

О связи квазиавтопараллельных кривых и автопараллельных поверхностей

Ш. БАЧО (Дебрецен)*

В аффинносвязном пространстве обобщением плоских кривых можем считать такие кривые, вдоль которых существует параллельное поле двумерных площадок, каждая из которых проходит через касательный вектор к этой кривой в соответствующей точке. Такие кривые изучают Н. С. Синюков [1] и многие авторы¹. В настоящей работе рассматриваются такие обобщенные плоские кривые в тензорносвязном пространстве. В соответствии с нашей статьей [3] эти обобщенные плоские кривые назовем квазиавтопараллельными. В [3] мы исследовали существование квазиавтопараллельных кривых и их поведение в случае слабой линейной тензорной связности. Данная работа является продолжением нашей упомянутой статьи [3].

Первый параграф носит вводный характер. В ней излагаются необходимые определения и результаты для дальнейшего исследования. Второй параграф посвящен изучению связи квазиавтопараллельных кривых и автопараллельных поверхностей. Эти поверхности являются обобщениями плоскостей в тензорносвязном пространстве (см. [3]). В третьем параграфе изучаем квазиавтопараллельные поверхности, которые являются аналогами геодезических поверхностей. Исследования носят локальный характер.

1. §. Квазиавтопараллельные кривые и автопараллельные поверхности в тензорносвязном пространстве

Тензорная связность² определяет к данному двухвалентному тензору $t^{ij}(x)$ ³ в бесконечно близкой точке $(x+dx)$ тоже двухвалентный тензор, который назовем параллельным к тензору $t^{ij}(x)$. $t^{ij}(x)$ и $t^{ij}(x+dx)$ тогда и только тогда параллельны, если

$$(1) \quad \partial t^{ij} = dt^{ij} + B^{ij}_r(x, t) dx^r = 0,$$

т. е. абсолютный дифференциал равен нулю. $B^{ij}_r(x, t)$, объект тензорной связности, однородная функция нулевой степени в переменной t . Для того,

* S. Bácsó (Debrecen)

¹ Подробную литературу можно найти в монографии Н. С. Синюкова [1].

² Подробное изложение теории тензорной связности можно читать в работе А. Cossu [2].

³ Латинские индексы принимают значения от одного до n .

чтобы ∂t^{ij} был двухвалентным тензором, $B^{ij}_r(x, t)$ должен иметь соответствующий закон преобразования. $B^{ij}_r(x, t)$, и вместе с ним тензорная связность вообще нелинейны. $B^{ij}_r(x, t)$ линейна, если

$$(2) \quad B^{ij}_r(x, t) = \gamma_{kl}^{ij}(x) t^{kl}.$$

Дифференциальное многообразие M_n n измерений вместе с объектом $B^{ij}_r(x, t)$ называется пространством T_n тензорной связности.

В дальнейшем все рассуждения ведутся в тензорносвязном пространстве T_n^* , в котором тензорная связность отображает простой бивектор на простой бивектор. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было

$$(3) \quad B^{(ij)}_r(x, p) = 0$$

$$(4) \quad p^{[2} B^{\kappa\lambda]}_r(x, p) + B^{[2}_r(x, p) p^{\kappa\lambda]} = 0; \quad (\kappa, \lambda = 3, 4, \dots, n),$$

где p^{ij} компоненты простого бивектора.⁴

Определение 1. Квазиавтопараллельной кривой назовем кривую γ , вдоль которой существует параллельное поле двумерных площадок, каждая из которых проходит через касательный вектор к этой кривой в соответствующей точке.

Двухмерная площадка характеризуется простым бивектором p^{ij} , так что в пространстве T_n^* система дифференциальных уравнений квазиавтопараллельных кривых в каноническом параметре τ имеет следующий вид

$$(5) \quad \frac{dp^{ij}}{d\tau} + B^{ij}_r(x, p) \frac{dx^r}{d\tau} = 0$$

$$(6) \quad p^{ij} \wedge \frac{dx^r}{d\tau} = 0.$$

Теорема 1. Система (5), (6) имеет единственное решение $p^{ij}(\tau)$ и $x^i(\tau)$, при данных функций $x^1(\tau)$, $x^2(\tau)$ и для любых начальных значений x^i_0, p^{ij}_0 , где $x^1_0 = x^1(\tau_0)$ и $x^2_0 = x^2(\tau_0)$.

Определение 2. Двухпараметрическую поверхность пространства T_n^* назовем автопараллельной, если её касательные плоскости вдоль любых кривых поверхности параллельны.

Таким образом, любые кривые автопараллельной поверхности являются квазиавтопараллельными.

⁴ Дальнейшие определения и утверждения этого введения мы обсуждали в [3].

2. §. Автопараллельные поверхности и их связь с квазиавтопараллельными кривыми

Пусть задана автопараллельная поверхность $x^i = x^i(u^1, u^2)$ в параметрическом представлении, при котором

$$u^a = x^a \quad (a = 1, 2).$$

Тогда автопараллельная поверхность имеет следующий вид

$$(7) \quad \begin{aligned} x^1 &= x^1 \\ x^2 &= x^2 \\ x^3 &= x^3(x^1, x^2) \\ &\vdots \\ x^n &= x^n(x^1, x^2). \end{aligned}$$

В дальнейшем употребляем именно такое параметрическое представление автопараллельной поверхности. Такой выбор не нарушает общности выводов. В самом деле, при выборе любой координатной плоскости $[x^i, x^j]$ приведенные здесь результаты и доказательства остаются в силе.

