

О представлениях группы, содержащей бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса

С. Д. БЕРМАН (Харьков)—К. БУЗАШИ (Дебрецен)

Пусть группа G содержит бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. Тогда, очевидно, G обладает бесконечным циклическим нормальным делителем $H=(a)$ конечного индекса. Простейшим представителем групп этого класса является бесконечная группа диэдра $D=(a) \cdot (b); b^2=1; b^{-1}ab=a^{-1}; (a)$ — бесконечная циклическая группа.

В [1] были изучены все конечно порождённые KD -модули в предположении, что K — поле, характеристика которого отлична от 2. В этой заметке, опираясь на результаты статьи [1], мы рассматриваем представления упомянутых групп G . Поле K предполагается алгебраически замкнутым, с некоторым ограничением на характеристику.

Лемма 1. Пусть группа G содержит нормальный делитель H индекса 2, который представляется в виде полупрямого произведения конечного нормального делителя F и бесконечной циклической группы (a) . Пусть K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядок F . Тогда алгебра KG разлагается в прямую сумму попарно ортогональных двухсторонних идеалов

$$KG = A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_s,$$

где A_i — полное матричное кольцо над групповой алгеброй KG_i , а G_i либо бесконечная циклическая группа, либо бесконечная группа диэдра.

Доказательство. Очевидно, подгруппа F является также нормальным делителем группы G , так как F состоит из всех элементов конечного порядка группы H . Пусть $G/H=(cH)$. Тогда

$$(1) \quad c^2 = f_1 a^i$$

и

$$(2) \quad c^{-1}ac = f_2 a,$$

или

$$(3) \quad c^{-1}ac = f_3 a^{-1} \quad (f_1, f_2, f_3 \in F).$$

Предположим, что имеет место (2). Покажем, что в этом случае группа G есть полупрямое произведение конечного нормального делителя и бесконечной циклической группы. В самом деле, если в (1) $i=0$, то подгруппа $F_1 = \{F, c\}$ есть нормальный делитель группы G , ибо, в силу (2), $aca^{-1} = cf_2$, $f_2 \in F$ и $G = F_1 \cdot (a)$. Пусть $i=2m$. Тогда, полагая $c_1 = ca^{-m}$, получим $c_1^2 \in F$

и, как и выше, $F_1 = \{F, c\}$ — нормальный делитель группы G , и $G = F_1 \cdot (a)$. Пусть $i = 2m + 1$. Снова получаем $c_1 = ca^{-m}$, и тогда $c_1^2 = af$, $f \in F$ и, значит, $G = F \cdot (c_1)$.

Пусть выполняется равенство (3). Тогда в (1) показатель i обязательно равен нулю. Действительно, при $i \neq 0$, с одной стороны, в силу (3)

$$c^{-1}f_1a^ic = fa^{-i}, \quad f \in F,$$

а, с другой стороны, $c^{-1}f_1a^ic = f_1a^i$, что даёт равенство $fa^{-i} = f_1a^i$, приводящее к противоречию.

Итак, группа G либо представляется в виде полупрямого произведения конечного нормального делителя и бесконечной циклической группы, либо

$$(4) \quad G/H = (cH)$$

где $c^2 = f_1 \in F$, $c^{-1}ac = a^{-1}f_2$ и $H = F \cdot (a)$.

Докажем утверждение леммы в случае (4). Алгебра KF разлагается в прямую сумму минимальных двухсторонних идеалов, изоморфных полным матричным кольцам над полем K :

$$KF = I_1 \dot{+} \dots \dot{+} I_s.$$

Пусть e_i — идемпотент центра KF , порождающий идеал I_i ($i = 1, \dots, s$). Под действием группы (a) множество идемпотентов $\mathfrak{M} = \{e_1, \dots, e_s\}$ распадается на орбиты

$$(5) \quad \{e_{11}, \dots, e_{1r_1}\}, \dots, \{e_{r1}, \dots, e_{rr_r}\}.$$

Положим

$$u_i = e_{i1} + \dots + e_{ir_i} \quad (i = 1, \dots, r).$$

Идемпотенты u_i также распадаются на орбиты под действием группы (c) , каждая из которых содержит либо один, либо два элемента. После перенумерации идемпотентов эти орбиты можно записать в виде

$$(6) \quad \{u_1, u_2\}, \dots, \{u_{2q-1}, u_{2q}\}, \quad u_{2q+1}, \dots, u_{2q+m}.$$

