

О понятии «связности» конечной группы*

Э. М. ЖМУДЬ (Харьков)

Введение

Пусть G -группа (рассматриваются только конечные группы). Если $G \neq \{1\}$, то последовательность $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ элементов множества $G^* = G \setminus \{1\}$ назовем C -последовательностью, соединяющей элементы $x, y \in G^*$, если $x_0 = x$, $x_n = y$, $x_{i-1}x_i = x_i x_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n$). Элемент $y \in G^*$ достижим из элемента $x \in G^*$, если существует C -последовательность соединяющая x с y . Отношение достижимости является отношением эквивалентности на G^* . Классы этого отношения назовем компонентами связности группы G ¹⁾. Группа G связна, если G^* — компонента связности и несвязна — в противном случае. Подмножество $A \subseteq G^*$ назовем замкнутым, если $x \in A$ влечет $C_G(x) \subseteq \hat{A} = A \cup \{1\}$. Пустое подмножество замкнуто по определению. Компоненты связности замкнуты. Подмножество $A \subseteq G^*$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно является объединением некоторого множества компонент связности. Если $A, B \subseteq G^*$, то замкнутость A и B влечет замкнутость $A \cap B$, $A \cup B$ и $G^* \setminus A$. Подмножество $A \subseteq G$ назовем связным, если любые два элемента $x, y \in A^* = A \setminus \{1\}$ можно соединить C -последовательностью, содержащейся в A^* . Если $\emptyset \neq A \subseteq G^*$ и A замкнуто, то связность A равносильна тому, что A — компонента связности.

Примеры несвязных групп: группы Фробениуса, двойные группы Фробениуса²⁾, группы Цассенхауза (Z -группы), т. е. группы обладающие точным строго дважды транзитивным подстановочным представлением³⁾.

Основными результатами настоящей работы являются сформулированные ниже теоремы 1—3.

Теорема 1. Следующие утверждения равносильны:

- (I) Группа G несвязна.
- (II) G^* содержит собственное нормальное замкнутое подмножество.
- (III) Существует такое разбиение $\{\pi, \pi'\}$ множества всех простых делителей порядка группы G на два непустых подмножества π и π' , что

*) В работе изложены доказательства части результатов анонсированных в [6].

¹⁾ Элементы $x, y \in G^*$ принадлежат одной и той же компоненте связности тогда и только тогда, когда расстояние Брауэра—Фаулера [3] между ними конечно.

²⁾ В литературе (см. напр. [5]) эти группы известны под названием „2-Frobenius groups”

³⁾ Подстановочное представление Γ группы G называется в настоящей работе строго k — кратно транзитивным, если Γk — кратно транзитивно, причем подстановка $\Gamma(x)$ ($x \in G$) имеющая $k+1$ неподвижных точек, является единичной.

каждый элемент группы G является либо π -элементом, либо π' -элементом.

- (IV) Группа G обладает обобщенным характером, принимающим на $G^\#$ значения 0 и 1.

Теорема 2. Если несвязная группа G не является группой Фробениуса, то $G/F(G)$ несвязна; если G не является ни группой Фробениуса, ни двойной группой Фробениуса, то $F(G/F(G)) = \{1\}$ и цокль группы $G/F(G)$ является нециклической простой группой.

Следствие. Класс несвязных разрешимых групп исчерпывается разрешимыми группами Фробениуса и двойными группами Фробениуса⁴).

Теорема 3. Группа G является Z -группой тогда и только тогда, когда она обладает неприводимым комплексным нелинейным характером χ , удовлетворяющим следующим условиям:

- (I) Функция $|\chi(x)|$ ($x \in G$) принимает на $G^\#$ значения 0 и 1.
- (II) Группа G содержит связную подгруппу H порядка $\chi(1)$.
- (III) Множество нулей $T_\chi = \{x \in G \mid \chi(x) = 0\}$ характера χ несвязно.

Обозначения

$\subset$ и $\supset$ — символы строгих включений; $|M|$ — число элементов конечного множества M ; $|x|$ — порядок элемента x группы X ; $x^y = y^{-1}xy$ ($x, y \in X$); X -классы — классы сопряженных элементов группы X ; x^X — X -класс элемента $x \in X$; $\langle Y \rangle$ — подгруппа порожденная подмножеством $Y \subseteq X$; $Z(X)$ — центр X ; $\text{Aut}(X)$ -группа автоморфизмов группы X ; $F(X)$ -подгруппа Фиттинга группы X ; $Y \cong X$ — « Y -подгруппа группы X »; $\mathfrak{S}$ -подгруппа — силовская подгруппа; $\mathfrak{S}_p$ -подгруппа — силовская p -подгруппа; если X -группа и $A \subseteq X$, то $A^\# = A \setminus \{1\}$, $\hat{A} = A \cup \{1\}$, $\pi(A)$ — множество всех простых делителей порядков элементов подмножества A ; $\pi(m)$ — множество всех простых делителей натурального числа m ; $\pi(x) = \pi(|x|)$ ($x \in X$); $\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел; $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел; $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

§ 1. Доказательство теоремы 1

1.1. *Определение.* Будем говорить, что задано разбиение $\{A, B\}$ группы G , если $A, B \subseteq G^\#$, $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cup B = G^\#$, $A \cap B = \emptyset$. Разбиение $\{A, B\}$ назовем нормальным, если A (а потому и B) нормально, т. е. $A^g = A$ ($g \in G$).

1.2. *Определение.* Разбиение $\{A, B\}$ группы G назовем C -разбиением, если A (а потому и B) замкнуто.

1.3. **Лемма.** Следующие утверждения равносильны:

⁴) Ввиду теоремы 1 этот результат равносильен лемме 2.3 статьи [5]. Частными случаями теоремы 2 являются также предложение 2.2 и лемма 2.5 статьи [5].

(I) Группа G несвязна.

(II) Группа G обладает нормальным C -разбиением.

