

Fortsetzbare äquivalente Potenzreihen

Von KARL-HEINZ INDLEKOFER (Paderborn) und ROLF TRAUTNER (Ulm)

1. Einleitung. Es sei $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ der offene, $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitskreis der z -Ebene. Für ein vorgegebenes $\zeta_0 \in D$, $\zeta_0 \neq 0$, definiert

$$\Phi_{\zeta_0}(z) = \frac{1 - \bar{\zeta}_0}{1 - \zeta_0} \cdot \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}$$

eine konforme und bijektive Abbildung Φ_{ζ_0} von $\bar{D}$ auf sich.

P. TURÁN [15] warf 1958 die Frage auf, ob das Konvergenzverhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises eine konforme Invariante sei; Turáns überraschende Antwort lautete „nein“. Er bewies nämlich die Existenz einer in D holomorphen Funktion f , deren Potenzreihe $\sum a_n w^n$ im Punkt $w=1$ konvergiert, wogegen die Potenzreihe¹⁾ $\sum b_n z^n$ der zusammengesetzten Funktion $f^* = f \circ \Phi_{\zeta_0}$ in $z = \Phi_{\zeta_0}^{-1} 1 = 1$ divergiert. (Von einer solchen Funktion f sagt man auch, sie verhalte sich *konvergenz-schlecht unter der Abbildung Φ_{ζ_0}*). Die Fragestellung Turáns wurde in mannigfacher Hinsicht verallgemeinert (vgl. z.B. [1], [2], [9], [10], [11], [16]), und es wurden sogar explizite Beispiele von Funktionen angegeben, die sich konvergenz-schlecht verhalten (vgl. z. B. [7], [10], [11], [12]). Alle diese Beispiele waren über den Rand ∂D von D nicht fortsetzbar, und die allgemeinen Resultate sagten nichts aus, ob über ∂D fortsetzbare Funktionen existieren, die sich konvergenzschlecht verhalten. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit wird sein, daß die Existenz von in D holomorphen Funktionen gezeigt wird, die sich über den Rand ∂D außer $z=1$ analytisch fortsetzen lassen und sich konvergenzschlecht unter Φ_{ζ_0} verhalten, wobei $\zeta_0 \in D$ und $\zeta_0 \neq 0$ ist. Das wichtigste Hilfsmittel zu diesem Resultat sind Kenntnisse über allgemeine Euler-Summierungsverfahren, die wir im Abschnitt 2 bewiesen. Im Abschnitt 4 verschärfen wir Satz 2 durch ein Ergebnis von ARONSZAJN.

2. Permanente Sonnenschein- und Euler-Verfahren. SONNENSCHN [13] führte 1949 die nach ihm benannte Klasse von Folgen-Folgen Matrixtransformationen ein. Eine solche Matrix $\{a_{nv}\}$ wird erzeugt durch eine Potenzreihe $u(z) = \sum_{v=0}^{\infty} u_v z^v$ mit Konvergenzradius $R > 1$ und $u(1)=1$, über die Vorschrift

$$(1) \quad \{u(z)\}^n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} z^v \quad (n = 0, 1, \dots).$$

¹⁾ Die Potenzreihen $\sum a_n w^n$ und $\sum b_n z^n$ heißen *äquivalent*.

Bemerkung. Nach dem Satz von Toeplitz—Schur ist das Folgen-Folgen Matrixverfahren $\{a_{nv}\}$ genau dann permanent, wenn

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nv} = 0 \quad \text{für jedes } v = 0, 1, \dots,$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} = 1,$$

$$(c) \quad \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| = O(1) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \text{ ist.}$$

Es ist leicht zu sehen, daß (a) und (b) erfüllt sind, wenn $u(1)=1$ und $u(z) \in \bar{D}$ für $z \in \bar{D}$ ist.

B. BAJŠANSKI [4] gab hinreichende Bedingungen für die Permanenz des Summierungsverfahrens $\{a_{nv}\}$ an, J. CLUNIE und P. VERMES [8] zeigten, daß diese Bedingungen auch notwendig sind. Genauer gilt: Sei

(i) u holomorph für $|z| < R$, wobei $R > 1$ ist;

(ii) $|u(z)| < 1$ für $|z|=1$ außer für $z=1$;

(iii) $u(1)=1$;

ist $\{a_{nv}\}$ durch (1) definiert, so gilt

$$\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| = O(1) \quad \text{für alle } n = 0, 1, \dots$$

genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

(iv) Es ist $\operatorname{Re} A \neq 0$, wobei A durch

$$u(z) - z^\alpha = A i^p (z-1)^p + o((z-1)^p) \quad \text{für } z \rightarrow 1, \quad \alpha = u'(1)$$

definiert ist.