Положим

$$(7) \quad \bar{u}_i = u_{2i-1} + u_{2i} \quad (i = 1, \dots, q); \quad \bar{u}_{q+j} = u_{2q+j} \quad (j = 1, \dots, m).$$

Тогда $\bar{u}_i$ ($i = 1, \dots, n = q + m$) — идемпотенты центра алгебры KG , и имеет место ортогональное разложение

$$(8) \quad KG = A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_n; \quad A_i = KG\bar{u}_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Покажем, что каждая из алгебр $A_1, \dots, A_q$ изоморфна полному матричному кольцу над групповой алгеброй бесконечной циклической группы, а каждая из алгебр $A_{q+1}, \dots, A_n$ — полному матричному кольцу над групповой алгеброй бесконечной группы диэдра.

Рассмотрим сначала алгебры $A_{q+1}, \dots, A_n$. Имеем

$$(9) \quad A_i = KGe_{i1} + \dots + KGe_{ir_i} \quad (i = q+1, \dots, n).$$

(см. (5), (7)). Так как идемпотенты e_{ij} переходят друг в друга под действием внутренних автоморфизмов группы G , то левые идеалы алгебры KG в правой

части (9) между собой KG — изоморфны. Следовательно, кольцо KG — эндоморфизмов R алгебры A_i изоморфно полному матричному кольцу порядка t_i над полем эндоморфизмов $\bar{R}$ идеала $I_{i1} = KGe_{i1}$.

Пусть $N = \{g \in G \mid g^{-1}e_{i1}g = e_{i1}\}$ — стабилизатор идемпотента e_{i1} в группе G . Так как (a) — орбита идемпотента e_{i1} содержит точно t_i элементов, то $N \cap (a) = (a^{t_i})$. Кроме того, N содержит элемент вида ca^j , ибо орбита $\{e_{i1}, \dots, e_{it_i}\}$ по условию выдерживает также действие элемента c . Отсюда легко вытекает, что

$$N = \{F, a^{t_i}, ca^j\}.$$

Каждый GK -эндоморфизм идеала I_{i1} задаётся формулой

$$(10) \quad \theta(e_{i1}) = xe_{i1},$$

где $x \in KG$. Так как $e_{i1}ge_{i1} = 0$ для любого $g \notin N$, то можно считать, что в (10) $x \in KN$. Отсюда сразу получаем, что кольцо KG -эндоморфизмов идеала I_{i1} инверсно изоморфно кольцу $B = KNe_{i1}$. Покажем, что B изоморфно полному матричному кольцу над групповой алгеброй KD , где D — бесконечная группа диэдра. Положим $a_1 = a^{t_i}$, $c_1 = ca^j$, $B_1 = KFe_{i1}$. По условию $a_1^{-1}B_1a_1 = B_1$. Так как B_1 — полное матричное кольцо над полем K , то каждый автоморфизм алгебры B_1 является внутренним, и поэтому, для некоторого фиксированного $x_1 \in B_1$, $a_1^{-1}za_1 = x_1^{-1}zx_1$ для всех $z \in B_1$. Тогда элемент $a_2 = a_1x_1^{-1}$ перестановочен с каждым элементом алгебры B_1 . Точно так же $c_1^{-1}B_1c_1 = B_1$ и, следовательно, некоторый элемент $c_2 = c_1y^{-1}$, $y \in B_1$ перестановочен с каждым элементом $z \in B_1$, причём, в силу (4)

$$(11) \quad c_2^{-1}a_2c_2 = a_2^{-1}x, \quad x \in B_1, \quad c_2^2 = x_2 \in B_1.$$

