

Bemerkung zur Konvergenz der Teilreihen von Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

1. In der Arbeit [1] haben wir die folgende Behauptung gezeigt.

A. Ist die Reihe

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$$

für jedes orthonormiertes System $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_1^{\infty}$, im Intervall $(0, 1)$ fast überall konvergent, und gilt $|b_n| \leq |a_n|$ ($n = 1, 2, \dots$), dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x)$$

auch für jedes orthonormiertes System φ fast überall.

Der Beweis dieses Satzes folgt aus den folgenden zwei Behauptungen.

B. Die Reihe (1) konvergiert für jedes orthonormiertes System φ im Intervall $(0, 1)$ fast überall dann und nur dann, wenn

$$\|a\| = \sup_{\varphi} \sqrt{\int_0^1 \sup_{1 \leq i \leq j} \left(\sum_{k=i}^j a_k \varphi_k(x) \right)^2 dx}$$

besteht, wobei das Supremum für jedes orthonormiertes System φ im Intervall $(0, 1)$ gebildet wird.

C. Gilt $|b_n| \leq |a_n|$ ($n = 1, 2, \dots$), dann ist $\|b\| \leq \|a\|$.

Aus dem Satz A bzw. aus dem Satz B folgt unmittelbar:

D. Ist die Reihe (1) für jedes orthonormiertes System φ in $(0, 1)$ fast überall konvergent, dann konvergiert die Reihe

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} \varphi_{k_i}(x)$$

für jede Indexfolge $k_1 < \dots < k_i < \dots$ und für jedes orthonormiertes System φ in $(0, 1)$ fast überall.

E. Für jede Indexfolge $k_1 < \dots < k_i < \dots$ gilt $\|a_{k_i}\|_{i=1}^{\infty} \leq \|a_k\|_1^{\infty}$.

Ähnliche Behauptungen sind für gleichmäßig beschränkte orthonormierte Systeme bewiesen (s. [2]). In [2] wurde das Problem aufgeworfen, ob ähnliche Sätze auch im Falle gültig sind, wenn die Lebesgueschen Funktionen der Systeme φ gewisse Beschränktheitsbedingung befriedigen.

2. Für ein orthonormiertes System $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ in $(0, 1)$ setzen wir

$$L_n(\varphi; x) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt.$$

Es sei $\lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$ eine nichtabnehmende Folge von positiven Zahlen, und mit $\Omega^*(\lambda)$ bezeichnen wir die Klasse der orthonormierten Systeme φ in $(0, 1)$ mit

$$\int_0^1 \sup_n \frac{L_n(\varphi; x)}{\lambda_n} dx \leq 1.$$

Weiterhin sei $M^*(\lambda)$ die Klasse der Folgen $a = \{a_k\}_1^\infty$ für die die Reihe (1) bei jedem System $\varphi \in \Omega^*(\lambda)$ in $(0, 1)$ fast überall konvergiert. Für eine Folge a setzen wir

$$\|a; \lambda\|^* = \sup_{\varphi \in \Omega^*(\lambda)} \int_0^1 \sup_{1 \leq i \leq j} \left| \sum_{k=i}^j a_k \varphi_k(x) \right| dx.$$

In der Arbeit [3] haben wir gezeigt:

F. $a \in M^*(\lambda)$ gilt dann und nur dann, wenn $\|a; \lambda\|^* < \infty$. Weiterhin gibt es im Falle $\|a; \lambda\|^* = \infty$ ein System $\varphi \in \Omega^*(\lambda)$ derart, daß die Reihe (1) in $(0, 1)$ fast überall divergiert.

Das Analogon der Behauptung E kann leicht gezeigt werden.

Satz I. Gilt $a \in M^*(\lambda)$, dann ist $\{a_{k_i}\}_{i=1}^\infty \in M^*(\lambda)$ für jede Indexfolge $k_1 < \dots < k_i < \dots$.

BEWEIS DES SATZES I. Es sei nämlich für eine Indexfolge $k_1 < \dots < k_i < \dots$ $\{a_{k_i}\}_{i=1}^\infty \notin M^*(\lambda)$. Auf Grund der Behauptung F. gibt es ein System $\varphi = \{\varphi_k(x)\}_1^\infty \in \Omega^*(\lambda)$ derart, daß die Reihe (2) in $(0, 1)$ fast überall divergiert. Andererseits ist die Reihe (1) in $(0, 1)$ fast überall konvergent.

Es sei

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & k = k_i, \quad i = 1, 2, \dots, \\ -\varphi_k(x), & k \neq k_i, \quad i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Es ist klar, daß $\psi = \{\psi_k(x)\}_1^\infty \in \Omega^*(\lambda)$, und so ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty a_k \psi_k(x)$$

in $(0, 1)$ fast überall konvergent. Daraus folgt, daß

$$\sum_{k=1}^\infty a_k \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^\infty a_k \psi_k(x) = 2 \sum_{i=1}^\infty a_{k_i} \varphi_{k_i}(x)$$

in $(0, 1)$ fast überall konvergent, was der Voraussetzung widerspricht.

Aus der Behauptung F. und aus Satz I folgt, daß im Falle $\|a; \lambda\|^* < \infty$ $\|\{a_{k_i}\}_{i=1}^\infty; \lambda\|^* < \infty$ für jede Indexfolge $k_1 < \dots < k_i < \dots$ gilt. Man kann auch eine schärfere Behauptung beweisen.

Satz II. Es gibt eine von der Folge a unabhängige positive Zahl C derart, daß für jede Indexfolge $k_1 < \dots < k_i < \dots$

$$\|\{a_{k_i}\}_{i=1}^\infty; \lambda\|^* \leq C \|a; \lambda\|^*$$

gilt.