Доказательство. Допустим, что G несвязна и $\Omega = \{D_1=D, \dots, D_n\}$ — множество всех ее компонент связности. Компоненты связности $\{D_i\}$ представляются внутренними автоморфизмами группы G , вследствие чего возникает ее представление $\Gamma: g \mapsto \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_n \end{pmatrix} (g \in G)$ подстановками множества Ω . Представление Γ не транзитивно: в противном случае $|D_1| = \dots = |D_n| = d$ и, следовательно, $|G| - 1 = |G^\#| = \sum_i |D_i| = nd$; так как $n = (G : N_G(D))$ делит $|G|$, то $n=1$, что противоречит несвязности G . Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ ($s > 1$) — орбиты Γ . Если A — объединение всех компонент связности, входящих в Ω_1 , B — объединение остальных компонент связности, то $\{A, B\}$ — нормальное C -разбиение группы G . Таким образом (I) $\Rightarrow$ (II). Импликация (II) $\Rightarrow$ (I) очевидна.

1.4. Лемма. *Всякая связная подгруппа группы G содержится в одной из ее пополненных единицей компонент связности. В частности, этим свойством обладают нильпотентные подгруппы группы G .*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Второе вытекает из нетривиальности центра нильпотентной группы отличной от $\{1\}$.

1.5. Следствие. *Если $\emptyset \neq A \subseteq G^\#$, A замкнуто и $p \in \pi(A)$, то $\hat{A}$ содержит $\mathfrak{S}_p$ -подгруппу группы G . Если, в частности, A нормально, то $\hat{A}$ содержит все силовские p -подгруппы группы G .*

Доказательство. Если $x \in A$, $p \in \pi(x)$, то $y = x^{\frac{|x|}{p}} \in A$, $|y| = p$. Если D — компонента связности содержащая y , то в силу 1.4 каждая $\mathfrak{S}_p$ -подгруппа содержащая y содержится в $\hat{D}$, а потому и в $\hat{A}$. Второе утверждение очевидно.

1.6. Следствие. *Если $\{A, B\}$ — C -разбиение группы G , то каждая связная (в частности — нильпотентная) подгруппа группы G содержится в одном из подмножеств $\hat{A}, \hat{B}$. Если, в частности, $\{A, B\}$ нормально и $p \in \pi(G)$, то одно из подмножеств $\hat{A}, \hat{B}$ содержит все $\mathfrak{S}_p$ -подгруппы группы G .*

1.7. Определение. Емкостью $c(A)$ подмножества $A \subseteq G$ назовем наименьшее общее кратное порядков подгрупп группы G , содержащихся в $\hat{A}$. Очевидно, $c(G) = |G|$, $c(\emptyset) = c(\{1\}) = 1$. Если A замкнуто, то $\pi(A) = \pi(c(A))$.

1.8. Лемма. *Если $\emptyset \neq A \subseteq G^\#$ и A замкнуто, то $c(A)$ равно наименьшему общему кратному порядков $\mathfrak{S}$ -подгрупп группы G содержащихся в $\hat{A}$.*

Доказательство. Очевидно, $c(A)$ делится на порядки всех $\mathfrak{S}$ -подгрупп группы G , содержащихся в $\hat{A}$. Если $p \in \pi(c(A))$, то $p \in \pi(A)$ и, следовательно, в силу 1.5 $\hat{A}$ содержит $\mathfrak{S}_p$ -подгруппу P группы G ; ввиду 1.7 $|P| \mid c(A)$. Это доказывает утверждение.

1.9. Лемма. *Если A и B — нормальные замкнутые подмножества множества $G^\#$ и $A \cap B = \emptyset$, то $(c(A), c(B)) = 1$ и $c(A \cup B) = c(A)c(B)$.*

Доказательство. Если $(c(A), c(B)) = m > 1$ и $p \in \pi(m)$, то $p \in \pi(A) \cap \pi(B)$. Поэтому в силу 1.5 каждая $\mathfrak{S}_p$ -подгруппа группы G содержится в $\hat{A} \cap \hat{B} = \{1\}$ — противоречие. Таким образом, $m = 1$. Если $M = A \cup B$ и P — $\mathfrak{S}$ -подгруппа группы G , то ввиду 1.5 $P \subseteq \hat{M}$ тогда и только тогда, когда $P \subseteq \hat{A}$, либо $P \subseteq \hat{B}$. Ввиду 1.7, отсюда следует, что $c(M) = c(A) \cdot c(B)$.

1.10. Следствие. Если A и B — нормальные замкнутые подмножества множества $G^\#$, то $c(A \cup B) \cdot c(A \cap B) = c(A) \cdot c(B)$.

1.11. Следствие. Если A и B — нормальные замкнутые подмножества множества $G^\#$, $A \cap B = \emptyset$, то порядки элементов подмножества $\hat{A}$ взаимно просты с порядками элементов подмножества $\hat{B}$.

1.12. Лемма. Если A — нормальное замкнутое подмножество множества $G^\#$ и $H \leq G$, то $H \subseteq \hat{A}$ равносильно $|H| \mid c(A)$.

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем $\emptyset \neq A \neq G^\#$, $H \neq \{1\}$. Если $H \subseteq \hat{A}$, то $|H| \mid c(A)$ в силу 1.7. Обратно, пусть $|H| \mid c(A)$. Если $x \in H^\#$, $p \in \pi(x)$, то $p \mid c(A)$, откуда $p \in \pi(A)$ и, следовательно, в силу 1.5, $x^{\frac{|x|}{p}} \in \hat{A}$. Поэтому $x \in C_G(x^{\frac{|x|}{p}}) \subseteq \hat{A}$. Таким образом, $H \subseteq \hat{A}$.

1.13. Лемма. Если A — нормальное замкнутое подмножество множества $G^\#$, то $\hat{A} = \{x \in G \mid x^{c(A)} = 1\}$.

Доказательство. Если $x \in \hat{A}$, то $\langle x \rangle \subseteq \hat{A}$. Поэтому $|x| \mid c(A)$, откуда $x^{c(A)} = 1$. Обратно, $x^{c(A)} = 1$ влечет $x \in \hat{A}$ так как в противном случае $x \in B = G^\# \setminus A$ и по доказанному $x^{c(B)} = 1$; так как $(c(A), c(B)) = 1$, то $x = 1 \notin B$ — противоречие.

1.14. Лемма. (Фробениус [4].) Пусть n — натуральное число, $n \mid |G|$ и функция $\vartheta: G \rightarrow \mathbb{Z}$ определена так, что $\vartheta(x) = 0$, если $x^n \neq 1$ и $\vartheta(x) = \frac{|G|}{n}$, если $x^n = 1$. Тогда ϑ — обобщенный характер группы G . В частности, число решений уравнения $x^n = 1$ ($x \in G$) делится на n .