Выберём элемент $z_1 \in B_1$ так, чтобы выполнялось равенство

$$(12) \quad xz_1 = z_1^{-1}.$$

(Такой выбор возможен, так как x — обратимый в B_1 элемент, а K — алгебраически замкнутое поле.) Так как c_2 коммутирует с каждым элементом алгебры B_1 , то, ввиду (11) и (12) имеем

$$(13) \quad c_2^{-1}a_2z_1c_2 = a_2^{-1}z_1^{-1}.$$

Далее найдём такой элемент $z_2 \in B_1$, что

$$(14) \quad z_2^2 = x_2$$

(см. (11)). Тогда $(c_2z_2^{-1})^2 = e_{i1}$, где e_{i1} — единица алгебры B_1 . Положим $a_3 = a_2z_1$, $c_3 = c_2z_2^{-1}$. Тогда, на основании (13) и (14)

$$(15) \quad c_3^{-1}a_3c_3 = a_3^{-1}, \quad c_3^2 = e_{i1},$$

то есть элементы a_3 и c_3 порождают бесконечную группу диэдра. Каждый элемент алгебры $B = KNe_{i1}$ однозначно записывается в виде

$$(16) \quad \sum_i z_i \left(\sum_{s,t} \lambda_{st} a_1^s c_2^t \right),$$

где $z_i \in B_1$, $\lambda_{st} \in K$. Из формул для элементов a_3 , c_3 и (16) легко следует, что элемент вида (16) допускает также однозначную запись вида

$$(17) \quad \sum_i z'_i (\gamma_{st} a_3^s c_3^t),$$

$z'_i \in B_1$, $\gamma_{st} \in K$. Так как элементы a_3 и c_3 перестановочны с элементами B_1 , то формула (17) показывает, что алгебра $B = KNe_{i1}$ есть тензорное произведение групповой алгебры группы диэдра $\{a_3, c_3\} = D$ с полным матричным кольцом B_1 над полем K , т. е. B есть полное матричное кольцо над KD . Тогда кольцо $\tilde{R}$ KG -эндоморфизмов идеала $KG_{e_{i1}}$ также есть полное матричное кольцо над KD , а кольцо эндоморфизмов идеала $KG\bar{u}_i$, будучи полным матричным кольцом над $\tilde{R}$, также будет полным матричным кольцом (конечно, другого порядка) над KD .

Окончательно получим, что алгебра $KG\bar{u}_i$ ($i = q+1, \dots, n$) изоморфна полному матричному кольцу над KD .

Рассмотрим теперь второй случай, когда $i = 1, \dots, q$. В этом случае стабилизатор N идемпотента e_{i1} в G совпадает с циклической группой $\langle a^i \rangle$. Положим $a_1 = a^i$, $B_1 = KFe_{i1}$, $a_1^{-1}za_1 = x^{-1}zx$ для всех $z \in B_1$, и, дословно повторяя рассуждения для $i \geq q+1$, получим, что алгебра $A_i = KG\bar{u}_i$ есть полное матричное кольцо над групповой алгеброй $K(a_2)$, где $a_2 = a_1x^{-1}$.

Итак, в (8) алгебры $A_1, \dots, A_q$ суть полные матричные кольца над групповыми алгебрами бесконечных циклических групп, а алгебры $A_{q+1}, \dots, A_n$ — полные матричные кольца над групповой алгеброй бесконечной группы диэдра. Лемма доказана.

Замечание 1. Из известных теорем теории представлений конечных групп m (число идемпотентов $\bar{u}_i$, совпадающих с идемпотентами u_i) есть одновременно число таких классов сопряженных элементов группы H , которые лежат в F , и одновременно являются классами сопряженных элементов группы G .

