

Об одном свойстве полей групповых характеров

Э. М. ЖМУДЬ (Харьков)

Пусть G — конечная группа, χ — ее неприводимый комплексный характер, $\mathbf{Q}_A(\chi)$ — расширение поля $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, получающиеся посредством присоединения к $\mathbf{Q}$ всех значений характера χ на непустом подмножестве $A \subseteq G$; $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}_G(\chi)$ — абсолютное поле характера χ .

В работе доказывается следующее утверждение:

Теорема 1. Если $G = A_1 \cup A_2$, где $A_i \neq \emptyset$ ($i=1, 2$), то по крайней мере одно из полей $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi)$ ($i=1, 2$) совпадает с $\mathbf{Q}(\chi)$.

Введем дополнительно следующие обозначения: $|G|$ — порядок группы G ; $G^* = G \setminus \{1\}$; $|g|$ — порядок элемента $g \in G$; если $x, y \in G$, то $x \sim y$ означает, что элементы x и y сопряжены; $Z(H)$ — центр группы H ; $x^g = g^{-1}xg$ ($x, g \in G$); $\text{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G ; $X(G)$ — кольцо обобщенных характеров группы G ; $\mathbf{Q}_m = \mathbf{Q}(\varepsilon)$, где ε — комплексный первообразный корень m -й степени из единицы; $\mathbf{K} = \mathbf{Q}_{|G|}$; $\text{Gal}(A/\mathbf{K})$ — группа Галуа нормального расширения A поля $\mathbf{K}$; $\Gamma = \text{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{Q})$, $\Gamma^{(x)} = \text{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{Q}(\chi))$, $\Gamma_i^{(x)} = \text{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{Q}_{A_i}(\chi))$ ($i=1, 2$); (m, n) — наибольший общий делитель натуральных чисел m и n ; $\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел.

Как известно, $X(G)$ можно рассматривать как $\mathbf{Z}\Gamma$ -модуль: поскольку $\theta(g) \in \mathbf{K}$ для любых $\theta \in X(G)$ и $g \in G$, то $\xi\theta$ ($\xi \in \mathbf{Z}\Gamma$) можно определить, полагая $(\xi\theta)(g) = \xi(\theta(g))$, где ξ рассматривается как линейный оператор, действующий на $\mathbf{Q}$ -пространстве $\mathbf{K}^*$.

Изложенное ниже доказательство теоремы 1 использует метод, примененный Р. Брауэром [3, 4, 5] для доказательства теорем Блехфельдта—Бернсайда [1, 2] о значениях групповых характеров. Приступая к доказательству теоремы 1, допустим, что $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi) \neq \mathbf{Q}(\chi)$ ($i=1, 2$). Тогда $\Gamma_i^{(x)} \supset \Gamma^{(x)}$ ($i=1, 2$) (включения строгие). Выбрав автоморфизмы σ_i ($i=1, 2$) поля $\mathbf{K}$ так, чтобы имело место $\sigma_i \in \Gamma_i^{(x)} \setminus \Gamma^{(x)}$ ($i=1, 2$), будем иметь

$$(1) \quad [(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1)]\chi = 0,$$

где $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1)$ понимается как элемент кольца $\mathbf{Z}\Gamma$, а характер χ — как элемент $\mathbf{Z}\Gamma$ -модуля $X(G)$. Действительно, так как группа Γ абелева, то $(b_1 - 1)(\sigma_2 - 1) = (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1)$. Если $g \in A_1$, то $\chi(g) \in \mathbf{Q}_{A_1}(\chi)$; следовательно

*) Можно также рассматривать $\xi(\theta(g))$ как произведение элемента $\xi \in \mathbf{Z}\Gamma$ на элемент $\theta(g)$ модуля Галуа $\mathbf{K}$.