Allgemeine Euler-Summierungsverfahren sind transponierte Sonnenschein-Matrizen, die Reihen in Reihen überführen. Ist $w=u(z)$ eine Funktion, die (i), (ii) und (iii) erfüllt, und $f(w) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v w^v$ konvergent in D , so ist auch $f(u(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ konvergent in D . Die (allgemeine) Euler-Transformation $\{a'_{nv}\}$ ist erklärt durch

$$(2) \quad b_n = \sum_{v=0}^n a'_{nv} a_v \quad (n = 0, 1, \dots),$$

transformiert also die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ in die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und ist offenbar gegeben durch

$$a'_{nv} = a_{vn} \quad (v, n = 0, 1, \dots).$$

Für die Partialsummen $A_v = \sum_{\mu \leq v} a_\mu$ und $B_n = \sum_{m \leq n} b_m$ gilt

$$\sum_{v=0}^{\infty} A_v w^v = \frac{f(w)}{1-w} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n = \frac{f(u(z))}{1-z}.$$

Dann entspricht der Transformation (2) das Folgen-Folgen Summierungsverfahren

$$(3) \quad B_n = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha'_{nv} A_v \quad (n = 0, 1, \dots)$$

mit

$$(4) \quad \alpha'_{nv} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} \frac{(u(z))^v}{z^{n+1}} \cdot \frac{1-u(z)}{1-z} dz;$$

hierbei ist (γ) ein einfach geschlossener Weg in D , der $z=0$ im Innern enthält. Auf die Matrix $\{\alpha'_{nv}\}$ in (3) ist wieder das Kriterium von Toeplitz—Schur anwendbar. B. BAJŠANSKI [5] bewies für das Euler-Verfahren (2) bzw. (3): *Genügt $u(z)$ den Bedingungen (i), (ii) und (iii), so ist (iv) hinreichend für die Permanenz des Euler-Verfahrens (2) bzw. (3).* Wir führen dieses Ergebnis zum Abschluß, indem wir zeigen

Satz 1. *Sind (i), (ii) und (iii) für $u(z)$ erfüllt, so ist (iv) notwendig für die Permanenz des Euler-Verfahrens (2) bzw. (3).*

Wir zerlegen den Beweis in verschiedene Lemmata. Unter der Annahme, daß (iv) nicht gilt, werden wir

$$(5) \quad \sup_n \sum_{v=0}^{\infty} |\alpha'_{nv}| = \infty$$

folgern.

Lemma 1. *Es existiert eine gerade Zahl q mit folgenden Eigenschaften:*

1) *Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert ein $v_0 = v_0(\varepsilon)$, so daß für jedes n und jedes $v > v_0$*

$$|\alpha'_{nv}| < \varepsilon v^{-1/q}$$

ist.

2) *Für genügend großes n ist*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha'_{nv}|^2 > \frac{c}{v^{1/q}} \quad (c = \text{const.} > 0).$$

BEWEIS. Betrachtet man

$$\beta_{nv} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} \frac{u(z)^v}{z^{n+1}} dz,$$

so gelten die Behauptungen 1) und 2), wenn man dort α'_{nv} durch β_{nv} ersetzt, nach [8], Lemma 3 und 4. Die α'_{nv} unterscheiden sich von β_{nv} dadurch, daß unter dem Integral der Faktor $\frac{1-u(z)}{1-z}$ hinzukommt. Dieser ist in einer Umgebung von D analytisch und von 0 verschieden. Letzteres folgt aus der Tatsache, daß unter den Voraussetzungen (i), (ii), (iii) nach einem Satz von JULIA (vgl. [6], S. 112) $\alpha = u'(1)$ reell und positiv ist. Man sieht nun leicht, daß die Abschätzungen von [8] gültig bleiben.

Lemma 2. Es existiert eine Konstante $K_0 > 0$, so daß

$$\sup_v \sum_{n \equiv K_0 v}^{\infty} |\alpha'_{nv}| < \infty$$

ist.

BEWEIS. Wir wählen in (4) für (γ) den Weg $|z|=r$, $1 < r < R$; dann existiert ein $K > 0$, so daß für alle $K \equiv K_0$

$$\sup_{|z|=r} \frac{|u(z)|^{1/K}}{r} \equiv \delta < 1$$

ist. Setzt man $K=n/v$ ($\equiv K_0$), so folgt

$$|\alpha'_{nv}| = O(\delta^n)$$

und daraus die Behauptung.

