

Über modifizierte Lebesguesche Funktionen

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

1. Es sei $\lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$ eine nichtabnehmende Folge von positiven Zahlen mit $\lambda_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), und $l^2(\lambda)$ bezeichnet die Klasse der reellen Zahlenfolgen $a = \{a_k\}_1^\infty$, für die $\sum a_k^2 \lambda_k < \infty$ besteht.

In folgenden sei $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ein System der Funktionen $\varphi_k(x) \in L(0, 1)$ ($k = 1, 2, \dots$).

G. ALEXITS und A. SHARMA [1] haben den folgenden Satz bewiesen.

Satz A. *Gilt*

$$(1) \quad L_n(\varphi; x) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt = O(\lambda_n) \quad (x \in (0, 1); n = 1, 2, \dots),$$

und für jede Folge $b = \{b_k\}_1^\infty \in l^2$ besteht

$$(2) \quad \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k(x) \right| dx = O(1) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

dann konvergiert die Reihe

$$(3) \quad \sum_{k=1}^\infty a_k \varphi_k(x)$$

im Falle $a \in l^2(\lambda)$ im Intervall $(0, 1)$ fast überall.

In der Arbeit [4] haben wir die folgenden Sätze bewiesen.

Satz B. *Ist φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in $(0, 1)$ und gilt (1), dann konvergiert die Reihe (3) im Falle $a \in l^2(\lambda)$ in $(0, 1)$ fast überall.*

Satz C. *Gilt*

$$L_n\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}; x\right) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(t)}{\lambda_k} \right| dt = O(1) \quad (x \in (0, 1); n = 1, 2, \dots),$$

dann konvergiert die Reihe (3) im Falle $a \in l^2(\lambda)$ in $(0, 1)$ fast überall.

2. Erstens werden wir das Verhältnis der Sätze A und B betrachten. Wir bemerken, daß aus den Voraussetzungen des Satzes A die Voraussetzungen des Satzes B folgen. Es sei nämlich b eine beliebige Folge aus l^2 . Dann gibt es eine

nichtabnehmende Folge $\mu = \{\mu_k\}_1^\infty$ von positiven Zahlen mit $\mu_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) und $\mu b = \{\mu_k b_k\}_1^\infty \in l^2$. Aus (2) ergibt sich

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \mu_k b_k \varphi_k(x) \right| dx = O(1) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

und also

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=n+1}^m \mu_k b_k \varphi_k(x) \right| dx = O(1) \quad (n < m).$$

Da

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m b_k \varphi_k(x) &= \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{\mu_k} \mu_k b_k \varphi_k(x) = \\ &= \sum_{k=n+1}^{m-1} \left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_{k+1}} \right) \left(\sum_{l=n+1}^k \mu_l b_l \varphi_l(x) \right) + \frac{1}{\mu_m} \sum_{k=n+1}^m \mu_k b_k \varphi_k(x) \end{aligned}$$

ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left| \sum_{k=n+1}^m b_k \varphi_k(x) \right| dx \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m-1} \left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_{k+1}} \right) \int_0^1 \left| \sum_{l=n+1}^k \mu_l b_l \varphi_l(x) \right| dx + \frac{1}{\mu_m} \int_0^1 \left| \sum_{k=n+1}^m \mu_k b_k \varphi_k(x) \right| dx = \\ &= O(1) \left(\sum_{k=n+1}^{m-1} \left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_{k+1}} \right) + \frac{1}{\mu_m} \right) = O\left(\frac{1}{\mu_n}\right) \rightarrow 0 \quad (n < m; n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

und daraus folgt, daß das System φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in $(0, 1)$ ist.

Wir bemerken, daß die Eigenschaft, daß φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in $(0, 1)$ ist, ist mit der folgenden Eigenschaft äquivalent:

e) für jede positive Zahl ε gibt es eine meßbare Menge $E_\varepsilon (\subseteq (0, 1))$ mit $\text{mes } E_\varepsilon \geq 1 - \varepsilon$ derart, daß für jede Folge $b \in l^2$

$$\int_{E_\varepsilon} \left| \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k(x) \right| dx = O_\varepsilon(1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

gilt.