1.15. Лемма.⁵⁾ Пусть ϑ — обобщенный характер группы G принимающий значения в $\mathbb{Z}$. Если $u, v \in G$, v — p -элемент ($p \in \pi(G)$) и $uv = vu$, то $\vartheta(uv) \equiv \vartheta(u) \pmod{p}$.

1.16. Лемма. Если $\{A, B\}$ — разбиение группы G , то следующие условия равносильны:

- (I) $\{A, B\}$ — нормальное C -разбиение.
- (II) Порядки элементов множества A взаимно просты с порядками элементов множества B .
- (III) Группа G обладает обобщенным характером, принимающим на A и B соответственно значения 0 и 1.

⁵⁾ Доказательство легко получается, например, с помощью леммы 2 в [7] (стр. 77).

Доказательство. (I) $\Rightarrow$ (II) в силу 1.11. Допуская (II), положим $|G| = \prod_{p \in \pi(G)} p^{z_p}$, $a = \prod_{p \in \pi(A)} p^{z_p}$, $b = \prod_{p \in \pi(B)} p^{z_p}$. Очевидно, $|G| = a \cdot b$, $a > 1$, $b > 1$, $(a, b) = 1$. В силу 1.14 существуют такие обобщенные характеры ϑ_A и ϑ_B , что

$$\vartheta_A(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x \in \hat{A}, \\ 0, & \text{если } x \in B, \end{cases} \quad \vartheta_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in A \\ a, & \text{если } x \in \hat{B}. \end{cases}$$

Функция $\eta = b \cdot 1_G - \vartheta_A$ (1_G — главный характер группы G) является обобщенным характером, причем

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in A \\ b, & \text{если } x \in B. \end{cases}$$

Так как $(a, b) = 1$, то $am + bn = 1$, где $m, n \in \mathbb{Z}$. Полагая $\vartheta = n\eta + m\vartheta_B$, получим обобщенный характер, удовлетворяющий условию (III). Таким образом (II) $\Rightarrow$ (III).

Докажем импликацию (III) $\Rightarrow$ (I). Пусть ϑ — обобщенный характер, удовлетворяющий условию (III). Обозначим через C одно из подмножеств A, B . Если $u \in C$, $v \in G$, v примарен, $uv = vu \neq 1$, то $uv \in C$. Действительно, если v — p -элемент ($p \in \pi(G)$), то ввиду 1.15 $\vartheta(uv) \equiv \vartheta(u) \pmod{p}$, откуда $uv \in C$. Докажем теперь, что $x \in A$, $y \in C_G(x)^\#$ влечет $y \in A$. Предполагая, что $y \in B$, рассмотрим разложения $x = x_1 \dots x_r$, $y = y_1 \dots y_s$ элементов x, y на отличные от 1 примарные компоненты. Так как $x_1, \dots, x_r$ попарно перестановочны и примарны, то в силу сделанного выше замечания $x_1 \in C$ влечет последовательно $x_1 x_2 \in C, \dots, x = x_1 \dots x_r \in C$. Поэтому $C = A$ и, следовательно, $x_1 \in A$. Аналогично докажем, что $y_1 \in B$. Замечая, что $x_1 y_1 = y_1 x_1 \neq 1$ ⁶⁾, положим $u = x_1$, $v = y_1$ и затем $u = y_1$, $v = x_1$. В силу сделанного выше замечания получим $x_1 y_1 \in A \cap B = \emptyset$ — противоречие. Следовательно, $y \in A$. Таким образом, A замкнуто. Нормальность A следует из (III). Таким образом (III) $\Rightarrow$ (I).

1 ¹⁷. Утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из 1.3 и 1.16.

§ 2. Доказательство теоремы 2

2.1. *Определение.* Подгруппу H группы G назовем чистой относительно C -разбиения $\{A, B\}$, если H содержится в одном из подмножеств $\hat{A}, \hat{B}$. В противном случае, подгруппу H будем называть смешанной.

2.2. *Лемма.* Всякий чистый относительно C -разбиения $\{A, B\}$ нормальный делитель N группы G нильпотентен. Каждая нильпотентная подгруппа группы G чиста относительно любого ее C -разбиения.

Доказательство. Пусть, например, $N \subseteq \hat{A}$. Если $x \in B$, $p \in \pi(x)$, то $y = x^{\frac{|x|}{p}} \in B$, $|y| = p$. Ввиду замкнутости B элемент y порождает на N регулярный автоморфизм простого порядка p , откуда вытекает первое утверждение. Второе утверждение следует из 1.4.

⁶⁾ Так как $x_1 \in \langle x \rangle$, $y_1 \in \langle y \rangle$, $xy = yx$, то $x_1 y_1 = y_1 x_1$. Из $x_1 y_1 = 1$ следует $1 = \vartheta(y_1) = \vartheta(x_1^{-1}) = \vartheta(x_1) = 0$ — противоречие.

2.3. Лемма. Цоколь S несвязной группы G абелев, если $F(G) \neq \{1\}$; если $F(G) = \{1\}$, то S — нециклическая простая группа.

Доказательство. В силу 2.2 $F(G)$ чиста относительно любого нормального C -разбиения $\{A, B\}$. Допустим, что $F(G) \neq \{1\}$, $F(G) \subseteq \hat{A}$. Если F — минимальный нормальный делитель группы G , $F \not\subseteq F(G)$, то $F \cap F(G) = \{1\}$; поэтому $F \subseteq C_G(F(G)) \subseteq \hat{A}$. Следовательно, F нильпотентен, откуда $F \subseteq F(G)$ — противоречие. Таким образом, все минимальные нормальные делители группы G содержатся в $F(G)$ и, следовательно, абелевы. Поэтому S — абелева группа. Если $F(G) = \{1\}$, то S — прямое произведение нециклических простых групп: $S = P_1 \times \dots \times P_m$. Допустим, что $m > 1$. Подгруппы P_i ($i = 1, \dots, m$) — смешанные относительно C -разбиения $\{A, B\}$. Действительно, если например, $P_1 \subseteq \hat{A}$, то $P_i \subseteq C_G(P_1) \subseteq \hat{A}$ ($i > 1$). Поэтому $|P_i| \mid c(A)$ ($i = 1, \dots, m$); следовательно, $|S| = \prod_i |P_i|$ делит $\{c(A)\}^m$, откуда в силу 1.9 $(|S|, c(B)) = 1$. Поэтому $|S| \mid c(A)$, откуда ввиду 1.12, $S \subseteq \hat{A}$. Ввиду 2.2 отсюда вытекает нильпотентность S , что противоречит условию $F(G) = \{1\}$. Если $x, y \in P_1^\#$, $x \in A$, $y \in B$, $z \in P_2^\#$, то $z \in C_G(x) \cap C_G(y) \subseteq \hat{A} \cap \hat{B} = \{1\}$, откуда $z = 1$ — противоречие. Таким образом, $m = 1$: S — нециклическая простая группа.

