

О мультипликативной полугруппе идеалов кольца нормирования*)

С. Д. БЕРМАН, Н. И. ВИШНЯКОВА

Пусть R — нёнтерово кольцо нормирования, а I, J — такие ненулевые идеалы кольца, что $I \subset J$. Найдены необходимые и достаточные условия равенства $I = JL$, где L — идеал кольца R .

Кольцом нормирования называется такое коммутативное кольцо с единицей ($1 \neq 0$), что из любых двух элементов $a, b \in R$ либо a делит b , либо b делит a .

В дальнейшем буква R всегда будет обозначать нёнтерово кольцо нормирования.

Введем ряд обозначений и определений.

Будем употреблять стандартные обозначения $\subset, \subseteq$ для включений подмножеств.

Кольцо R содержит единственный максимальный идеал V , состоящий из всех необратимых элементов кольца, а каждый конечно порожденный идеал кольца R — главный. Таким образом, R — локальное кольцо Безу.

Элемент $a \in R$ называется регулярным, если a не является делителем нуля. Все нерегулярные элементы кольца R образуют простой идеал A кольца.

Пусть I, J — ненулевые идеалы кольца R . Будем говорить, что эти идеалы принадлежат одному классу, если найдутся такие элементы $a, b \in R$, что $aI = bJ \neq 0$. Легко видеть, что множество всех ненулевых идеалов кольца R распадается на непересекающиеся подмножества, каждое из которых образует один класс.

Стабилизатором идеала $I \neq 0$ кольца R (обозначение $S(I)$) будем называть совокупность всех элементов $a \in R$, для которых $aI = I$. Очевидно, $S(I)$ -подполугруппа мультипликативной полугруппы кольца R , причем $0 \notin S(I)$.

Аннулятор идеала $I \subseteq R$ обозначим через $\text{Ann } I$, и если $I \subset (a)$, то через $a^{-1}I$ условимся обозначать идеал $J = \{b \in R, ba \in I\}$.

Пусть I — ненулевой идеал кольца R . Высотой $W = W_I(a)$ элемента a в I назовем идеал $W = \cap (\lambda)$, где λ пробегает все элементы кольца R , для которых $\lambda b = a, b \in I$.

Легко доказываются следующие предложения.

*) Формулировки теорем статьи опубликованы в Докладах Академии Наук Армунской ССР, Т. LX № 3 (1975), 144—149.

Лемма 1. Пусть I — собственный подидеал идеала J кольца R . Если $J=(a)$ и $I=aV$, то I — максимальный в J идеал кольца R . В остальных случаях существует такой главный идеал (b) , что $I \subset (b) \subset J$.

Следствие. Каждый собственный идеал I кольца R , отличный от идеалов вида aV , $a \neq 0$, есть пересечение всех главных идеалов кольца, собственным образом содержащих идеал I .

Лемма 2. Пусть $a, b, c \in R$ и $ab=ac \neq 0$. Тогда $b=\Theta c$, где Θ — обратимый элемент кольца R .

Следствие 1. Если I, J — идеалы кольца R и $aI=aJ \neq 0$, то $I=J$.

Доказательство. Предположим для определенности, что $I \subset J$ и пусть I — не максимальный в J идеал. Тогда $I \subseteq (b) \subset (c) \subseteq J$ для некоторых $b, c \in R$. Так как $aI=bJ$, то $(ab)=(ac) \neq 0$, откуда по лемме 2 $(b)=(c)$, что ведет к противоречию. Если же I — максимальный в J идеал, то в силу леммы 1 $J=(d)$, $I=dV$, и равенство $adV=(ad)$ невозможно ввиду той же леммы.

Следствие 2. Все ненулевые идеалы I из одного класса идеалов имеют один и тот же стабилизатор $S(I)$.

Доказательство. Пусть $aI=bJ \neq 0$ и $c \in S(I)$. Имеем $bJ=aI=caI=cbJ \neq 0$, и в силу следствия 1 $cJ=J$, т. е. $c \in S(J)$.