Лемма 2. Пусть группа G содержит такой нормальный делитель H , что H — бесконечная циклическая группа, лежащая в центре группы G , а G/H — конечная разрешимая группа. Тогда G представляется в виде полупрямого произведения $G = F(b)$ конечного нормального делителя F и бесконечной циклической группы $\langle b \rangle$.

Доказательство. Докажем сначала частный случай леммы в предположении, что G/H — абелева группа. Если $b, c \in G$, то

$$(18) \quad c^{-1}bc = ba^i \quad ((a) = H).$$

Пусть $i \neq 0$. Так как G/H — конечная группа, для некоторого натурального n имеет место $b^n \in (a)$, и, в силу (18) и того, что (a) лежит в центре G , $b^n = c^{-1}b^nc = b^na^{in}$, откуда $a^{in} = 1$, что невозможно. Следовательно, $i = 0$ и $c^{-1}bc = b$, то есть G — абелева. Группа G — конечно порождена, ибо индекс $(G:H)$ конечен. Значит, имеет место прямое разложение $G = F \times G_1$, где F — конечная группа, а G_1 — свободная группа. Если бы группа G_1 не была циклической, то G не содержала бы бесконечную циклическую группу конечного индекса. Следовательно, G_1 — циклическая группа.

Предположим теперь, что G/H — произвольная разрешимая конечная группа. Построим нормальный ряд группы

$$H \subset H_1 \subset \dots \subset H_s = G$$

с абелевыми факторами $H_1/H, \dots, H_s/H_{s-1}$. Будем доказывать лемму индукцией по числу s . При $s=1$ она уже доказана. Пусть лемма установлена для всех $s < m$ и докажем её для $s=m$. В силу предположения индукции $H_{m-1} = F_{m-1} \cdot (b)$, где F_{m-1} — конечный нормальный делитель группы H_{m-1} , а (b) — бесконечная циклическая группа. Так как F_{m-1} состоит из всех элементов конечного порядка в H_{m-1} , то F_{m-1} — нормальный делитель группы G . Имеем

$$G/H_{m-1} \cong G/F_{m-1}/H_{m-1}/F_{m-1}.$$

Покажем, что $H_{m-1}/F_{m-1} = (bF_{m-1})$ лежит в центре группы G/F_{m-1} , то есть что $g^{-1}bg = bf$ для любого $g \in G, g \notin H_{m-1}, f \in F_{m-1}$. В самом деле, предположим, что

$$(19) \quad g^{-1}bg = b^{-1}f, \quad f \in F_{m-1}.$$

Каждый элемент бесконечного порядка в H_{m-1} имеет вид $b^i f_1, f_1 \in F_{m-1}$. В частности, $a = b^i f_2$ ($i \neq 0$). Тогда, в силу (19)

$$g^{-1}ag = g^{-1}b^i f_1 g = b^{-i} f_2 \quad (f_1, f_2 \in F_{m-1}),$$

а, с другой стороны, $g^{-1}ag = a = b^i f_1$, ибо a — элемент центра группы G . Теперь равенство $b^i f_1 = b^{-i} f_2$ ведёт к противоречию. Значит $g^{-1}bg = bf$ и (bF_{m-1}) — центральный бесконечный циклический нормальный делитель группы G/F_{m-1} , фактор-группа по которому абелева. По доказанному, имеет место прямое разложение

$$(20) \quad G/F_{m-1} = (cF_{m-1}) \times (\tilde{F}/F_{m-1}),$$

где $\tilde{F}/F_{m-1}$ — конечный нормальный делитель группы G/F_{m-1} , а (cF_{m-1}) — бесконечная циклическая группа. Из (20) следует, что $G = \tilde{F} \cdot (c)$, где $\tilde{F}$ — конечный нормальный делитель в G , а c — элемент бесконечного порядка. Индукция завершена и лемма доказана.