2.4. Лемма. Группы Фробениуса несвязны.

Доказательство. Ядро N группы Фробениуса G нильпотентно, откуда в силу 1.4 $N^\# \subseteq D$, где D компонента связности G . Так как $N^\#$ замкнуто, то $N^\# = D$, откуда, ввиду $N^\# \neq G^\#$, вытекает утверждение⁷⁾.

2.5. Определение. Группа G называется двойной группой Фробениуса, если она содержит такой нормальный делитель F , что (I) F -группа Фробениуса; (II) G/N (N — ядро F)⁸⁾-группа Фробениуса с ядром F/N ⁹⁾.

Леммы 2.6—2.10 являются известными утверждениями.

2.6. Лемма. Пусть $\Phi \triangleleft G$, Φ -группа Фробениуса с ядром N и дополнением H . Тогда $G = N \cdot N_G(H)^*$.

2.7. Лемма. Пусть G — двойная группа Фробениуса, N и F — подгруппы удовлетворяющие условиям (I) и (II) определения 2.5, H — дополнительный множитель F , $F_1 = N_G(H)$. Тогда (I) $F_1 \cong G/N$; (II) ядро группы Фробениуса F_1 совпадает с H ; (III) $G = N \cdot F_1 = F \cdot K$, где K — дополнительный множитель F_1 .

2.8. Подгруппы F и F_1 называются соответственно левым и правым фробениусовыми множителями двойной группы Фробениуса G . F определяется группой G однозначно, F_1 — с точностью до сопряженности.

2.9. Лемма. Правый фробениусов множитель F_1 двойной группы Фробениуса метациклический: его ядро H и дополнительный множитель K циклические; $|H|$ нечетно.

⁷⁾ Легко видеть, что кроме $N^\#$ компонентами связности G являются подмножества $H_i^\#$ ($i = 1, \dots, n$), где H_i ($i = 1, \dots, n$) — дополнительные множители группы G .

⁸⁾ Очевидно, $N \trianglelefteq G$.

⁹⁾ Пример: S_4 ; здесь $F = A_4$, $N = V_4$.

^{*}) $A \cdot B$ означает полупрямое произведение нормального делителя A и подгруппы B .

2.10. *Следствие.* Двойные группы Фробениуса разрешимы.

2.11. *Лемма.* Двойные группы Фробениуса несвязны.

Доказательство. Пусть G — двойная группа Фробениуса, F — ее левый фробениусов множитель, N — ядро F . Рассмотрение фактор-группы G/N позволяет убедиться в замкнутости подмножества $A = F \setminus N$. Следовательно, группа G несвязна.

2.12. *Лемма.* Если G несвязна и не является группой Фробениуса, то $G/F(G)$ несвязна.

Доказательство. Если $F(G) = \{1\}$ утверждение очевидно. Допустим, что $F(G) \neq \{1\}$. Пусть $\{A, B\}$ — нормальное C -разбиение G , и например, $F(G) \subseteq \hat{A}$. Если $F(G) = \hat{A}$, то G -группа Фробениуса с ядром $F(G)$ — противоречие. Следовательно, $F(G) \subset \hat{A}$. Обозначим через $\bar{M}$ канонический образ в группе $\bar{G} = G/F(G)$ подмножества $M \subseteq G$. Так как $\emptyset \neq F(G)^* \subset A$, то $\bar{A}^* \neq \emptyset$. Из $B \neq \emptyset = B \cap F(G)$ следует, что $\bar{B} \neq \emptyset$, $\bar{B} \subseteq \bar{G}^*$. Очевидно также, что $\bar{G}^* = \bar{A}^* \cup \bar{B}$. Если $\bar{a} \in \bar{A}^*$, $\bar{b} \in \bar{B}$ ($a, b \in G$), то a и b можно выбрать так, чтобы имело место $a \in A$, $b \in B$. Так как $(|a|, |b|) = 1$ и $|\bar{a}| \mid |a|$, $|\bar{b}| \mid |b|$, то $(|\bar{a}|, |\bar{b}|) = 1$. Таким образом, порядки элементов $\bar{A}^*$ взаимно просты с порядками элементов $\bar{B}$. Отсюда, в частности, вытекает, что $\bar{A}^* \cap \bar{B} = \emptyset$. Следовательно, $\{\bar{A}^*, \bar{B}\}$ — разбиение группы $\bar{G}$. Так как для него выполнено условие (II) леммы 1.16, то оно является нормальным C -разбиением группы $\bar{G}$. Поэтому $\bar{G}$ несвязна.

2.13. *Лемма.* Если группа G несвязна и $F(G/F(G)) \neq \{1\}$, то $F(G)$ выделяется в G инвариантным полупрямым множителем:

$$G = F(G) \cdot L, \quad \text{где } L \trianglelefteq G.$$

Доказательство. Положим $\bar{G} = G/F(G)$. По условию $F(\bar{G}) \neq \{1\}$. Если R — полный прообраз $F(\bar{G})$ в G , то $R \trianglelefteq G$, $R \supset F(G)$, $R/F(G) = F(\bar{G})$. Пусть $\Phi \trianglelefteq G$, $\Phi \subseteq R$, Φ покрывает $F(G)$ ¹⁰. Φ — смешанная подгруппа относительно нормального C -разбиения $\{A, B\}$ группы G . В противном случае Φ нильпотентна, вопреки условию $\Phi \supset F(G)$. Если, например, $F(G) \subseteq \hat{A}$, то