Лемма 3. Пусть I — неглавный идеал кольца R , а T — такой идеал кольца, что $L=I \cdot T \neq 0$. Тогда L — неглавный идеал. Произведение IV совпадает с I .

Доказательство. Так как I — неглавный идеал, то $I = \bigcup_{\alpha} (a_{\alpha})$, причем среди главных идеалов (a_{α}) нет такого, который содержит все остальные. Далее из определения кольца нормирования следует, что идеал $I \cdot T$ состоит из всевозможных произведений ab , где $a \in I$, $b \in T$.

Так как среди главных идеалов $(a) \subset I$ нет максимального, то по лемме 2 среди идеалов (at) также нет максимального. Следовательно, IT — неглавный идеал. Наконец, в силу леммы 1 идеал I является объединением идеалов aV , где a пробегает I . Следовательно, $IV=I$. Лемма доказана.

Лемма 4. Собственный идеал $I \neq 0$ кольца нормирования R тогда и только тогда является простым, когда $S(I)=R \setminus I$.

Доказательство. Пусть $S(I)=R \setminus I$ и $ab=c$, где $c \in I$, $b \notin I$. Тогда $c=bc_1$, $c_1 \in I$, $ab=bc_1$ и по лемме 2 имеем $a=\Theta c_1 \in I$. Значит, I — простой идеал. Наоборот, пусть I — простой идеал и $I \subset (a)$. Тогда для любого элемента $b \in I$ имеет место равенство $b=ac$, и в силу простоты I , $c \in I$ и $I=aI$, т. е. $a \in S(I)$. Для завершения доказательства заметим, что элемент a любого идеала $J \subseteq V$, $J \neq 0$ не может лежать в $S(J)$. Это очевидно, если J — неглавный идеал и сразу вытекает из леммы 2, если J — главный идеал.

Лемма 5. Подполугруппа S мультипликативной полугруппы кольца R , не содержащая нуля, тогда и только тогда является стабилизатором ненулевого идеала $I \subseteq V$, когда S есть дополнение в R некоторого простого идеала $P \neq 0$ кольца R .

Доказательство. Если $S=R\setminus P$, где P —ненулевой простой идеал, то в силу леммы 4 S есть стабилизатор P . Пусть I —ненулевой идеал в R , $I\subseteq V$. Тогда полугруппа $S=S(I)$ наряду с каждым элементом a содержит любой его делитель b . В самом деле, если $a=b\cdot c$, то $I=aI=c(bI)\subseteq bI$. Значит, $I=bI$ и $b\in S$. Если S состоит из всех единиц кольца R , то $P=V=R\setminus S$, и утверждение леммы доказано. Предположим, что S содержит необратимые элементы. Положим $P=\bigcap_{a\in S}(a)$. Тогда снова $P=R\setminus S$. Действительно, если $b\notin P$, то b делит некоторый элемент $a\in S$ и, следовательно, $b\in S$. Далее, если $b\in P$, то $b\notin S$, ибо в противном случае полугруппа S состояла бы из всех делителей элемента b , что невозможно. Наконец, если $c, d\notin P$, то $cd\in S(I)=R\setminus P$, и значит, P —простой идеал. Лемма доказана.

Из леммы 5 вытекает, что каждому идеалу $I\subseteq V$, $I\neq 0$ соответствует однозначно определенный простой идеал $P=R\setminus S(I)$, причем $I\subseteq P\subseteq V$. Будем обозначать этот простой идеал через $P(I)$.

Лемма 6. Для любого идеала $I\subseteq V$, $I\neq 0$ имеет место равенство $L=\bigcup_{\lambda\in I}\lambda^{-1}I=P(I)$.

Доказательство. Положим $P=P(I)$. Если $I=(a)$ или I —максимальный идеал в главном идеале (a) , то $S(I)$ есть, очевидно, группа единиц кольца R , $P(I)=V$ и $L=V$. В остальных случаях по следствию из леммы 1 имеет место равенство $I=\bigcap_{\lambda\in I}(\lambda)$. Покажем, что тогда $S(I)=\{a\in R, \lambda^{-1}I\subset(a), \forall \lambda\in I\}$.