BEWEIS DES SATZES II. Wir werden gewisse Eigenschaften der Norm $\|\cdot; \lambda\|^*$ benützen. Für jede Folge a gelten:

$$\|\{a_k\}_1^N; \lambda\|^* \leq \|\{a_k\}_1^{N+1}; \lambda\|^* \quad (N = 1, 2, \dots),$$

$$\|\{a_k\}_1^N; \lambda\|^* \nearrow \|a; \lambda\|^* \quad (N \nearrow \infty),$$

und für beliebige Folgen a, b besteht

$$\|a+b; \lambda\|^* \leq \|a; \lambda\|^* + \|b; \lambda\|^*,$$

weiterhin für jede Folge a ist (s. [3])

$$C \left\{ \sum_{k=1}^\infty a_k^2 \right\}^{1/2} \leq \|a; \lambda\|^* \leq \sum_{k=1}^\infty |a_k|.$$

Die Behauptung werden wir ad Absurdum beweisen. Gilt die Behauptung nicht, dann gibt es für jede natürliche Zahl n eine Folge a mit $\|a; \lambda\|^* \leq 1$, und eine Indexfolge $l_1 < \dots < l_i < \dots$ mit

$$\|\{a_{l_i}\}_{i=1}^\infty; \lambda\|^* > n.$$

Durch Induktion werden wir Folgen $\{a_k(m)\}_{k=1}^\infty$ ($m=1, 2, \dots$), Indexfolgen $l_1(m) < \dots < l_i(m) < \dots$ ($m=1, 2, \dots$), und noch eine Indexfolge $(0=)N_1 < \dots < N_s < \dots$ definieren mit folgenden Eigenschaften: für jede natürliche Zahl m gelten:

$$(3) \quad \begin{aligned} \|a(m); \lambda\|^* &\leq \frac{1}{2^m}, \\ \|\{a_{l_i}(m); N_m < l_i \leq N_{m+1}\}; \lambda\|^* &\leq 2^m. \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung gibt es eine Folge a mit $\|a; \lambda\|^* \leq 1$ und eine Indexfolge $k_1 < \dots < k_i < \dots$ mit $\|\{a_{k_i}\}_{i=1}^\infty; \lambda\|^* > 2^2$. Es sei N_2 eine natürliche Zahl, für die

$$\|\{a_{k_i}; 1 \leq k_i \leq N_2\}; \lambda\|^* > 2^2.$$

Dann setzen wir $l_i(1) = k_i$ ($i: 1 \leq k_i \leq N_2$) und $a_k(1) = a_k/2$ ($k=1, \dots, N_2$). Es ist klar, daß (3) für $m=1$ erfüllt sind. Es sei s_0 eine natürliche Zahl, und nehmen wir an, daß $\{a_k(m)\}_1^\infty, \{l_i(m)\}_{i=1}^\infty$ ($m=1, \dots, s_0$) und $N_1, \dots, N_{s_0+1}$ schon derart definiert sind, daß (3) für $m=1, \dots, s_0$ erfüllt werden. Dann gibt es eine Folge b und eine Indexfolge $\kappa_1 < \dots < \kappa_i < \dots$ derart, daß $\|b; \lambda\|^* \leq 1$ und

$$\|\{b_{\kappa_i}\}_{i=1}^\infty; \lambda\|^* > 2^{s_0+1}(N_{s_0+1} + 2^{s_0+1})$$

erfüllt werden. Dann ist aber

$$\|\{b_{\kappa_i}; N_{s_0+1} < \kappa_i\}; \lambda\|^* \cong \|\{b_{\kappa_i}\}_{i=1}^{\infty}; \lambda\|^* - N_{s_0+1},$$

und so gibt es eine natürliche Zahl $N_{s_0+2} (> N_{s_0+1})$ mit

$$\|\{b_{\kappa_i}; N_{s_0+1} < \kappa_i \leq N_{s_0+2}\}; \lambda\|^* > (2^{s_0+1})^2.$$

Es sei

$$a_k(s_0+1) = b_k/2^{s_0+1} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad l_i(s_0+1) = \kappa_i \quad (i: N_{s_0+1} < \kappa_i \leq N_{s_0+2}).$$

Es ist klar, daß (3) für $m = s_0+1$ erfüllt wird. Damit ist die vollständige Induktion richtig. Es sei endlich

$$a_k = a_k(m), \quad N_m < k \leq N_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$k_i = l_i(m), \quad i: N_m < l_i(m) \leq N_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Dann gilt

$$(4) \quad \|a; \lambda\|^* \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|\{a_k(m)\}_{N_m+1}^{N_{m+1}}; \lambda\|^* \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \infty.$$

Andererseits ist

$$\|\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}; \lambda\|^* \cong \|\{a_{k_i}; i: N_m < k_i \leq N_{m+1}\}; \lambda\|^* \cong 2^m$$

für jede natürliche Zahl m , d. h. $\|\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}; \lambda\|^* = \infty$ gilt. Auf Grund des Satzes I und der Behauptung F widerspricht diese Gleichung der Ungleichung (4).

Ob die Analoga der Behauptungen A und C richtig sind, ist es noch ein offenes Problem.

Schriftenverzeichnis

- [1] K. TANDORI, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II, *Acta Sci. Math., Szeged*, **25** (1964) 219—232.
- [2] K. TANDORI, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, III, *Publ. Math. (Debrecen)*, **12** (1965), 127—157.
- [3] K. TANDORI, Über den Einfluß der Lebesgueschen Funktionen auf die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Publ. Math. (Debrecen)*, **19** (1972), 249—258.
- [4] K. TANDORI, Eine Bemerkung Über das Maximum von Summen orthogonaler Funktionen, *Publ. Math. (Debrecen)*, **20** (1973), 89—92.

(Eingegangen am 21. Oktober 1978.)