$$(\Phi \setminus F(G)) \cap B \neq \emptyset.$$

Пусть $g \in (\Phi \setminus F(G)) \cap B$. Так как $\Phi/F(G)$ — главный фактор и $\Phi/F(G) \subseteq R/F(G) = F(\bar{G})$, то $\Phi/F(G)$ — элементарная абелева p -группа ($p \in \pi(\bar{G})$). Поэтому $g^p \in F(G)$. С другой стороны, так как $g \in B$, то $g^p \in \hat{B}$. Следовательно, $g^p \in F(G) \cap \hat{B} \subseteq \hat{A} \cap \hat{B} = \{1\}$, откуда $|g| = p$. Если $x \in \Phi \setminus F(G)$, то $x^p \in F(G)$. Из $x \in A$ следует, ввиду 1.11, что $(|x|, p) = (|x|, |g|) = 1$. Ввиду $x^p \in F(G)$, отсюда следует $x \in F(G)$ — противоречие. Таким образом, $x \in B$. Следовательно, $\Phi \setminus F(G) \subseteq B$. Так как $F(G) \subseteq \hat{A}$ и элементы B действуют регулярно на нормальных делителях содержащихся в $\hat{A}$, то Φ -группа Фробениуса с ядром $F(G)$. Если H — ее дополнительный множитель, то в силу 2.6 $G = F(G) \cdot L$, где $L = N_G(H)$.

¹⁰) Это означает, что $\Phi \supset F(G)$ и $\Phi/F(G)$ — главный фактор группы G .

В дальнейшем (леммы 2.14—2.16) группа G предполагается удовлетворяющей условиям леммы 2.13; при этом сохраняются обозначения принятые в доказательстве последней.

2.14. Лемма. $|H|=p$; если $F(G) \subseteq \hat{A}$, то $H \subseteq \hat{B}$.

Доказательство. Так как $H \cong \Phi/F(G)$, то H — элементарная абелева p -группа. Как группа без неподвижных точек, H циклическа; следовательно, $|H|=p$. Если $F(G) \subseteq \hat{A}$, то как было доказано выше $\Phi \setminus F(G) \subseteq B$. Так как $\Phi = F(G) \cdot H$, то $H^* \subset \Phi \setminus F(G)$, откуда $H \subseteq \hat{B}$.

2.15. Лемма. Если подгруппа L чиста относительно нормального C -разбиения $\{A, B\}$, то G -группа Фробениуса с ядром $F(G)$.

Доказательство. Пусть, как и выше, $F(G) \subseteq \hat{A}$. Так как L чиста, $L = N_G(H) \supseteq H$ и в силу 2.14, $H \subseteq \hat{B}$, то $L \subseteq \hat{B}$. Если $g \in G \setminus F(G)$, то $g^{[L]} = g^{|G/F(G)|} \in F(G)$. Ввиду $L \subseteq \hat{B}$ и 1.11 условие $g \in A$ влечет $(|g|, |L|) = 1$. Поэтому $g \in F(G)$ — противоречие. Таким образом, $G \setminus F(G) \subseteq B$. Так как $F(G) \subseteq \hat{A}$, то элементы B действуют на $F(G)$ регулярно. Поэтому G -группа Фробениуса с ядром $F(G)$.

2.15. Лемма. Если L смешана относительно нормального C -разбиения $\{A, B\}$, то G — двойная группа Фробениуса.

Доказательство. Так как L смешанная, то $A_L = A \cap L \neq \emptyset$, $B_L = B \cap L \neq \emptyset$. Поэтому $\{A_L, B_L\}$ — нормальное C -разбиение подгруппы L , откуда вытекает несвязность L . Так как $H \triangleleft N_G(H) = L$ и H абелева, то $H \triangleleft F(L)$; поскольку в силу 2.14 H имеет простой порядок, то $H \subseteq Z(F(L))$. Следовательно, $F(L) \subseteq C_G(H)$. Если $F(G) \subseteq \hat{A}$, то ввиду 2.14 $H \subseteq \hat{B}$. Поэтому $C_G(H) \subseteq \hat{B}$. Так как $C_G(H) \subseteq N_G(H) = L$, отсюда следует, что $C_G(H) \subseteq \hat{B}_L$. Следовательно, $C_G(H)$ чиста относительно нормального C -разбиения $\{A_L, B_L\}$ подгруппы L . Так как $C_G(H) \triangleleft L$, то в силу 2.2 $C_G(H)$ нильпотентна. Поэтому $C_G(H) \subseteq F(L)$ и, следовательно, $C_G(H) = F(L)$. Так как $L/F(L) = N_G(H)/C_G(H)$ изоморфна подгруппе $\text{Aut}(H)$, то ввиду цикличности H , $L/F(L)$ — абелева группа. Таким образом, L несвязна и $F(L/F(L)) = L/F(L) \neq \{1\}^{11}$. Применяя к L лемму 2.13, получаем $L = F(L) \cdot K$, где $K \leq L$. Так как $K \cong L/F(L)$ абелева группа, то K связна и, следовательно, чиста относительно любого нормального C -разбиения группы L . В силу 2.15 L -группа Фробениуса с ядром $F(L)$. Докажем, что $\Phi = F(G) \cdot F(L)$ -группа Фробениуса с ядром $F(G)$. Допустим, что $g \in \Phi \setminus F(G)$. Тогда $g^{[F(L)]} = g^{|\Phi/F(G)|} \in F(G)$. Так как $F(L) = C_G(H) \subseteq \hat{B}$, то $g \in A$ влечет $(|g|, |F(L)|) = 1$, следовательно, $g \in N$ — противоречие. Таким образом, $g \in B$. Тем самым доказано, что $\Phi \setminus F(G) \subseteq B$. Так как $F(G) \triangleleft G$, $F(G) \subseteq \hat{A}$, то элементы $\Phi \setminus F(G)$ действуют на $F(G)$ регулярно; поэтому Φ -группа Фробениуса с ядром $F(G)$. Так как $G/F(G) \cong L$ -группа Фробениуса, $\Phi/F(G) \cong F(L)$ и $F(L)$ — ядро L , то ядро $G/F(G)$ совпадает с $\Phi/F(G)$. Поэтому G — двойная группа Фробениуса, левый фробениусов множитель, которой совпадает с Φ , а правый — с L .

¹¹⁾ Из $L/F(L) = \{1\}$ вытекает нильпотентность, а поэтому и связность L .

2.17. Теорема 2 вытекает из 2.12—2.16 и 2.3¹²⁾. Если G — несвязная разрешимая группа, то $F(G) \neq \{1\}$. Ввиду несвязности, группа G не является нильпотентной. Поэтому $F(G) \neq G$. Так как $G/F(G)$ разрешима, то $F(G/F(G)) \neq \{1\}$.

