

Доверительное множество для коэффициента простейшего авторегрессионного поля

ДЬ. ТЕРДИК (Дебрецен)

1. Постановка задачи. Одной из первоочередных задач при статистическом анализе модели стохастического разностного уравнения является построение доверительного множества для коэффициентов уравнения. Рассматриваются две модели,

$$\text{I} \quad x_{k,l} = ax_{k-1,l} + \varepsilon_{k,l}$$

$$\text{II} \quad x_{k,l} = ax_{k-1,l-1} + \varepsilon_{k,l}$$

где случайные величины $x_{k,l}$ ($k, l \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$) имеют моменты второго порядка, $\varepsilon_{k,l}$ независимы и гауссовские случайные величины, $E\varepsilon_{k,l} = m_\varepsilon$, $D^2\varepsilon_{k,l} = \sigma_\varepsilon^2$, и a вещественное число из отрезка $(-1; 1)$. Строится доверительное множество для коэффициента a по наблюдениям на прямоугольнике $[(0, 0); (K, L)] = \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 | 0 \leq k \leq K, 0 \leq l \leq L\}$ ряда $x_{0,0}; x_{0,1}; x_{0,2}; \dots x_{0,L}; x_{1,0} \dots x_{K,L}$. Будем различать 4 случая: 1) значения $E x_{k,l} = m$ и $D^2 x_{k,l} = \sigma^2$ известны, 2) m неизвестно, σ^2 известно, 3) m известно, σ^2 неизвестно, 4) m и σ^2 неизвестны. Используется метод Линника [1], для построения доверительного множества в случае простейшего стационарного ряда.

2. Структура ковариации. Легко видеть, что поле $x_{k,l}$ ($(k, l) \in \mathbb{Z}^2$) можно представить в форме скальзящего среднего

$$\text{I} \quad x_{k,l} = \sum_{r=0}^{\infty} a^r \varepsilon_{k-r,l}$$

$$\text{II} \quad x_{k,l} = \sum_{r=0}^{\infty} a^r \varepsilon_{k-r,l-r}$$

(ходимость понимается в среднеквадратическом смысле). Ясно, что $x_{k,l}$ ($(k, l) \in \mathbb{Z}^2$) гауссовские случайные величины $E x_{k,l} = m = \frac{m_\varepsilon}{1-a}$ и $D^2 x_{k,l} = \sigma^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-a^2}$. Поле $x_{k,l}$ является однородным, т. е. $\text{cov}(x_{i,j}, x_{k,l}) = C(i-k, j-l)$ для каждого $(i, j), (k, l) \in \mathbb{Z}^2$, так что

$$\text{I} \quad C(s, 0) = a^s \sigma^2 \quad \text{и} \quad C(s, t) = 0 \quad \text{если} \quad t \neq 0$$

$$\text{II} \quad C(s, s) = a^s \sigma^2 \quad \text{и} \quad C(s, t) = 0 \quad \text{если} \quad s \neq t.$$

Таким образом, матрица корреляции $\mathbf{H}$ для гауссовского вектора $\underline{x}_{K,L} = (x_{0,0}; x_{0,1}; \dots x_{0,L}; x_{1,0}; \dots x_{K,L-1}; x_{K,L})$ имеет вид $\mathbf{H} = (h_{i,j})$, где $h_{i,j} = h_{j,i}$ и если $i \leq j$

$$\text{I } h_{i,j} = a^s \text{ при } (i,j) = (i; i+s(L+1)), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{(K+1)(L+1)-i}{L+1} \right].$$

$$h_{i,j} = 0 \text{ в противном случае}$$

$$\text{II } h_{i,j} = a^s \text{ при } (i,j) = (k(L+1)+l, k(L+1)+l+s(L+2))$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, K; l = 1, 2, \dots, L+1; s \geq 0 \text{ и } (k+s, l-1+s) \leq (K, L)$$

$$h_{i,j} = 0 \text{ в противном случае.}$$

Через $\mathbf{H}^{-1} = (1-a^2)^{-1} \mathbf{G} = (1-a^2)^{-1} (g_{i,j})$ обозначим обратную матрицу корреляции, где

