2$  und  $\kappa_{(2)} \equiv 0$  genommen wird. Es ist:

$$(7.1) \quad D\eta_{(2)}^k + \frac{1}{2} \gamma_0 \eta_{(2)}^k = -\kappa_{(1)} \eta_{(1)}^k, \quad \eta_{(1)}^k = l^k.$$

Aus der Formel (6.1) folgt nach (5.4) und (7.1), daß (6.2a) und (6.2b) mit  $\kappa_{(2)}=0$  gelten, d. h. es gilt:

$$\mathfrak{I}_{(2)} = \frac{1}{4} \Re \gamma_0^2.$$

Diese Identität entspricht übrigens der Identität (6.7) für den Fall  $n=2$ .

### Schriftenverzeichnis

- [1] L. BERWALD, Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV. *Ann. of Math.* **48** (1947), 755—781.
- [2] E. CARTAN, Les espaces de Finsler. *Actualités scientifiques et industrielles* **79** Paris, 1934<sup>3)</sup>.
- [3] A. MOÓR, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **17** (1956), 85—120.
- [3a] A. MOÓR, Eine Verallgemeinerung der metrischen Übertragung in allgemeinen metrischen Räumen. *Publ. Math. (Debrecen)*, **10** (1963), 145—150.
- [4] A. MOÓR, Über eine Übertragungstheorie der metrischen Linienelementräume mit rekurrentem Grundtensor. *Tensor* **29** (1975), 47—63.
- [5] H. RUND, The differential geometry of Finsler spaces *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, (1959).
- [6] H. WEYL, Reine Infinitesimalgeometrie. *Math. Z.* **2** (1918), 384—411.

(Eingegangen am 14. Juni 1976.)

<sup>3)</sup> Neue Ausgabe in „Exposés de géométrie“; par Élie Cartan. Paris (1971).