В самом деле, из включений $\lambda^{-1}I\subset(a)$ для всех $\lambda\in I$ следует, что $a^{-1}I\subseteq\bigcap_{\lambda\in I}(\lambda)=I$ и тогда $a\in S(I)$. Наоборот, если $aI=I$, то $a^{-1}I\subset(\lambda)$, $\lambda^{-1}I\subset(a)$ для всех $\lambda\in I$. Так как $S(I)=R\setminus P$, то $\lambda^{-1}I\subseteq P$ для каждого $\lambda\in I$ и, следовательно, $L\subseteq P$. Предположим, что $L\subset P$. Если L —не максимальный идеал в P , то на основании леммы 1 для некоторого главного идеала (b) имеем $L\subset(b)\subset P$. Но тогда $\lambda^{-1}I\subset(b)$ для всех $\lambda\in I$ и, по доказанному, $b\in S(I)$, что противоречит включению $b\in R\setminus S(I)$.

Значит, $L=P$.

Допустим, что L —максимальный в P идеал, что в силу леммы 1 и 4 может быть только тогда, когда $P=V$ и V —главный идеал. Но тогда $L=\bigcup_{\lambda\in I}\lambda^{-1}I$ есть главный идеал V^2 , откуда заключаем, что $V^2=\lambda^{-1}I$ для некоторого $\lambda\in I$, а следовательно, I —главный идеал, что исключено. Итак, $L=P$. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть I —ненулевой идеал кольца R . Высоты всех ненулевых элементов идеала I отличны от нуля и принадлежат одному классу идеалов.

Доказательство. Имеет место формула:

$$(1) \quad \mu \bigcap_i (\lambda_i) = \bigcap_i (\mu\lambda_i) \quad (\mu, \lambda_i \in R).$$

В самом деле, $\mu \bigcap_i (\lambda_i) \subseteq \bigcap_i (\mu\lambda_i)$. Если правая часть равна нулю, то отсюда сразу получаем (1). Пусть $\bigcap_i (\mu\lambda_i) \neq 0$ и $a \in \bigcap_i (\mu\lambda_i)$, $a \neq 0$. Тогда $a = \delta_i \mu \lambda_i$.

Так как μ делит a , то $a = \mu b$, где b — фиксированный элемент кольца R . Тогда в силу леммы 2 для любого i имеет место равенство $b = \Theta_i \delta_i \lambda_i$. Значит, $b \in \bigcap_i (\lambda_i)$, откуда $\mu \bigcap_i (\lambda_i) \supseteq \bigcap_i (\mu \lambda_i)$. Это доказывает (1).

Пусть $a \in I$, $a \neq 0$ и $W = W(a)$ — высота элемента a в I . Тогда $W = \bigcap (\lambda_b)$, где $\lambda_b b = a$ и b пробегает все элементы идеала I такие, что $(b) \supseteq (a)$. Ясно, что $a \in W$ и поэтому $W \neq 0$. Пусть теперь $a = \mu b$. Тогда $W(b) = \bigcap (\lambda_c)$, $(b) \subseteq \bigcap (\lambda_c) \subseteq I$, $\lambda_c c = b$. Так как $a = \mu \lambda_c c$, то $W(a) = \bigcap (\mu \lambda_c) = \mu \bigcap (\lambda_c) = \mu W(b)$ (см. (1)). Значит, высоты ненулевых элементов идеала I лежат в одном классе идеалов. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть I — неглавный идеал кольца R , a — произвольный ненулевой элемент идеала I и $W = W(a)$ — высота элемента a в I . Тогда

$$(2) \quad WI = aP, \quad \text{где } P = P(I).$$

Доказательство. Имеем $W = \bigcap (\lambda_b)$, где $I \supset (b) \supseteq (a)$ и $\lambda_b b = a$, причем, в силу леммы 7, $W \neq 0$.