$(\sigma_1\chi)(g) = \sigma_1\{\chi(g)\} = \chi(g)$, откуда $\{[(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)]\chi\}(g) = (\sigma_2-1)\{(\sigma_1-1)\chi(g)\} = (\sigma_2-1)(0) = 0$. Если $g \in A_2$, то $\chi(g) \in \mathbf{Q}_{A_2}(\chi)$; поэтому $(\sigma_2\chi)(g) = \sigma_2\{\chi(g)\} = \chi(g)$ и $\{[(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)]\chi\}(g) = (\sigma_1-1)\{(\sigma_2-1)\chi(g)\} = (\sigma_1-1)(0) = 0$. Таким образом, функция $\{[(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)]\chi\}$ всюду на G обращается в нуль и, тем самым, (1) доказано. Переписав (1) в виде $\chi + (\sigma_1\sigma_2)\chi = \sigma_1\chi + \sigma_2\chi$ и пользуясь тем, что $\chi, (\sigma_1\sigma_2)\chi, \sigma_1\chi, \sigma_2\chi \in \text{Irr}(G)$, получим: $\chi = \sigma_1\chi$, либо $\chi = \sigma_2\chi$. В первом случае $\sigma_1 \in \Gamma^{(\chi)}$, во втором $-\sigma_2 \in \Gamma^{(\chi)}$, что противоречит выбору автоморфизмов σ_1 и σ_2 . Таким образом, по крайней мере одно из полей $\mathbf{Q}_{A_1}(\chi), \mathbf{Q}_{A_2}(\chi)$ совпадает с $\mathbf{Q}(\chi)$ — теорема доказана.

Из теоремы 1, как будет показано ниже, легко выводятся упомянутые выше теоремы Блехфельдта—Бернсайда. Приводим эти теоремы в несколько упрощенных формулировках:

Теорема 2. Пусть p_1 и p_2 — различные простые делители числа $|G|$, v_1 и v_2 — натуральные числа. Если группа G содержит такие элементы g_i ($i=1, 2$), что $\chi(g_i) \in \mathbf{Q}_{p_i^{v_i}} \setminus \mathbf{Q}_{p_i^{v_i-1}}$ ($i=1, 2$), то G содержит элемент порядка $p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2}$.

Теорема 3. Пусть π — множество всех простых делителей числа $|G|$, $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, где $\pi_i \neq \emptyset$ ($i=1, 2$). Если A_i — множество всех π_i -элементов A'_i — множество всех π'_i -элементов группы G ($i=1, 2$), то характер χ рационален по крайней мере на одном из подмножеств A'_1, A'_2 .

Доказательство теоремы 2. Допустим, что группа G не содержит элементов порядка $p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2}$. Полагая $|G| = p_1^{v_1} u_1$, где u_1 — целое не делящееся на p_1 , покажем что $G = A_1 \cup A_2$, где $A_i = \{g \in G \mid g^{p_i^{v_i-1} u_i} = 1\}$ ($i=1, 2$). Действительно, пусть $g \in G$ и $p_i^{v_i} \nmid p_i$ -часть $|g|$ ($i=1, 2$). Если $\lambda_i \equiv v_i$ ($i=1, 2$), то $p_1^{v_1} p_2^{v_2} \mid |g|$, откуда вытекает существование элемента порядка $p_1^{v_1} p_2^{v_2}$. Таким образом, выполняется по крайней мере одно из неравенств $\lambda_1 \leq v_1 - 1, \lambda_2 \leq v_2 - 1$. В первом случае $g \in A_1$, во втором — $g \in A_2$. В силу теоремы 1 $\mathbf{Q}(\chi)$ совпадает по крайней мере с одним из полей $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi)$ ($i=1, 2$). Если, например, $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}_{A_1}(\chi)$, то для любого $g \in G$ будет иметь место $\chi(g) \in \mathbf{Q}_{A_1}(\chi) \subseteq \mathbf{Q}_{p_1^{v_1-1} u_1}$. В частности,*) $\chi(g_1) \in \mathbf{Q}_{p_1^{v_1}} \cap \mathbf{Q}_{p_1^{v_1-1} u_1} = \mathbf{Q}_{p_1^{v_1-1}}$ — противоречие. Таким образом, группа G содержит элемент порядка $p_1^{v_1} p_2^{v_2}$.