Lemma 3. Mit der Konstanten K_0 aus Lemma 2 gilt

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq n \equiv K_0 v} |\alpha'_{nv}| = \infty.$$

BEWEIS. Mit der Bezeichnung $\alpha'_v := \sup_n |\alpha'_{nv}|$ gilt nach Lemma 1

$$v^{1/q} \alpha'_v \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad v \rightarrow \infty.$$

Nun ist

$$\alpha'_v \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha'_{nv}| \equiv \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha'_{nv}|^2$$

und wiederum nach Lemma 1

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha'_{nv}| \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\alpha'_v v^{1/q}} = \infty.$$

Wegen Lemma 2 ist somit Lemma 3 bewiesen.

BEWEIS VON SATZ 1. Wir haben mit Lemma 3

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{v=N}^{2N} \sum_{n \equiv K_0 v} |\alpha'_{nv}| = \infty.$$

Andererseits ist

$$N^{-1} \sum_{v=N}^{2N} \sum_{n \equiv K_0 v} |\alpha'_{nv}| \equiv N^{-1} \sum_{n \equiv 2K_0 N} \sum_{v=0}^{\infty} |\alpha'_{nv}| \equiv 2K_0 \sup_n \sum_{v=0}^{\infty} |\alpha'_{nv}|,$$

und damit ist Satz 1 bewiesen.

Beispiele. 1. Wir betrachten nach [5] die Funktion

$$(6) \quad u(z) = z^2 - \left(\frac{z-1}{2} \right)^4.$$

Hier sind (i)—(iii) erfüllt ($|u(e^{i\varphi})| = 1 - \sin^4 \varphi/2$), ferner ist $\alpha=2$, $p=4$, $A = -\frac{1}{16}$.

Also gilt auch (iv), und das von u erzeugte Euler-Verfahren ist regulär.

2. Wir betrachten die mit u aus (6) gebildete Funktion

$$(7) \quad u^*(z) = u(\Phi_{\zeta_0}(z)).$$

Die Entwicklung von Φ_{ζ_0} um $z=1$ ergibt zunächst

$$\Phi_{\zeta_0}(z) = \sum_{k=0}^3 d_k (z-1)^k + O((z-1)^4),$$

$$d_1 = \frac{1 - \zeta_0 \bar{\zeta}_0}{(1 - \zeta_0)(1 - \bar{\zeta}_0)} > 0, \quad d_k = d_1 \left(\frac{\bar{\zeta}_0}{1 - \zeta_0} \right)^{k-1}, \quad k = 2, 3.$$

Man erhält

$$u^*(z) = 1 + 2d_1(z-1) + (2d_2 + d_1^2)(z-1)^2 + (2d_3 + 2d_1 d_2)(z-1)^3 + O((z-1)^4),$$

also $z = 2d_1$.

Ziehen wir hiervon $z^2 = \sum_{k=0}^3 \binom{\alpha}{k} (z-1)^k + O((z-1)^4)$ ab, erhalten wir

$$u^*(z) - z^2 = c_2(z-1)^2 + c_3(z-1)^3 + O((z-1)^4).$$

Hierbei ist zunächst

$$c_2 = 2d_2 + d_1^2 - \binom{\alpha}{2} = \frac{d_1(\bar{\zeta}_0 - \zeta_0)}{(1 - \zeta_0)(1 - \bar{\zeta}_0)}.$$

Ist also $\text{Im } \zeta_0 \neq 0$, so ist $p=2$ und $A = -c_2 \neq 0$, $\text{Re } A = 0$. Ist $\text{Im } \zeta_0 = 0$, so betrachten wir zusätzlich

$$c_3 = \frac{2}{3} d_1 \frac{\zeta_0}{(1 - \zeta_0)^2}$$

Ist noch $\zeta_0 \neq 0$, so ist $p=3$ und $A = -ic_3 \neq 0$, $\text{Re } A = 0$. Also erzeugt u^* für alle $\zeta_0 \in \mathbf{D}$, $\zeta_0 \neq 0$ ein nicht permanentes Euler-Verfahren.

3. Fortsetzbare äquivalente Potenzreihen. Wir kommen nun zu unserem Hauptergebnis.

Satz 2. Sei $\zeta_0 \in \mathbf{D}$, $\zeta_0 \neq 0$. Dann existiert eine über $|z|=1$, $z \neq 1$, fortsetzbare Funktion f , die sich konvergent-schlecht unter Φ_{ζ_0} verhält.