Ist nämlich e) erfüllt, dann ergibt sich mit obiger Methode, daß φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in der Menge E_ε ist. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt es, daß φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach auch im Intervall $(0, 1)$ ist. Ist aber φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in $(0, 1)$, dann gibt es nach einem Satz von E. M. NIKIŠIN [2] für jede positive Zahl ε eine meßbare Menge $E_\varepsilon (\subseteq (0, 1))$ mit $\text{mes } E_\varepsilon \geq 1 - \varepsilon$, eine positive Zahl M_ε und ein orthonormiertes System $\{\psi_k(\varepsilon; x)\}_1^\infty$ in $(0, 1)$ derart, daß

$$\varphi_k(x) = M_\varepsilon \psi_k(\varepsilon; x) \quad (x \in E_\varepsilon; k = 1, 2, \dots)$$

besteht, und so gilt

$$\begin{aligned} \int_{E_\varepsilon} \left| \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k(x) \right| dx &= M_\varepsilon \int_{E_\varepsilon} \left| \sum_{k=1}^n b_k \psi_k(\varepsilon; x) \right| dx \leq \\ &\leq M_\varepsilon \sqrt{\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n b_k \psi_k(\varepsilon; x) \right)^2 dx} \leq M_\varepsilon \sqrt{\sum_{k=1}^\infty b_k^2} < \infty \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

für jede Folge $b \in l^2$.

3. Mit M_B , bzw. mit M_C bezeichnen wir die Klasse der Koeffizientenfolgen a , für die die Reihe (3) bei jedem System φ mit der Bedingungen des Satzes B, bzw. des Satzes C in $(0, 1)$ fast überall konvergiert. In folgenden werden wir die Klassen M_B und M_C untersuchen.

Nach den Sätzen B und C gelten

$$(4) \quad l^2(\lambda) \subseteq M_B, \quad l^2(\lambda) \subseteq M_C.$$

Die Klasse M_B ist es schwer zu charakterisieren. Man kann zeigen, daß

$$(5) \quad l^2(\lambda) \neq M_B$$

ist. Wegen $\lambda_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) gibt es solche Folge $a \in l$, die nicht zu $l^2(\lambda)$ gehört, und so folgt (5) aus dem

Satz I. Es gilt $l \subseteq M_B$.

BEWEIS DES SATZES I. Es sei nämlich $a \in l$, und sei φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in $(0, 1)$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k| \int_{E_\varepsilon} |\varphi_k(x)| dx = M_\varepsilon \sum_{k=1}^\infty |a_k| \int_{E_\varepsilon} |\psi_k(\varepsilon; x)| dx \leq M_\varepsilon \sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty,$$

woraus folgt, daß die Reihe (3) in E_ε fast überall konvergiert. Da $\sup_{\varepsilon > 0} \text{mes } E_\varepsilon = 1$ ist, erhalten wir, daß die Reihe (3) in $(0, 1)$ fast überall konvergiert, d. h. $a \in M_B$ ist. Weiterhin gilt

Satz II. Es ist $l^2(\lambda) = M_C$.

Wegen (4) soll man zeigen, daß aus $a \notin l^2(\lambda)$ auch $a \notin M_C$ folgt. Es sei nun $a \notin l^2(\lambda)$. Dann gilt $a/\sqrt{\lambda} = \{a_k/\sqrt{\lambda_k}\}_1^\infty \notin l^2$. Nach einem bekannten Satz [3] gibt es ein ortho-normiertes System $\chi = \{\chi_k(x)\}_1^\infty$ in $(0, 1)$ mit $L_n(\chi; x) = O(1)$ ($x \in (0, 1)$; $n = 1, 2, \dots$) derart, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty a_k \chi_k(x)$$

in $(0, 1)$ fast überall divergiert. Es sei

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\lambda_k} \chi_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Für dieses System ist die Bedingung des Satzes C erfüllt, und die Reihe (3) divergiert in $(0, 1)$ fast überall, d. h. gilt $a \notin M_C$.

Schriftenverzeichnis

- [1] G. ALEXITS—A. SHARMA, The influence of Lebesgue functions on the convergence and summability of function series, *Acta Sci. Math.*, **33** (1972), 1—10.
- [2] Е. М. НИКИШИН, О системах сходимости по мере для l^2 , *Матем. заметки*, **13** (1973), 337—340.
- [3] K. TANDORI, Ergänzung zu einem Satz von S. Kaczmarz, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 147—153.
- [4] K. TANDORI, Weitere Bemerkungen über die Konvergenz und Summierbarkeit der Funktionenreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **28** (1976), 119—127.

(Eingegangen am 28. Juli 1977.)