Лемма 3. Пусть алгебра B является тензорным произведением полного матричного кольца K_n над полем K и алгебры A с единицей над полем K . Тогда каждый B -модуль M изоморфен тензорному произведению

$$M = M_{1K} \otimes M_2,$$

где M_1 — неприводимый K_n -модуль, а M_2 — A -модуль. B -модули M изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие A -модули M_2 . В частности, модуль M разложим тогда и только тогда, когда разложим модуль M_2 .

Доказательство. Пусть M — произвольный (не обязательно конечномерный над K) B -модуль. Тогда индуцированный модуль M_{K_n} вполне приводим, причём он разлагается в прямую сумму изоморфных между собой неприводимых K_n -модулей $M = \sum_i M_i$, где i пробегает некоторое множество индексов. Выберём в каждом из конечномерных подпространств M_i такие

K -базисы $\{e_{i1}, \dots, e_{in}\}$, в которых каждому элементу $x \in K_n$ соответствует одна и та же матрица $\Gamma(x)$. Пусть $E = \bigcup_i \{e_{i1}, \dots, e_{in}\}_1$ — K -базис пространства M , полученный путём объединения базисов пространств M_i . Тогда элементам $x \in K_n$ в базисе E соответствуют диагональные матрицы

$$(21) \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \Gamma(x) \end{pmatrix},$$

а элементам $y \in A$ — блочные матрицы

$$(22) \quad y \rightarrow (\Gamma_{ij}),$$

где для всех (i, j) выполняются условия коммутирования $\Gamma_{ij} \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x) \cdot \Gamma_{ij}$. Так как матрица $\Gamma(x)$ пробегает кольцо K_n , когда x пробегает K_n , то $\Gamma_{ij}(y)$ — скалярные матрицы

$$(23) \quad \Gamma_{ij}(y) = \lambda_{ij} E_n,$$

где E_n — единичная матрица порядка n . Тогда

$$(24) \quad y \rightarrow (\lambda_{ij})$$

есть (вообще говоря, бесконечное) матричное K -представление алгебры A . Этому представлению соответствует A -модуль M_2 с базисом $\{u_1, u_2, \dots\}$ где

$$yu_i = \sum \lambda_{ij} u_j \quad (y \in A).$$

Тогда базисные элементы $e_{ij} \in E$ естественным образом можно записать в виде $e_{ij} = e_i \cdot u_j$, где $e_1, \dots, e_n$ — фиксированный базис неприводимого K_n -модуля M_1 . А это сразу показывает, что $M = M_{1K} \otimes M_2$. Далее, всякая K -матрица, коммутирующая с матрицами (21), имеет вид (22), (24), и, следовательно, эквивалентные K -представления алгебры B дают эквивалентные представления (24) алгебры A , и наоборот. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть G — произвольная группа, содержащая циклическую подгруппу конечного индекса. Тогда группа G содержит такой нормальный делитель H индекса ≤ 2 , что $H = F \times S$, где F — конечный нормальный делитель H , а S — бесконечная циклическая группа. Пусть K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядок F и не равна 2. Пусть l — число классов сопряжённых элементов H в F , а m — число тех из этих классов, которые одновременно являются классами группы G . Тогда:

1. Групповая алгебра KG является ортогональной суммой $r = m + \frac{l-m}{2}$ двухсторонних идеалов

$$(25) \quad KG = A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_r,$$

где каждый идеал A_i есть полное матричное кольцо над групповой алгеброй KG_i , G_i — либо бесконечная циклическая группа, либо бесконечная группа дидра. Если группа G действует в фактор-группе H/F тривиально, то все группы G_i — бесконечные циклические. Если группа G действует в H/F нетривиально,

то (после перенумерации) среди групп G_i имеется точно t групп диэдра и $\frac{1}{2}(l-t)$ бесконечных циклических групп.