BEWEIS. Wir betrachten die Funktion u^* aus (7) die für $\zeta_0 \in \mathbf{D}$, $\zeta_0 \neq 0$ ein nicht permanentes Euler-Verfahren erzeugt. Also gibt es eine in $\mathbf{D}$ holomorphe Funktion $g(w) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v w^v$ mit konvergenter Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ während die Reihe $g(u^*(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ bei $z=1$ divergiert. Da u aus (6) ein permanentes Euler-Verfahren erzeugt, konvergiert die Reihe $f(z) = g(u(z)) = \sum_{v=0}^{\infty} a'_v z^v$ bei $z=1$ und ist über $|z|=1$, $z \neq 1$, analytisch fortsetzbar. Die Funktionen f und $f \circ \Phi_{\zeta_0} = g \circ u^*$ beweisen Satz 2.

Bemerkungen. 1. Nach einem Satz von ARONSZAJN [3] läßt sich f darstellen in der Form $f = f_1 + f_2$, wobei f_1 analytisch ist in $\{|z-1| > \epsilon\}$ und f_2 analytisch

ist in einer Umgebung von $\bar{D}$. Also sind f_2 und $f_2 \circ \Phi_{\zeta_0}$ bei $z=1$ konvergent. Dann ist f_1 bei $z=1$ konvergent, dagegen $f_1 \circ \Phi_{\zeta_0}$ bei $z=1$ divergent.

Wir erhalten somit die Existenz einer konvergenz-schlechten Funktion, deren Singularitäten auf eine beliebig vorgegebene Umgebung von $z=1$ konzentriert sind.

2. Satz 2 gilt natürlich auch für absolute Konvergenz. So haben wir

Satz 2'. Sei $\zeta_0 \in D$, $\zeta_0 \neq 0$. Dann existiert eine über $|z|=1$, $z \neq 1$, fortsetzbare Funktion f , $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$, so daß $\sum_{v=0}^{\infty} |a_v| < \infty$ ist, aber $f(\Phi_{\zeta_0}(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ für $|z|=1$ absolut divergiert.

Literatur

- [1] L. ALPÁR, Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence. I, II, III. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 3 (1958), 1—12, 3, (1958), 141—158, 5, (1960), 97—152.
- [2] L. ALPÁR, Sur certaines transformées des séries de puissance absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 7 (1962), 287—316.
- [3] N. ARONSZAJN, Sur la décomposition des fonctions analytiques uniformes et leurs applications. *Acta Math.* 65, (1935), 1—156.
- [4] B. M. BAJANSKI, Sur une classe générale de procédés de sommations du type d'Euler—Borel. *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.* 10, (1956), 131—152.
- [5] B. M. BAJANSKI, Généralisation d'un théorème de Carleman. *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.* 12, (1958), 101—108.
- [6] L. BIEBERBACH, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, New York 1945.
- [7] J. CLUNIE, On equivalent power series. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 18 (1967), 165—169.
- [8] J. CLUNIE and P. VERMES, Regular Sonnenschein type summability methods. *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci.* (5) 45 (1959), 93—945.
- [9] G. HALÁSZ, On Taylor series absolutely convergent on the circumference of the circle of convergence, I, II, III. *Publ. Math. Debrecen*, 14 (1967), 63—68; 15 (1968) 23—31; *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 25 (1974), 81—87.
- [10] K.-H. INDLEKOFER, Summierbarkeitsverhalten äquivalenter Potenzreihen. I, II, III, *Arch. Math.* 22, (1971) 385—393; *Math. Nachr.* 50 (1971), 305—319; *Math. Nachr.* 55 (1973), 265—286.
- [11] K.-H. INDLEKOFER, Bemerkungen über äquivalente Potenzreihen von Funktionen mit einem gewissen Stetigkeitsmodul. *Monatsh. Math.* 76 (1972), 124—129.
- [12] K.-H. INDLEKOFER, Über die Invarianz der absoluten Konvergenz bei konformer Abbildung. *Math. Z.*, 134 (1973), 171—177.
- [13] J. SONNENSCHIN, Sur les séries divergentes. *Bull. Acad. Royale de Belgique*, 35 (1949), 594—601.
- [14] J. SONNENSCHIN, Sur les séries divergentes. *Thèse. Bruxelles* 1946.
- [15] P. TURÁN, A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence circle. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* 12 (1958), 19—26.
- [16] R. WARLIMONT, Euler-Summierbarkeit konform äquivalenter Reihen, *Monatsh. für Math.* 81 (1976), 63—68.

(Eingegangen am 16. Dezember 1977.)