Доказательство теоремы 3. Пусть u_i π_i -часть $|G|$ ($i=1, 2$). Тогда $A_i = \{g \in G \mid g^{u_i} = 1\}$ ($i=1, 2$). Если $g_i \in A'_i$, то g_i π'_i -элемент и, следовательно, $(|g_i|, u_i) = 1$ ($i=1, 2$). Так как $A_1 \cup A_2 = G$, то в силу теоремы 1 поле $\mathbf{Q}(\chi)$ совпадает по крайней мере с одним из полей $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi)$ ($i=1, 2$). Если, например, $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}_{A_1}(\chi)$, то $\chi(g_1) \in \mathbf{Q}_{|g_1|} \cap \mathbf{Q}_{A_1}(\chi) \subseteq \mathbf{Q}_{|g_1|} \cap \mathbf{Q}_{u_1} = \mathbf{Q}_{(|g_1|, u_1)} = \mathbf{Q}$. Аналогично, $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}_{A_2}(\chi)$ влечет $\chi(g_2) \in \mathbf{Q}$. Таким образом, если $g_i \in A'_i$ ($i=1, 2$), то по крайней мере одно из чисел $\chi(g_i)$ ($i=1, 2$) рационально. Если не все значения характера χ на A'_1 рациональны, то найдется такой элемент $g_1 \in A'_1$, что $\chi(g_1) \notin \mathbf{Q}$. На основании доказанного $\chi(g_2) \in \mathbf{Q}$ при любом $g_2 \in A'_2$, т. е. характер χ рационален на A'_2 , если он не всюду рационален на A'_1 .

*) Как известно [9] $\mathbf{Q}_m \cap \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_{(m, n)}$.

Следствие. Если $G^\# = A_1 \cup A_2$, $A_i \neq \emptyset$ ($i=1, 2$) и порядки элементов подмножества A_1 взаимно просты с порядками элементов подмножества A_2 , то характер χ рационален по крайней мере на одном из подмножеств A_i ($i=1, 2$).

Согласно Брауэру и Фаулеру [6] расстояние $d(x, y)$ между элементами $x, y \in G^\#$ определяется следующим образом: $d(x, y) = \infty$, если не существует такой последовательности $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ элементов подмножества $G^\#$, что $x_0 = x$, $x_n = y$, $x_{i-1}x_i = x_i x_{i-1}$ ($i=1, \dots, n$); если же последовательности обладающие указанным свойством существуют, то $d(x, y)$ равно наименьшей «длине» n такой последовательности. В частности $d(x, x) = 0$; $d(x, y) = 1$ равносильно тому, что $x \neq y$ и $x \cdot y = y \cdot x$. Ясно, что $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ($x, y, z \in G^\#$). Если α — автоморфизм группы G , то, очевидно, $d(x^\alpha, y^\alpha) = d(x, y)$.

Дж. Томпсоном была высказана следующая гипотеза: если $x, y \in G^\#$, $|x| = p$, $|y| = q$ (p и q — различные простые числа), причем $\chi(x)$ и $\chi(y)$ иррациональны, то существуют такие элементы $x', y' \in G^\#$, что $x' \sim x$, $y' \sim y$ и $x'y' = y'x'$ (т. е. $d(x', y') = 1$).

Как показано в [7], гипотеза Томпсона неверна. Тем не менее, утверждение этой гипотезы оказывается справедливым в следующей ослабленной формулировке:

Теорема 4. Если $x, y \in G^\#$ и $\chi(x), \chi(y)$ иррациональны, то существуют такие элементы $x', y' \in G^\#$, что $x' \sim x$, $y' \sim y$ и $d(x', y') < \infty$.

Доказательство. Группу G будем называть несвязной, если $d(x, y) = \infty$ для некоторых $x, y \in G^\#$; в противном случае группу G назовем связной*). (Таким образом, связны группы, для которых подмножество $G^\#$ имеет конечный диаметр). На множестве $G^\#$ возникает отношение эквивалентности ρ_G : если $x, y \in G^\#$ то $x \rho_G y$ тогда и только тогда, когда $d(x, y) < \infty$. Классы эквивалентности ρ_G назовем компонентами связности группы G . Группа G несвязна тогда и только тогда, когда число компонент связности > 1 . Компоненты связности группы G , очевидно, переставляются ее автоморфизмами. Непустое подмножество $A \subseteq G^\#$ будем называть замкнутым, если $x \in A$ влечет $C_G(x) \subseteq \hat{A} = A \cup \{1\}$. Подмножество A замкнуто, очевидно, тогда и только тогда, когда оно является объединением некоторого семейства компонент связности. Если p — простое число и замкнутое подмножество A содержит p -элемент u , то $\hat{A}$ содержит каждую силовскую p -подгруппу P группы G , содержащую u . Действительно, так как $Z(P) \neq \{1\}$, то $P^\#$ содержится в той же компоненте связности, что и элемент u , откуда вытекает, что $P \subseteq \hat{A}$. Если, кроме того, замкнутое подмножество A нормально, то $\hat{A}$ содержит все силовские p -подгруппы группы G , а потому и все p -элементы группы G .