2. Каждый конечно порождённый KG -модуль разлагается в прямую сумму неразложимых циклических модулей. KG -модуль M неразложим тогда и только тогда, когда он является неразложимым A_i -модулем для некоторого i (см. (25)). Неразложимые A_i -модули взаимно однозначно соответствуют неразложимым KG_i -модулям, и находятся в соответствии с леммой 3. Число неразложимых бесконечномерных над K KG -модулей равно r , если G действует в H/F тривиально, и $\frac{1}{2}(l-t)+4t$, если G действует в H/F нетривиально.

Доказательство. Если группа G содержит циклическую подгруппу конечного индекса, то она содержит также циклический нормальный делитель (b) конечного индекса. Пусть H — централизатор элемента $b \in G$. Тогда подгруппа H является нормальным делителем группы G индекса ≤ 2 . В самом деле, сопоставляя каждому элементу $a \in G$ автоморфизм $a^{-1}xa$ группы (b) с ядром H , и учитывая теорему о гомоморфизмах, мы получим $(G:H)=2^\alpha$, $(\alpha=0, 1)$.

Однако известно (см. [4] гл. 7.), что если фактор-группа группы по её центру конечна, то коммутант группы конечен. В силу этой теоремы коммутант H' группы H конечен. Значит фактор-группа H/H' — конечно-порождённая абелева группа.

Пусть F/H' — периодическая часть группы H/H' . Тогда F — конечный нормальный делитель группы H , а фактор-группа H/F — свободная абелева группа. Следовательно, $H=F \times S$, где S — свободная абелева группа. Очевидно, S — циклическая группа, ибо в противном случае H содержала бы бесконечный циклический нормальный делитель бесконечного индекса. Этим самым утверждение теоремы о структуре группы G доказано.

Все утверждения пункта 1 нашей теоремы содержатся в леммах 1 и 2, и в замечании 1.

Докажем утверждения пункта 2. Пусть M — конечно-порождённый KG -модуль. Тогда M разлагается в прямую сумму конечно порождённых A_i -модулей (см. (25)). Если N — конечно порождённый A_i -модуль, то N будет также конечно порождённым KG_i -модулем. Тогда N разлагается в прямую сумму неразложимых циклических KG_i -модулей. Это очевидно в случае, когда G_i — бесконечная циклическая группа, и доказано в [1] в случае, если G_i — бесконечная группа диэдра. Разложению N в прямую сумму циклических модулей по лемме 3 соответствует разложение модуля M в сумму неразложимых A_i -модулей, которые будут циклическими, ибо тензорное произведение $M_{1K} \otimes M_2$ (см. обозначения леммы 3) — циклический A_i -модуль. Далее в [1] показано, что число бесконечномерных над K неразложимых KD -модулей (D — бесконечная группа диэдра) равно 4. В сочетании с леммой 3 это доказывает остальные утверждения теоремы.

Замечание 2. Если среди алгебр A_i в (25) встречаются матричные кольца над KD (D — бесконечная группа диэдра), то разложение конечно порождённых KG -модулей в прямую сумму неразложимых циклических модулей неодно-

значно. В [1] показано, что KD имеет 4 неразложимых проективных модуля, и что группа $K_0(KD)$ есть свободная абелева группа ранга 3. В соответствии с этим результатом из теоремы 1 и леммы 3 сразу получаем, что группа $K_0(KG)$ есть свободная абелева группа ранга $r = m + \frac{1}{2}(l - m)$, если G действует в H/F тривиально, и свободная абелева группа ранга $\frac{1}{2}(l - m) + 4m$, если G действует в H/F нетривиально.

Литература

- [1] С. Д. Берман—К. Бузаши, О представлениях бесконечной группы диэдра, *Publ. Math. (Debrecen)* **28** (1981), 173—187.
- [2] А. Картан—С. Эйленберг, Гомологическая алгебра, *Изд. иностр. лит.*, 1960.
- [3] Ч. Кэртис—И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, *Изд. Наука*, 1969.
- [4] J. HUMPHREYS, *Linear Algebraic Groups*, Springer, 1975.

(Поступило 9. XII. 1978.)