Пусть $\mu \in W$, $\mu \neq 0$. Тогда $\mu = \lambda_b \gamma_b$ ($b \in I$, $(b) \supseteq (a)$). Идеал $I \cdot W$ есть объединение всевозможных идеалов (μb) , где $\mu \in W$, $b \in I$, $(b) \supseteq (a)$. Но $\mu b = \lambda_b \gamma_b b = \gamma_b a$. Значит, $I \cdot W = \bigcup_{\mu, b} a \lambda_b^{-1}(\mu) = a \bigcup_{b \in I} \lambda_b^{-1} W$, $(b) \supseteq (a)$. Так как I — неглавный идеал, то для всех $b \in I$, $(b) \supseteq (a)$ имеет место строгое включение $(\lambda_b) \supset W$. Значит, по лемме 6

$$(3) \quad IW = aP_1, \quad \text{где } P_1 = P(W).$$

Предположим, что $aP_1 \neq 0$. Покажем что тогда $P_1 = P = P(I)$. В самом деле, из (3) вытекает, что (см. лемму 5 и следствие 2 из леммы 2).

$$(4) \quad S(I) \subseteq S(aP_1) = S(P_1) = S(W)$$

Пусть $\gamma \in S(W)$. Покажем, что $\gamma \in S(I)$. Возьмем произвольный элемент $c \in I$, $c \neq 0$. Тогда существует такой элемент $b \in I$, $(b) \supseteq (c)$, что $c = \gamma_b b$, $\gamma_b \equiv 0 \pmod{\gamma}$. Действительно, если γ делится на все элементы γ_b , $(b) \supseteq (c)$, то $\gamma \in \bigcap (\gamma_b) = W(c)$, что невозможно так как по лемме 7 $S(W) = S(W(c))$, $W(c) \neq 0$, а ненулевой идеал не имеет пересечений со своим стабилизатором (см. также леммы 4 и 5).

Пусть $\gamma_b = \gamma \delta$ для некоторого $b \in I$, $(b) \supseteq (c)$. Тогда $c = \gamma_b b = \gamma \delta b$, где $\delta b \in I$. Итак, для произвольного $\gamma \in S(W)$ и произвольного элемента $c \in I$ существует такой элемент $d \in I$, что $c = \gamma d$. Следовательно, $\gamma \in S(I)$ и

$$(5) \quad S(W) \subseteq S(I),$$

что в силу (4) дает равенство $P(W) = P(I)$.

Теперь (3) принимает вид $I \cdot W = aP$. Предположим теперь, что $aP_1 = 0$. Так как из (5) следует, что $P \subseteq P_1$, то тогда $aP = 0$ и снова получаем $I \cdot W = aP$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть J — неглавный идеал кольца R . Тогда для любого идеала $I \subseteq J$, $I \neq 0$ имеет место равенство $IP = J \cdot L$, где L — некоторый идеал кольца R , а $P = P(J)$.

Доказательство. В силу (2) для любого элемента $a \in I$, $a \neq 0$ имеет место равенство $aP = I \cdot W_a$. Положим $W_0 = 0$. Тогда $I \cdot P = \left(\bigcup_{a \in I} (a) \right) \cdot P = \bigcup_{a \in I} aP = \bigcup_{a \in I} I \cdot W_a = I \cdot \bigcup_{a \in I} W_a = I \cdot L$. Утверждение доказано.

Пусть P — простой идеал кольца R . Идеал $I \subset R$, $I \neq 0$ назовем P -чистым, если $S(I) \supseteq S(P)$, что в силу леммы 4 эквивалентно условию: $aI = I$ для всех $a \notin P$. Ясно, что каждый P -чистый идеал I содержится в идеале P . Если $a \in P$, $a \neq 0$, то P -главным идеалом, порожденным элементом a (обозначение $(a)_P$) будем называть объединение всех главных идеалов $r^{-1}(a)$, где r пробегает все элементы из $S(P) = R \setminus P$. Очевидно, идеал $(a)_P$ является пересечением всех P -чистых идеалов, содержащих элемент a , а каждый P -чистый идеал есть объединение P -главных идеалов.