В дальнейшем мы будем считать группу G несвязной, так как в противном случае утверждение теоремы очевидно. Пусть x и y — элементы группы G удовлетворяющие условию теоремы, D — компонента связности, содержащая элемент x и $\{D_1 = D, \dots, D_n\}$ — класс компонент связности сопряженных с D . Положим $A_1 = \bigcup_{i=1}^n D_i$, $A_2 = G^\# \setminus A_1$. Из $A_1 = G^\#$ следовало бы, что $|G| - 1 =$

*) Ряд результатов относящихся к несвязным группам анонсирован в [8].

$=|G^\#| = \sum_{i=1}^n |D_i| = n|D|$. Так как $n = (G : N_G(D))$ делит $|G|$, отсюда следует, что $n=1$. Таким образом, $G^\# = D$, что противоречит несвязности группы G . Тем самым доказано, что $A_1 \neq G^\#$ и, следовательно $A_2 \neq \emptyset$. Так как компоненты связности D_i ($i=1, \dots, n$) переставляются между собой внутренними автоморфизмами группы G , то A_1 нормально. Итак, A_1 и A_2 — непустые нормальные замкнутые подмножества и $G^\# = A_1 \cup A_2$. Порядки элементов подмножества A_1 взаимно просты с порядками элементов подмножества A_2 . Действительно, допустим, что $x_i \in A_i$ ($i=1, 2$) и $(|x_1|, |x_2|) = m \neq 1$. Если p — простой делитель числа m , то $|x_1|^{1/p} = |x_2|^{1/p} = p$. Так как $x_i^{1/p} \in C_G(x)$, то ввиду замкнутости подмножества A_i , $x_i^{1/p} \in A_i$ ($i=1, 2$). Ввиду замкнутости и нормальности подмножеств A_i ($i=1, 2$), отсюда вытекает, что каждое из подмножеств $\hat{A}_i$ ($i=1, 2$) содержит все p -элементы группы G , что невозможно, так как $\hat{A}_1 \cap \hat{A}_2 = \{1\}$. Таким образом, подмножества A_i ($i=1, 2$) удовлетворяют условию следствия теоремы 3. Так как $x \in A_1$ и $\chi(x) \notin Q$, то χ рационален на A_2 . Ввиду иррациональности $\chi(y)$ отсюда вытекает, что $y \in A_1$. Так как $A_1 = \bigcup_{i=1}^n D_i$, то найдутся такие i и j , что $x \in D_i$, $y \in D_j$. Замечая, что $D_j = D_1^g$, где $g \in G$ и полагая $x' = x^g$, $y' = y$, получим $x', y' \in D_1$, т. е. $d(x', y') < \infty$. Так как $x' \sim x$, $y' \sim y$, то теорема доказана.

Литература

- [1] H. F. Blichfeldt, On the order of linear homogeneous groups II. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1904), 310—325.
- [2] W. Burnside, Theory of groups of finite order, second edition, *Cambridge* (1911), 348.
- [3] R. Brauer, A note on theorem of Burnside and Blichfeldt. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 31—34.
- [4] D. S. Passman, Permutation Groups, *New York—Amsterdam*, (1968), 176.
- [5] W. Feit, Characters of finite groups. *New York—Amsterdam*, (1967), 40.
- [6] R. Brauer—K. A. Fowler, On groups of even order, *Ann. Math.* **62** (1955), 565—583.
- [7] A. Sibley David, A counterexample in the theory of finite groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **69** (1977), 19—21.
- [8] А. И., Вейцблит Э. М., Жмудь «Связность» конечной группы и группы Цассенхауза. *Сообщения АН Груз. ССР*, **90**, (1978), 277—279.
- [9] H. Hasse, Zahlentheorie (Berlin) 1963.

(Поступила: 13. VII. 1979.)