$$\text{I } g_{i,i} = 1 \text{ если } 1 \leq i \leq L+1 \text{ или } K(L+1) < i \leq (K+1)(L+1) \\ = 1+a^2 \text{ в противном случае}$$

$$g_{i,j} = -a \text{ если } j = i \pm (L+1) \\ = 0 \text{ в противном случае } (i \neq j)$$

$$\text{II } g_{i,i} = 1-a^2 \text{ если } i = L+1 \text{ или } i = K(L+1)+1 \\ = 1+a^2 \text{ если } i = k(L+1)+l \text{ и } (k+1, l) \leq (K, L) \text{ и } (k-1, l-2) \leq (0, 0) \\ = 1 \text{ в противном случае}$$

$$g_{i,j} = -a \text{ если } j = i \pm (L+2) \text{ и } i \neq L+1 \text{ и } i \neq K(L+1)+1 \\ = 0 \text{ в противном случае.}$$

Полагая $y_{k,l} = (x_{k,l} - m)/\sigma$ видим, что плотность вероятности для вектора $\underline{x}_{K,L}$ можно записать в виде

$$f(\underline{x}_{K,L}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(K+1)(L+1)}{2}} \sigma^{(K+1)(L+1)} D_{K,L}(a)} e^{-1/2 Q(\underline{y}_{K,L})}$$

где $D_{K,L}(a)$ зависит лишь от (K, L) и a и

$$\text{I } Q(\underline{y}_{K,L}) = \frac{1}{1-a^2} \left(\sum_{(0,0)}^{(K,L)} y_{k,l}^2 + a^2 \sum_{(1,0)}^{(K-1,L)} y_{k,l}^2 - 2a \sum_{(0,0)}^{(K-1,L)} y_{k,l} y_{k+1,l} \right)$$

$$\text{II } Q(\underline{y}_{K,L}) = \frac{1}{1-a^2} \left(\sum_{(0,0)}^{(K,L)} y_{k,l}^2 - a^2 (y_{0,L}^2 + y_{K,0}^2) + \right. \\ \left. + a^2 \sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)} y_{k,l}^2 - 2a \sum_{(1,1)}^{(K,L)} y_{k,l} y_{k-1,l-1} \right).$$

3. Значения m и σ^2 известны. Не нарушая общности положим $m=0$ и $\sigma^2=1$, так что $y_{k,l} = x_{k,l}$. Вычисляя характеристическую функцию для квадратичной формы $1/2 Q(\underline{x}_{K,L})$, находим

$$\mathbf{E} e^{it/2 Q(\underline{x}_{K,L})} = \frac{1}{(1-it)^{(K+1)(L+1)}}.$$

Следовательно, $1/2Q(\underline{x}_{K,L})$ имеет распределение типа χ^2 с $(K+1)(L+1)$ степенями свободы. При $\beta \cong \alpha \cong 0$ мы имеем

$$P\left\{\alpha \cong \frac{1}{1-a^2}(S_1 + a^2 S_2 - 2aR) \cong \beta\right\} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(K+1)(L+1)}{2}\right)} \int_{\alpha/2}^{\beta/2} x^{\frac{(K+1)(L+1)}{2}-1} e^{-x} dx = \\ = \varphi(\alpha, \beta),$$

где через S_1 , S_2 и R обозначены следующие статистики:

$$\text{I} \quad S_1 = \sum_{(0,0)}^{(K,L)} x_{k,l}^2; \quad S_2 = \sum_{(1,0)}^{(K-1,L)} x_{k,l}^2; \quad R = \sum_{(0,0)}^{(K-1,L)} x_{k,l} x_{k+1,l}.$$

$$\text{II} \quad S_1 = \sum_{(0,0)}^{(K,L)} x_{k,l}^2; \quad S_2 = \sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)} x_{k,l}^2 - (x_{0,L}^2 + x_{K,0}^2)$$

$$R = \sum_{(1,1)}^{(K,L)} x_{k,l} x_{k-1,l-1}.$$

$\varphi(\alpha, \beta)$ есть вероятность совмещения двух неравенств:

$$\left. \begin{aligned} a^2(S_2 + \beta) - 2aR + S_1 - \beta &\cong 0 \\ a^2(S_2 + \alpha) - 2aR + S_1 - \alpha &\cong 0 \end{aligned} \right\}$$

Совмещение этих неравенств отвечает местонахождению в некотором множестве $\mathfrak{M}_{\alpha,\beta}$ на реальной оси, которое и будет доверительным множеством для a .