Поэтому в силу теоремы 2 G либо разрешимая группа Фробениуса, либо двойная группа Фробениуса. Обратно, если это имеет место, то в силу 2.4, 2.10 и 2.11, G — несвязная разрешимая группа. Тем самым доказано сформулированное во введении следствие теоремы 2.

§ 3. Доказательство теоремы 3

3.1. Лемма. (Кронекер.) Если модули целого алгебраического числа α и всех чисел с ним сопряженных равны единице, то α — корень из единицы.

3.2. Для любой конечной группы G и ее неприводимого комплексного характера χ T_χ будет означать множество нулей характера χ ,

$$U_\chi = \{x \in G \mid \chi(x) \text{ — корень из } 1\}$$

— множество «унитарных элементов» характера χ , $f_\chi = \chi(1)$, $g_\chi = |G|/f_\chi$.

3.3. Начиная с этого момента и до п. 3.11 включительно характер χ группы G удовлетворяет условию (1) теоремы 3. В этом случае, как легко видеть,

$$(1) \quad |T_\chi| = f_\chi^2 - 1. \quad 13)$$

При помощи 3.1 легко показать, что

$$(2) \quad G^\# = T_\chi \cup U_\chi \quad 14)$$

3.4. Лемма. $\{T_\chi, U_\chi\}$ — нормальное C -разбиение группы G .

Доказательство. Так как $f_\chi > 1$, то $T_\chi \neq \emptyset$ [1]. Из $U_\chi = \emptyset$ следует в силу (1) $|G| = f_\chi^2$, откуда $f_\chi = 1$ — противоречие. Таким образом, $U_\chi \neq \emptyset$. Ввиду (2) и 3.2 некоторая степень $\vartheta = \chi^n$ характера χ принимает на T_χ и U_χ соответственно значения 0 и 1. Утверждение поэтому следует из 1.16.

3.5. Следствие. Группа G несвязна.

3.6. Следствие. Порядки нулей характера χ взаимно просты с порядками унитарных элементов.

3.7. Лемма. Если $H \trianglelefteq G$, то $H \subseteq T_\chi$ равносильно $|H| \mid f_\chi$.

Доказательство. Так как $f_\chi + \sum_{x \in U_\chi \cap H} \chi(x) = \sum_{x \in H} \chi(x) \equiv 0 \pmod{|H|}$, то $H \subseteq \hat{T}_\chi$ влечет $|H| \mid f_\chi$. Так как $f_\chi^2 + |U_\chi \cap H| = \sum_{x \in H} |\chi(x)|^2 \equiv 0 \pmod{|H|}$, то $|H| \mid f_\chi$ влечет $|U_\chi \cap H| \equiv 0 \pmod{|H|}$, откуда $U_\chi \cap H = \emptyset$ и, следовательно, $H \subseteq \hat{T}_\chi$.

¹²⁾ Другое доказательство теоремы 2 получено А. И. Вейцблитом.

¹³⁾ (1), как можно показать ([2]), равносильно условию (1) теоремы 3.

¹⁴⁾ (2), очевидно, в свою очередь, влечет условие (1) теоремы 3.

3.8. Лемма. $f_\chi = c(T_\chi)$, $g_\chi = c(U_\chi)$.

Доказательство. Ввиду 3.7 и 1.7 $c(T_\chi) | f_\chi$. Полагая $f_\chi = c(T_\chi)m$, в силу 3.4 и 1.9 будем иметь $(m, c(T_\chi)) = 1$. Допустим, что $m > 1$, $p \in \pi(m)$, $x \in G$, $|x| = p$. Так как $|\langle x \rangle| | f_\chi$, то ввиду 3.7 $\langle x \rangle \subseteq \hat{T}_\chi$ откуда, в силу 1.12, $p | c(T_\chi)$ — противоречие. Следовательно, $m = 1$, $f_\chi = c(T_\chi)$. Отсюда, в силу 1.9, $g_\chi = c(U_\chi)$.

3.9. Следствие. $\hat{T}_\chi = \{x \in G | x^{f_\chi} = 1\}$, $\hat{U}_\chi = \{x \in G | x^{g_\chi} = 1\}$.

3.10. Следствие. $(f_\chi, g_\chi) = 1$.

3.11. Следствие. Если $H \leq G$, то $H \subseteq \hat{U}_\chi$, равносильно $|H| | g_\chi$.

Доказательство. Вытекает из 3.8 и 1.12.

3.12. Лемма. Пусть Φ -группа Фробениуса с ядром Фробениуса N порядка n , Γ — транзитивное подстановочное представление n -й степени группы Φ . Тогда Γ точно и $\Gamma(\Phi)$ — подстановочная группа Фробениуса¹⁵).

3.13. Начиная с этого пункта группа G и характер χ удовлетворяют всем условиям (I)—(III) теоремы 3. Так как подгруппа H связна, то $H \subseteq \hat{D}$, где D — компонента связности группы G . Так как $|H| = f_\chi$, то в силу 3.7 $H \subseteq \hat{T}_\chi$, откуда (ввиду 3.4 и несвязности T_χ) $D \subset T_\chi$. Полагая $N = N_G(D)$, будем иметь $\hat{D} \subseteq N$. Если $\Omega = \{D_0, D_1, \dots, D_n\}$ — класс компонент связности сопряженных с $D = D_0$, то

$$(3) \quad n+1 = (G : N).$$

Так как T_χ нормально, то $D_i \subset T_\chi$ ($i=0, \dots, n$) и, следовательно, $\bigcup_{i=0}^n D_i \subseteq T_\chi$.

Докажем, что

$$(4) \quad \bigcup_{i=0}^n D_i = T_\chi.$$

Заметим, что $A = \bigcup_i D_i$ непусто, замкнуто и нормально. Полагая $B = T_\chi \setminus A$ получим в силу 1.9 и 3.8: $f_\chi = c(T_\chi) = c(A)c(B)$. Так как H связна и $H \subseteq \hat{T}_\chi$, то H содержится в одном из подмножеств $\hat{A}$, $\hat{B}$. Если, например, $H \subseteq \hat{A}$, то в силу $|H| = f_\chi$ и 1.7 будем иметь $f_\chi | c(A)$. Поэтому $c(B) = 1$, откуда $B = \emptyset$, $A = T_\chi$, что и доказывает (4). Из (4) и несвязности T_χ вытекает, что $n > 1$.