Пусть по-прежнему P — простой идеал. Как обычно, будем обозначать через R_P кольцо частных кольца R , соответствующее мультипликативной системе $R \setminus P = S(P)$. Элементами кольца R_P являются дроби $\frac{a}{r}$, где $r \in S(P)$, а

отображение $a \rightarrow \frac{a}{1}$ ($a \in R$) определяет канонический гомоморфизм R в R_P , ядром которого является идеал $\bigcup_{a \in S(P)} \text{Ann } a = Q$ [1].

Лемма 8. Пусть R — нецелостное кольцо, A — идеал кольца, состоящий из всех его нерегулярных элементов, а P — простой идеал, собственным образом содержащийся в A . Тогда идеал $\text{Ann } P$ отличен от нуля и является минимальным P -чистым идеалом кольца. Идеал $\text{Ann } P$ является ядром канонического гомоморфизма $R \rightarrow R_P$.

Доказательство. Существует элемент $a \in A$, такой что $P \subset (a) \subset A$. Если $A \neq V$ или если $A = V$, что V -неглавный идеал, то это вытекает из лемм 1 и 4, так как простой идеал, отличный от V , не может быть главным. Если же $A = V$ и $V = (c)$ — главный идеал, то снова можно применить лемму 1, ибо максимальный в V идеал (c^2) не является простым. Так как a — нерегулярный элемент, то $\text{Ann } a \neq 0$ и, следовательно $L = \text{Ann } P \neq 0$. Из леммы 4 следует, что $L \subseteq P$. Далее L — P -чистый идеал, так как из равенства $aP = P$ следует, что $\text{Ann } aP = a^{-1} \text{Ann } P = \text{Ann } P$. Пусть $L_1 \neq 0$ — произвольный P -чистый идеал, содержащийся в L . Покажем, что для любого элемента $a \in L$, $a \neq 0$ имеет место равенство $(a)_P = L_1$. В самом деле, $(a)_P = \bigcup_{r \notin P} r^{-1}(a)$. Пусть $b \in L_1$ и $a = bc$. Тогда $c \notin P$, ибо в противном случае $bc = 0$. Следовательно, $b \in c^{-1}(a)$ и, таким образом, $L_1 \subseteq (a)_P$. Так как обратное включение очевидно, то $L_1 = (a)_P$. Поскольку это равенство справедливо для любого элемента $a \in L$, $a \neq 0$, то $L = L_1$ и L — минимальный P -чистый идеал. Так как $\text{Ann } c \subseteq L$ для любого $c \in P$, то $Q = \bigcup \text{Ann } c \subseteq L$. (По-предыдущему, Q — ядро канонического гомоморфизма $R \rightarrow R_P$.) С другой стороны, Q является P -чистым идеалом. В самом деле, пусть $b_1 c \notin P$. Тогда $\text{Ann } b \subset (c)$, ибо $\text{Ann } b \subseteq Q \subseteq P$, и $c^{-1} \text{Ann } b = \text{Ann } bc$, где $bc \notin P$. Следовательно, $Qc = Q$ для любого $c \notin P$. В силу минимальности идеала L получаем, что $Q = L$. Лемма доказана.

Будем обозначать гомоморфные образы идеалов $I \subset R$ в R_P через $\bar{I}$. Из леммы 8 следует, что P -чистые идеалы I кольца R могут быть охарактеризо-

ваны как ненулевые идеалы, образы $\bar{I}$ которых являются идеалами в R_P , а P -главные идеалы I как ненулевые идеалы, образы которых являются главными идеалами кольца R_P . (Для P -главного идеала $Q = \text{Ann } P$ идеал $\bar{Q}$ равен нулю.) Заметим, что ввиду леммы 8 каждый P -чистый идеал $I \subset R$ является прообразом идеала $\bar{I} \subset R_P$ в R .