4. m неизвестно, σ^2 известно. Введем вместо $x_{k,l}$, $(k, l) \in [(0, 0); (K, L)]$ новые переменные по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{(K+1)(L+1)} \sum_{(0,0)}^{(K,L)} x_{k,l}$$

$$z_{0,0} = \bar{x}; \quad z_{k,l} = x_{k,l} - \bar{x}, \quad (k, l) \neq (0, 0),$$

$$x_{0,0} = \sum_{(k,l) > (0,0)} z_{k,l}, \quad x_{k,l} = z_{k,l} + z_{0,0}, \quad (k, l) \neq (0, 0).$$

Можно считать, что $\sigma^2 = 1$ и тогда закон распределение для вектора $\underline{z}_{K,L} = (z_{0,0}; z_{0,1}; \dots z_{0,L}; z_{1,0}; \dots z_{K,L})$ имеет вид

$$f(\underline{z}_{K,L}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(K+1)(L+1)}{2}} D_{K,L}(a)} e^{-1/2 Q_1(\underline{z}_{K,L})}$$

где

$$Q_1(z_{K,L}) = Q(z_{0,0} - m - \sum_{(k,l) > (0,0)} z_{k,l}; z_{00} - m + z_{01}; \dots; z_{00} - m + z_{K,L}).$$

Нас будет интересовать плотность вероятности вектора

$$(z_{0,1}; z_{0,2}; \dots; z_{0,L}; z_{1,0}; \dots; z_{K,L}),$$

которая равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z_{K,L}) d\zeta, \quad (\zeta = z_{00} - m).$$

мы имеем

$$Q(z_{00} - m - \sum_{(k,l) > (0,0)} z_{k,l}; z_{00} - m + z_{01}; \dots; z_{00} - m + z_{K,L}) =$$

$$= (1 - a^2)^{-1} (A_{K,L}(a) \zeta^2 + B_{K,L}(a, z) \zeta + Q_2(z)),$$

где

$$I \quad A_{K,L}(a) = a^2(K-1)(L+1) - 2aK(L+1) + (K+1)(L+1),$$

$$B_{K,L}(a, z) = -2a(1-a) \sum_{(1,0)}^{(K-1,L)} z_{k,l}$$

$$Q_2(z) = (1 - a^2) Q(-\sum_{(k,l) > (0,0)} z_{k,l}; z_{0,1}; z_{0,2}; \dots; z_{K,L}).$$

II

$$A_{K,L}(a) = a^2[(K-1)(L-1) - 2] - 2aKL + (K+1)(L+1),$$

$$B_{K,L}(a, z) = -2a^2(z_{0,L} + z_{K,0}) - 2a(1-a) \sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)} z_{k,l},$$

$$Q_2(z) = (1 - a^2) Q\left(-\sum_{(k,l) > (0,0)}^{(K,L)} z_{k,l}; z_{0,1}; z_{0,2}; \dots; z_{K,L}\right).$$

Отсюда получим

$$f(z_{0,1}; z_{0,2}; \dots; z_{0,L}; z_{1,0}; \dots; z_{K,L}) = C_{K,L}(a) e^{-1/2 \left(\frac{1}{1-a^2} Q_3(z) \right)},$$

где

$$Q_3(z) = Q_3(z_{0,1}; z_{0,2}; \dots; z_{K,L}) = Q_2(z) - \frac{B_{K,L}^2(a, z)}{4A_{K,L}(a)},$$