Докажем справедливость включения

$$(5) \quad N \setminus \hat{D} \subseteq U_\chi.$$

Если $\hat{D} = N$, (5) очевидно. Если $\hat{D} \neq N$, то применяя 1.16 к группе N и N -инвариантному замкнутому подмножеству $D \subset N^\#$, заключаем что порядки элементов $N \setminus \hat{D}$ взаимно просты с порядками элементов $\hat{D}$. Так как $\hat{D} \supseteq H$, $|H| = f_\chi$, то порядки элементов $N \setminus \hat{D}$ взаимно просты с f_χ и, следовательно, делят g_χ , откуда ввиду 3.9, вытекает (5). В силу (5) и 3.9

$$(6) \quad \hat{D} = \{x \in N | x^{f_\chi} = 1\}.$$

¹⁵) Т. е. $\Gamma(\Phi)$ строго транзитивна, но не регулярна.

Так как $f_x ||N|$, то ввиду 1.14 $|\hat{D}| \equiv 0 \pmod{f_x}$, откуда

$$(7) \quad |D| \equiv -1 \pmod{f_x}.$$

Учитывая вытекающие из (1) и (4) равенство $f_x^2 - 1 = \sum_{i=0}^n |D_i| = (n+1)|D|$, получаем из (7): $n \equiv 0 \pmod{f_x}$. Так как $n \geq 1$, то $n = kf_x$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$). Поскольку в силу (7) $|D| = lf_x - 1$ ($l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 1$), то $f_x^2 - 1 = (n+1)|D| = (kf_x + 1)(lf_x - 1) \equiv f_x^2 - 1$, откуда $k = l = 1$. Поэтому $|D| = n - 1$, $n = f_x$ и, следовательно, $|\hat{D}| = f_x = |H|$, откуда, ввиду $\hat{D} \supseteq H$,

$$(8) \quad \hat{D} = H.$$

Вместе с тем, $N = N_G(\hat{D}) = N_G(H)$, откуда, ввиду (3),

$$(9) \quad (G : N_G(H)) = n + 1.$$

Полагая $H_i = \hat{D}_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), получим класс сопряженных подгрупп $\{H_0 = H, H_1, \dots, H_n\}$. Так как подмножества D_i ($i = 0, 1, \dots, n$) попарно не пересекаются, то

$$(10) \quad H_i \cap H_j = \{1\}, \text{ если } i \neq j.$$

Рассмотрим две возможности.

Случай 1: $N = N_G(H) = H$ и, следовательно,

$$(11) \quad N_i = N_G(H_i) = H_i \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Будем рассматривать $\Omega = \{D_0, \dots, D_n\}$ как множество «точек», на котором группа G действует сопряжениями. Соответствующее представление Γ группы G подстановками множества Ω транзитивно; из (10) и (11) следует, что Γ точно и $\Gamma(G)$ — подстановочная группа Фробениуса степени $n+1 = f_x + 1$. Порядок ее ядра равен, как известно, $n+1$. Дополнительными множителями являются подгруппы $\Gamma(H_i) \cong H_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Так как $|\Gamma(H_i)| = |H_i| = f_x = n$, то $\Gamma(G)$ — дважды транзитивная группа Фробениуса. Следовательно, G — Z -группа.

Случай 2: $N = N_G(H) \supset H$. Так как $|H| = f_x = n$, $|G| = f_x \cdot g_x$, то $|N| = n \cdot m$, где $m = (N : H) > 1$, $m | g_x$. В силу (5) и (8) $N \setminus H \subseteq U_x$. Так как $H \subset \hat{T}_x$ и T_x замкнуто, то элементы $N \setminus H$ действуют на H регулярно. Поэтому N -группа Фробениуса с ядром H . Пусть Γ -введенное выше подстановочное представление группы G . Стабилизатор $St(D_i)$ «точки» D_i совпадает с $N_i = N_G(D_i) = N_G(H_i)$. Докажем, что группа N_i действует на $\Omega_i = \{D_0, \dots, D_{i-1}, D_{i+1}, \dots, D_n\}$ транзитивно. Заметим, что N_i -стабилизатор $St_{N_i}(D_j)$ «точки» D_j ($j \neq i$) совпадает с $L_{ij} = N_i \cap N_j$. Легко видеть, что $L_{ij} \cap H_i = \{1\}$. Действительно, $L_{ij} \cap H_i = (N_i \cap N_j) \cap H_i = (N_i \cap H_i) \cap N_j = H_i \cap N_j$. Если $x \in H_i \cap N_j$, то $x^{f_x} = 1$; так как, ввиду (6) и (8), $H_j = \hat{D}_j = \{x \in N_j | x^{f_x} = 1\}$, то $x^{f_x} = 1$, $x \in N_j$ влечет $x \in H_j$. Поэтому $x \in H_i \cap N_j$ влечет $x \in H_i \cap H_j$, откуда, ввиду (10), $x = 1$. Итак, $L_{ij} \cap H_i = \{1\}$ ($i \neq j$). Так как $L_{ij} \subseteq N_i$ и $H_i \triangleleft N_i$, отсюда вытекает, что $|L_{ij}| | (N_i : H_i)$, т. е. $|L_{ij}| | m$. Таким образом, $m' = |St_{N_i}(D_j)|$ делит m : $m = m' \cdot m''$ ($m'' \in \mathbb{Z}$, $m'' \equiv 1$). Поэтому длина N_i -орбиты «точки» D_j равна $(N_i : St_{N_i}(D_j)) =$

$= \frac{nm}{m'} = nm'' \cong n = |\Omega_i|$. Следовательно, N_i — орбита «точки» D_j ($j \neq i$) совпадает с Ω_i . Поэтому группа N_i действует на Ω_i транзитивно. Пусть Γ_i — соответствующее представление группы N_i подстановками множества Ω_i . Так как Γ_i транзитивно при любом $i=0, 1, \dots, n$, то Γ дважды транзитивно. Так как N_i -группа Фробениуса, порядок ядра H_i которой равен степени n представления Γ_i , то в силу 3.12 Γ_i точно и $\Gamma_i(N_i)$ — подстановочная группа Фробениуса. Поэтому Γ — точное строго дважды транзитивное представление группы G , откуда следует, что G — Z -группа степени $n+1$.