Теорема 2. Пусть I, J , где $I \subseteq J$ — ненулевые идеалы кольца R и $P = P(J)$. Равенство $I = J \cdot L$, где L — некоторый идеал кольца R , выполняется тогда и только тогда, когда $S(J) \subseteq S(I)$ (т. е., когда I есть P -чистый идеал), и при этом J является P -главным идеалом, если I есть P -главный идеал.

Доказательство. Пусть $I = J \cdot L$. Тогда ясно, что $S(J) \subseteq S(I)$. Предположим, что I есть P -главный идеал и покажем, что J также P -главный идеал. Как и раньше, обозначим через $Q = \bigcup_{a \notin P} \text{Ann } a$ канонического гомоморфизма $R \rightarrow R_P$. Предположим, что $P \subset A$. Тогда по лемме 8 $Q = \text{Ann } P \neq 0$, причем Q — минимальный P -чистый идеал и $Q = (a)_P$ для любого $a \in Q, a \neq 0$. Пусть $I = Q$. Тогда в силу минимальности идеала Q (лемма 8) получаем, что для некоторого элемента $b \in L$ имеет место равенство $Q = Jb$. Пусть $Q = (a)_P, a \in Q$ и $a = c \cdot b, c \in J$. Тогда $J = (c)_P$, т. е. J есть P -главный идеал. Предположим теперь, что $I \supset Q$. Тогда из равенства $I = J \cdot L$ вытекает равенство $\bar{I} = \bar{J} \cdot \bar{L}$ в кольце $R_P, \bar{I} \neq 0$. Пусть $\bar{L}$ — идеал кольца R_P , порожденный множеством $\bar{L}$. Так как $\bar{I}$ и $\bar{J}$ — идеалы в R_P , то $\bar{I} = \bar{J} \cdot \bar{L}$. Поскольку I является P -главным идеалом, то $\bar{I}$ — главный идеал в R_P , и в силу леммы 3, $\bar{J}$ — также главный идеал, откуда заключаем, что J есть P -главный идеал кольца R .

Установим теперь достаточность условий теоремы. Пусть $S(J) \subseteq S(I)$.

Если J — главный идеал, то утверждение теоремы очевидно. Предположим, что J не является главным идеалом. Пусть J есть P -главный идеал: $J = (a)_P$. Тогда $I = a^{-1}I(a)$ и так как I — P -чистый идеал, то $I = a^{-1}I(a)_P = a^{-1}I \cdot J$. Остается рассмотреть случай, когда J не является P -главным идеалом. Тогда по условию идеал I также не P -главный идеал. Ввиду следствия из теоремы 1 имеет место равенство $I \cdot P = J \cdot W$ ($P = P(J)$), откуда $\bar{J} \cdot \bar{P} = \bar{J} \cdot \bar{W}$. Так как $\bar{P}$ — максимальный идеал в R_P , а $\bar{I}$ не является главным идеалом кольца R_P , то по лемме 3 имеем $\bar{I}\bar{P} = \bar{I}$. Следовательно, P -чистые идеалы I и $IP = J \cdot W$ имеют один и тот же образ $\bar{I}$ в R_P . Значит, они совпадают: $I = J \cdot W$. Теорема доказана.

Теорема 2 показывает, что равенство $I = J \cdot L$ в мультипликативной полугруппе идеалов кольца нормирования сводится (при одном естественном ограничении) к теоретико-множественному включению $P(I) \subseteq P(J)$ соответствующих простых идеалов.

Литература

- [1] Н. Бурбаки, Коммутативная алгебра. «Мир», 1973.
- [2] С. Д. Берман, Н. И. Вишнякова, О идеалах над кольцами нормирования. Доклады Акад. Наук Армянской ССР 60 (1975), 144—148.

(Поступило: 18. XII. 1978)