и $C_{K,L}(a)$ зависит лишь от a и (K, L) . Полагая $Q_4(z) = (1 - a^2)^{-1} Q_3(z)$ видим, что $1/2 Q_4(z)$ имеет распределение типа χ^2 с $(K+1)(L+1) - 1$ степенями свободы. При $\beta \equiv \alpha \equiv 0$ вероятность совмещения неравенств может быть выражена в виде

$$P(\alpha \equiv Q_4(z) \equiv \beta) = \varphi_1(\alpha, \beta).$$

Введем статистики

$$\begin{aligned} \text{I} \quad S_1 &= \left(\sum_{(k,l) > (0,0)}^{(K,L)} z_{k,l} \right)^2 + \sum_{(k,l) > (0,0)}^{(K,L)} z_{k,l}^2 = \sum_{(0,0)}^{(K,L)} (x_{k,l} - \bar{x})^2, \\ S_2 &= \sum_{(1,0)}^{(K-1,L)} z_{k,l}^2 = \sum_{(1,0)}^{(K-1,L)} (x_{k,l} - \bar{x})^2, \\ R &= \sum_{(k,l) > (0,0)}^{(K-1,L)} z_{k,l} z_{k+1,l} - z_{1,0} \sum_{(k,l) > (0,0)}^{(K,L)} z_{k,l} = \sum_{(1,0)}^{(K,L)} (x_{k,l} - \bar{x})(x_{k-1,l} - \bar{x}), \\ B &= - \sum_{(1,0)}^{(K-1,L)} z_{k,l} = \sum_{l=0}^L (x_{0,l} - \bar{x}) + \sum_{l=0}^L (x_{K,l} - \bar{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad S_1 &= \left(\sum_{(k,l) > (0,0)}^{(K,L)} z_{k,l} \right)^2 + \sum_{(k,l) > (0,0)}^{(K,L)} z_{k,l}^2 = \sum_{(0,0)}^{(K,L)} (x_{k,l} - \bar{x})^2, \\ S_2 &= \sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)} z_{k,l}^2 - (z_{0,L}^2 + z_{K,0}^2) = \sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)} (x_{k,l} - \bar{x})^2 - (x_{0,L} - \bar{x})^2 - (x_{K,0} - \bar{x})^2, \\ R &= \sum_{(1,1) < (k,l)} z_{k,l} z_{k-1,l-1} - z_{1,1} \sum_{(k,l) > (0,0)} z_{k,l} = \sum_{(1,1)}^{(K,L)} (x_{k,l} - \bar{x})(x_{k-1,l-1} - \bar{x}), \\ B_1 &= z_{0,L} + z_{K,0} = x_{0,L} + x_{K,0} - 2\bar{x}, \\ B_2 &= - \sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)} z_{k,l} = \sum_{l=0}^L (x_{0,l} - \bar{x}) + \sum_{l=0}^L (x_{K,l} - \bar{x}) + \sum_{k=1}^{K-1} (x_{k,0} - \bar{x}) + \sum_{k=1}^{K-1} (x_{k,L} - \bar{x}). \end{aligned}$$

В терминах этих статистик

$$\begin{aligned} \text{I} \quad Q_4(z) &= \frac{1}{1-a^2} \left\{ S_1 + a^2 S_2 - 2aR - \frac{a^2(1-a)^2 B^2}{A_{K,L}(a)} \right\}, \\ \text{II} \quad Q_4(z) &= \frac{1}{1-a^2} \left\{ S_1 + a^2 S_2 - 2aR - \frac{(2a(1-a)B_2 - 2a^2 B_1)^2}{4A_{K,L}(a)} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом с вероятностью $\varphi_1(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \left. \begin{aligned} a^2(S_2 + \beta) - 2aR + (S_1 - \beta) - \frac{a^2(1-a)^2 B^2}{A_{K,L}(a)} &\equiv 0 \\ a^2(S_2 + \alpha) - 2aR + (S_1 - \alpha) - \frac{a^2(1-a)^2 B^2}{A_{K,L}(a)} &\equiv 0 \end{aligned} \right\}, \\ \text{II} \quad & \left. \begin{aligned} a^2(S_2 + \beta) - 2aR + (S_1 - \beta) - \frac{(2a(1-a)B_2 - 2a^2 B_1)^2}{4A_{K,L}} &\equiv 0 \\ a^2(S_2 + \alpha) - 2aR + (S_1 - \alpha) - \frac{(2a(1-a)B_2 - 2a^2 B_1)^2}{4A_{K,L}} &\equiv 0 \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Совмещение этих неравенств определяет доверительное множество для неизвестного параметра a .