Обратное утверждение очевидно: если G — подстановочная Z -группа степени $n+1$ действующая на $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$, χ_s — ее естественный, подстановочный характер, то $\chi = \chi_s - 1$ — неприводимый над $\mathbb{C}$ характер, принимающий на $G^\#$ значения 0, 1, -1 . При этом, $f_\chi = \chi_s(1) - 1 = n$. Если $i \in \Omega$, то $St(i)$ -группа Фробениуса степени n ; ее ядро H_i имеет порядок $n = f_\chi$; ввиду нильпотентности H_i связна. Под множества H_i замкнуты и поэтому $T_\chi = \bigcup_{i=1}^n H_i^\#$ несвязно. Теорема 3 доказана.

3.14. Лемма.¹⁶⁾ Пусть G — несвязная группа четного порядка, $\{A, B\}$ — ее нормальное S -разбиение. Если $c(A)$ четно и неприводимый комплексный характер группы G принимает всюду на A значение $\alpha \neq f_\chi$, то (I) $\alpha \in \mathbb{Z}$; (II) $\chi = \bar{\chi}$ и индекс Шура $\text{ind}_R \chi$ характера χ над $\mathbb{R}$ равен 1; (III) множество $I(G)$ инволюций группы G является G — классом; (IV) если $x \in I(G)$, то $C_G(x)$ — холловская подгруппа порядка $c(A) = f_\chi - \alpha$.

Доказательство. Так как $I(G) \subset A$, то $\alpha = \chi(x)$ ($x \in I(G)$). Поэтому $\alpha \in \mathbb{Z}$. Для доказательства остальных утверждений воспользуемся формулой Фробениуса—Шура:

$$(12) \quad \sum_{x \in G} \chi(x^2) = \begin{cases} |G|, & \text{если } \chi = \bar{\chi} \text{ и } \text{ind}_R \chi = 1 \\ -|G|, & \text{если } \chi = \bar{\chi} \text{ и } \text{ind}_R \chi = 2 \\ 0, & \text{если } \chi \neq \bar{\chi}. \end{cases}$$

Обозначив левую часть (12) через σ и используя замкнутость A , получим $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, где $\sigma_1 = \sum_{x \in I(G)} \chi(x^2) = f_\chi + \alpha |I(G)|$, $\sigma_2 = \sum_{\alpha \in A \setminus I(G)} \chi(x^2) = \alpha |A| - \alpha |I(G)|$, $\sigma_3 = \sum_{x \in B} \chi(x^2)$. Так как элементы B имеют нечетные порядки и χ — неглавный характер, то, ввиду замкнутости B , $\sigma_3 = \sum_{x \in B} \chi(x) = - \sum_{x \in \hat{A}} \chi(x) = -f_\chi - \alpha |A|$. Следовательно, $\sigma = (f_\chi - \alpha) |I(G)|$. Так как $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq f_\chi$, то $\sigma > 0$ ¹⁷⁾. Следовательно, ввиду (12), $\sigma = |G|$, $\chi = \bar{\chi}$, $\text{ind}_R \chi = 1$. Таким образом

$$(13) \quad |G| = (f_\chi - \alpha) |I(G)|.$$

Пусть $x \in I(G)$. Тогда $x \in A$ и, следовательно, $C_G(x) \subseteq \hat{A}$. Если $H \subseteq G$, $H \subseteq \hat{A}$, то $\sum_{x \in H} \chi(x) = f_\chi + \alpha |H^\#|$, откуда $|H| |f_\chi - \alpha|$. В частности, $|C_G(x)| |f_\chi - \alpha|$. Полагая

¹⁶⁾ Частный случай ($\alpha=0$) сформулирован в [6].

¹⁷⁾ Так как $\alpha = \chi(x)$ ($x \in I(G)$), то $|\alpha| \leq \chi(1) = f_\chi$, откуда ввиду $\alpha \neq f_\chi$, имеем $\alpha < f_\chi$.

$f_x - \alpha = m|C_G(x)|$, ввиду (13), получим $|x^G| = (G : C_G(x)) = m|I(G)| \equiv |I(G)|$. С другой стороны, так как $x^G \subseteq I(G)$, то $|x^G| \leq |I(G)|$. Следовательно, $I(G) = x^G$.

Таким образом $|C_G(x)| = f_x - \alpha$ и $I(G)$ — G -класс. Далее, из $C_G(x) \subseteq \hat{A}$ следует, ввиду 1.12, $|C_G(x)| \mid c(A)$. Поэтому $f_x - \alpha \mid c(A)$. Так как $H \leq G$, $H \subseteq \hat{A}$ влечет $|H| \mid f_x - \alpha$, то в силу 1.7 $c(A) \mid f_x - \alpha$. Следовательно, $c(A) = f_x - \alpha$. Таким образом $|C_G(x)| = c(A) = f_x - \alpha$. Отсюда и из 1.9 следует, что $C_G(x)$ — холловская подгруппа.

3.15. Следствие. Если характер χ группы удовлетворяет условиям (I) и (III) теоремы 3 и f_x четно, то G является Z -группой.

Доказательство. Применяем лемму 1.14 к группе G , полагая $A = T_x$, $\alpha = 0$. В силу 3.14 подгруппа $H = C_G(x)$ ($x \in I(G)$) имеет порядок f_x . Так как H связна, то условие (II) теоремы 3 выполняется автоматически.

Литература

- [1] W. BURNSIDE, On an arithmetical theorem connected with roots of unity and its application to group characteristics, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **1** (1904), 112—116.
- [2] P. X. GALLAGHER, Group characters and commutators, *Math. Zeitschr.*, **79**, № 2 (1962), 122—126.
- [3] R. BRAUER and K. A. FAULER, On groups of even order, *Ann. of Math.* **62** (1955), 565—583.
- [4] G. FROBENIUS, Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie, II, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* (1907), 428—437.
- [5] J. S. WILLIAMS, A sufficient condition on centralizers for a Finite Group to contain a proper CCT-subgroup, *J. Algebra*, **42** (1976), 549—556.
- [6] А. И. Вейцблит—Э. М. Жмудь, «Связность конечной группы и группы Цассенхауза». *Сообщения АН Грузинской ССР*, том. **90**, № 2 (1978).
- [7] Ж. П. Серр, Линейные представления конечных групп, «МИР», Москва, 1970.