5. *т* известно, σ^2 неизвестно. Положим $\mu = [K/3]$, и определим v как наибольшее целое число, для которого $\mu + 2v \leq K$. Составим две квадратичной формы

$$I \quad u(\underline{x}) = \sum_{(1,0)}^{(\mu,L)} (x_{k,l} - ax_{k-1,l})^2 = \sum_{(1,0)}^{(\mu,L)} x_{k,l}^2 + a^2 \sum_{(1,0)}^{(\mu,L)} x_{k-1,l}^2 - 2a \sum_{(1,0)}^{(\mu,L)} x_{k-1,l} x_{k,l},$$

$$W(\underline{x}) = \sum_{(1,0)}^{(v,L)} (x_{\mu+2k,l} - a^2 x_{\mu+2(k-1),l})^2 =$$

$$= \sum_{(1,0)}^{(v,L)} x_{\mu+2k,l}^2 + a^4 \sum_{(1,0)}^{(v,L)} x_{\mu+2(k-1),l}^2 - 2a^2 \sum_{(1,0)}^{(v,L)} x_{\mu+2k,l} x_{\mu+2(k-1),l},$$

$$II \quad u(\underline{x}) = \sum_{(1,1)}^{(\mu,L)} (x_{k,l} - ax_{k-1,l-1})^2 = \sum_{(1,1)}^{(\mu,L)} x_{k,l}^2 + a^2 \sum_{(1,1)}^{(\mu,L)} x_{k-1,l-1}^2 - 2a \sum_{(1,1)}^{(\mu,L)} x_{k,l} x_{k-1,l-1},$$

$$W(\underline{x}) = \sum_{(1,2)}^{(v,L)} (x_{\mu+2k,l} - a^2 x_{\mu+2(k-1),l-2})^2 =$$

$$= \sum_{(1,2)}^{(v,L)} x_{\mu+2k,l}^2 + a^4 \sum_{(1,2)}^{(v,L)} x_{\mu+2(k-1),l-2}^2 - 2a^2 \sum_{(1,2)}^{(v,L)} x_{\mu+2k,l} x_{\mu+2(k-1),l-2}.$$

Величины $x_{k,l} - ax_{k-1,l}$ или $x_{k,l} - ax_{k-1,l-1}$ в совокупности нормальны и независимы, точно также как и величины $x_{k,l} - a^2 x_{k-2,l}$ или $x_{k,l} - a^2 x_{k-2,l-2}$. Средние значения этих величин суть 0, а их дисперсии $(1-a^2)/\sigma^2$ и $(1-a^4)/\sigma^2$. Отсюда следует, что

$$T = \frac{U(\underline{x}) \frac{\sigma^2}{1-a^2}}{W(\underline{x}) \frac{\sigma^2}{1-a^4}} = \frac{U(\underline{x})}{W(\underline{x})} (1+a^2)$$

имеет плотность распределения F (Фишера) т. е.

$$\psi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{vL+\mu L}{2}\right) x^{\frac{\mu L-1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{\mu L}{2}\right) x^{\frac{\mu L+vL-1}{2}-1}}, \quad x > 0.$$

При $\beta \equiv \alpha > 0$ вероятность того что T удовлетворяет неравенству $\alpha \leq T < \beta$

может быть определена. Введем статистики

$$\begin{aligned} \text{I} \quad S_1 &= \sum_{(1,0)}^{(\mu,L)} x_{k,l}^2; \quad S_2 = \sum_{(1,0)}^{(\mu,L)} x_{k-1,l}^2; \quad R = \sum_{(1,0)}^{(\mu,L)} x_{k,l} x_{k-1,l}; \\ S'_1 &= \sum_{(1,0)}^{(\nu,L)} x_{\mu+2k,l}^2; \quad S'_2 = \sum_{(1,0)}^{(\nu,L)} x_{\mu+2(k-1),l}^2; \quad R' = \sum_{(1,0)}^{(\nu,L)} x_{\mu+2k,l} x_{\mu+2(k-1),l}; \\ \text{II} \quad S_1 &= \sum_{(1,1)}^{(\mu,L)} x_{k,l}^2; \quad S_2 = \sum_{(1,1)}^{(\mu,L)} x_{k-1,l-1}^2; \quad R = \sum_{(1,1)}^{(\mu,L)} x_{k,l} x_{k-1,l-1}; \\ S'_1 &= \sum_{(1,2)}^{(\nu,L)} x_{\mu+2k,l}^2; \quad S'_2 = \sum_{(1,2)}^{(\nu,L)} x_{\mu+2(k-1),l-2}^2; \quad R' = \sum_{(1,2)}^{(\nu,L)} x_{\mu+2k,l} x_{\mu+2(k-1),l-2}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к неравенству для T , перепишем его в виде

$$\alpha \equiv (1+a^2) \frac{S_1 + a^2 S_2 - 2aR}{S_1 + a^2 S'_2 - 2aR'} < \beta.$$

Теперь вероятность совмещения неравенств

$$\left. \begin{aligned} (1+a^2)(S_1 + a^2 S_2 - 2aR) - \alpha(S'_1 + a^2 S_1 - 2aR') &\geq 0 \\ (1+a^2)(S_1 + a^2 S_2 - 2aR) - \beta(S'_1 + a^2 S_1 - 2aR') &\leq 0 \end{aligned} \right\}$$

зависит только от α, β и (K, L) и определяет доверительное множество для a .

6. Значения m и σ^2 неизвестно. Пусть $\mu' = \left\lfloor \frac{\mu}{2} \right\rfloor$, $\nu' = \lfloor \nu/2 \rfloor$, где μ и ν вышеопределены. Положим

$$\begin{aligned} \text{I} \quad z_{k,l} &= x_{k,l} - ax_{k-1,l}, \quad (k,l) \in [(1,0); (\mu,L)], \\ y_{k,l} &= x_{\mu+2k,l} - a^2 x_{\mu+2(k-1),l}, \quad (k,l) \in [(1,0); (\nu,L)], \\ \text{II} \quad z_{k,l} &= x_{k,l} - ax_{k-1,l-1}, \quad (k,l) \in [(1,1); (\mu,L)], \\ y_{k,l} &= -a^2 x_{\mu+2(k-1),l-2} + x_{\mu+2k,l}, \quad (k,l) \in [(1,2); (\nu,L)]. \end{aligned}$$

Эти величины независимы и нормальны. При помощи этих величин определим

$$\begin{aligned} \text{I} \quad u_{k,l} &= z_{2k,l} - z_{2k-1,l}, \quad (k,l) \in [(1,0); (\mu',L)], \\ w_{k,l} &= y_{2k,l} - y_{2k-1,l}, \quad (k,l) \in [(1,0); (\nu',L)], \\ \text{II} \quad u_{k,l} &= z_{2k,l} - z_{2k-1,l}, \quad (k,l) \in [(1,1); (\mu',L)], \\ w_{k,l} &= y_{2k,l} - y_{2k-1,l}, \quad (k,l) \in [(1,2); (\nu',L)]. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что $Eu_{k,l} = Ew_{k,l} = 0$,

$$D^2 u_{k,l} = \frac{2(1-a^2)}{\sigma^2}, \quad D^2 w_{k,l} = \frac{2(1-a^4)}{\sigma^2}.$$

Введем квадратичные формы

$$U = \frac{\sigma^2}{2(1-a^2)} \sum_{(k,l)} u_{k,l}^2, \quad W = \sum_{(k,l)} \frac{\sigma^4}{2(1-a^4)} w_{k,l}^2.$$

Из предыдущего явствует, что они независимы и распределены по χ^2

$$\text{I} \quad \mu'(L+1), \quad \nu'(L+1)$$

$$\text{II} \quad \mu' L, \quad \nu'(L-1) \text{ степенями свободы}$$

Отсюда u/w имеет распределение F, и при $\beta > \alpha > 0$ вероятность

$$P(\alpha \leq u/w < \beta) = z(\alpha, \beta)$$

может быть определена. Далее, мы имеем

$$U = \frac{\sigma^2}{2(1-a^2)} (S_1 + a^2 S_2 - 2aR),$$

$$W = \frac{\sigma^2}{2(1-a^4)} (S'_1 + a^4 S'_2 - 2a^2 R'),$$

где

$$\text{I} \quad S_1 = \sum_{(1,0)}^{(\mu',L)} (x_{2k,l} - x_{2k-1,l})^2; \quad S_2 = \sum_{(1,0)}^{(\mu',L)} (x_{2k-1,l} - x_{2k-2,l})^2;$$

$$R = \sum_{(1,0)}^{(\mu',L)} (x_{2k,l} - x_{2k-1,l})(x_{2k-1,l} - x_{2k-2,l});$$

$$S'_1 = \sum_{(1,0)}^{(\nu',L)} (x_{\mu+4k,l} - x_{\mu+4k-2,l})^2; \quad S'_2 = \sum_{(1,0)}^{(\nu',L)} (x_{\mu+4k-2,l} - x_{\mu+4k-4,l})^2;$$

$$R' = \sum_{(1,0)}^{(\nu',L)} (x_{\mu+4k,l} - x_{\mu+4k-2,l})(x_{\mu+4k-2,l} - x_{\mu+4k-4,l}).$$

$$\text{II} \quad S_1 = \sum_{(1,1)}^{(\mu',L)} (x_{2k,l} - x_{2k-1,l})^2; \quad S_2 = \sum_{(1,1)}^{(\mu',L)} (x_{2k-1,l-1} - x_{2k-2,l-1})^2;$$

$$R = \sum_{(1,1)}^{(\mu',L)} (x_{2k,l} - x_{2k-1,l})(x_{2k-1,l-1} - x_{2k-2,l-1}),$$

$$S'_1 = \sum_{(1,2)}^{(\nu',L)} (x_{\mu+4k,l} - x_{\mu+4k-2,l-2})^2; \quad S'_2 = \sum_{(1,2)}^{(\nu',L)} (x_{\mu+4k-2,l} - x_{\mu+4k-4,l-2})^2;$$

$$R' = \sum_{(1,2)}^{(\nu',L)} (x_{\mu+4k,l} - x_{\mu+4k-2,l-2})(x_{\mu+4k-2,l} - x_{\mu+4k-4,l-2}).$$

Отсюда следует, что вероятность совмещения неравенств

$$\alpha \leq \frac{(1+a^2)(S_1 + a^2 S_2 - 2aR)}{S'_1 + a^4 S'_2 - 2a^2 R'} \leq \beta$$

совпадает $z(\alpha, \beta)$. Эти неравенства дают доверительное множество для a .

7. Замечание. По наблюдению

$$x_{0,0}; x_{0,1}; x_{0,2}; \dots x_{0,L}; \dots x_{K,L}$$

доверительные множества находятся решая системы состоящей из двух алгебраических неравенств.

Может быть доказано см. [1], что эти доверительные множества определяют значение a в смысле сходимости по вероятности, если по крайней мере K или L стремятся к бесконечности. В случае больших выборок мы можем оценить коэффициенты авторегрессионного поля, см [3], и по асимптотическим свойствам оценок построить доверительные множества для них.

Литература

- [1] Ю. В. Линник, Об одном вопросе статистики зависимых наблюдений, *Изв. А. Н. СССР сер. мат.* **14** (1950), 501—522.
- [2] Т. Андерсон, Статистический анализ временных рядов. Москва, 1976.
- [3] Д. Тердик, Представление авторегрессионного поля в форме скальзящего среднего (на венгерском языке). *Прикладная Математика А. Н. ВНР* **3** (1977), 379—388.

(Поступила: 21. XII. 1978)