Берём в пространстве T_n^* какую-нибудь точку x_0^i , и в этой точке простой бивектор p_0^{ij} , который определяет плоскость в точке x_0^i . Пусть они в дальнейшем фиксированы.

Теорема 2. Если существует автопараллельная поверхность Φ , касающаяся плоскости бивектора p_0^{ij} в точке x_0^i , тогда все квазиавтопараллельные кривые, имеющие начальные значения x_0^i, p_0^{ij} , принадлежат к поверхности Φ .

Доказательство. Пусть даны функции $x^1(\tau), x^2(\tau)$ ($x^1 = x^1(\tau_0), x^2 = x^2(\tau_0)$); рассмотрим квазиавтопараллельную кривую γ_1 , определённую через начальные значения x_0^i, p_0^{ij} и функции $x^1(\tau), x^2(\tau)$. Если существует автопараллельная поверхность в параметрическом представлении (7), касающаяся плоскости бивектора p_0^{ij} в точке x_0^i , тогда функции $x^1(\tau), x^2(\tau)$ определяют на этой плоскости квазиавтопараллельную кривую γ_2

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x^1(\tau) \\ x_1^2 &= x^2(\tau) \\ x_1^3 &= x^3(x^1(\tau), x^2(\tau)) \\ &\vdots \\ x_1^n &= x^n(x^1(\tau), x^2(\tau)), \end{aligned}$$

которая, на основе последнего предложения первого параграфа, квазиавтопараллельна. В следствии Теоремы 1. $\gamma_1 \equiv \gamma_2$, и эта квазиавтопараллельная кривая принадлежит Φ .

Теорема 3. Если существует автопараллельная поверхность, касающаяся в точке x_0^i плоскости бивектора p_0^{ij} , то только одна.

Доказательство. Допустим, что существует две такие автопараллельные поверхности, Φ_1 и Φ_2 . Рассмотрим на плоскости $[x^1, x^2]$ функции $x^1(\tau)$, $x^2(\tau)$ для которых $x_0^1 = x^1(\tau_0)$, $x_0^2 = x^2(\tau_0)$. К этим функциям принадлежит на обеих поверхностях по одной квазиавтопараллельной кривой. Но эти кривые попарно совпадают в следствии Теоремы 1., так что $\Phi_1 = \Phi_2$.

3. §. Квазиавтопараллельные поверхности

Определение 3. Пусть $P_0(x)$ — произвольная точка в пространстве T_n^* и σ — двумерная плоскость в этой точке. По направлению каждого вектора плоскости σ проведем через P_0 квазиавтопараллельную кривую, плоскость бивектора p_0^{ij} которой здесь σ . В дальнейшем такие квазиавтопараллельные кривые назовем характерными K . Если эти квазиавтопараллельные кривые дают двухпараметрическую поверхность Ψ , то она называется квазиавтопараллельной.

Очевидно, что в точке P_0 σ является касательной поверхностью.

Теорема 4. В произвольной точке (x) к каждой плоскости p_0^{ij} существует квазиавтопараллельная поверхность.

Доказательство. На основе Теоремы 1. к данным x_0^i , p_0^{ij} и $x^a(\tau)$ ($a=1, 2$; $x^a(\tau_0)=x_0^a$) принадлежит единственная квазиавтопараллельная кривая, которая удовлетворяет системам (5), (6). Запишем из решения системы (5), (6) функции $x^i(\tau)$ с помощью формулы Тейлора. Берём систему координат, в которой $p^{12}(\tau_0)=p_0^{12} \neq 0$. Так поблизости τ_0 ещё не равно нулю p^{12} . Вследствие (6) имеется $p^{ij} \wedge \dot{x}^r = q^{ijr} = 0$. Таким образом, из $q^{12\kappa} = 0$ ($\kappa=3, 4, \dots, n$)

$$(8) \quad \dot{x}^\kappa = \frac{1}{p^{12}} (\dot{x}^2 p^{1\kappa} + \dot{x}^1 p^{\kappa 2}).$$

Тогда получаем

$$(9) \quad \begin{aligned} x^1 &= x^1(\tau) \\ x^2 &= x^2(\tau) \\ &\vdots \\ x^\kappa &= x^\kappa(\tau) = x_0^\kappa + (\tau - \tau_0) \frac{1}{p_0^{12}} (\dot{x}_0^2 p_0^{1\kappa} + \dot{x}_0^1 p_0^{\kappa 2}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\tau - \tau_0)^2 \frac{1}{(p_0^{12})^2} \{ [B^{12}_r(x_0, p_0) (\dot{x}_0^2 p_0^{1r} + \dot{x}_0^1 p_0^{r2}) - B^{1\kappa}_r(x_0, p_0) \dot{x}_0^2 - \\ &- B^{\kappa 2}_r(x_0, p_0) \dot{x}_0^1] (\dot{x}_0^2 p_0^{1r} + \dot{x}_0^1 p_0^{r2}) + \ddot{x}_0^2 p_0^{1\kappa} + \ddot{x}_0^1 p_0^{\kappa 2} \} + \frac{1}{3!} (\tau - \tau_0)^3 \frac{1}{(p_0^{12})^3} \{ \dots, \end{aligned}$$

где мы пользовались уравнениями (8), и производные компонент p^{ij} выразили с помощью (5).

Рассмотрим в координатной плоскости $[x^1, x^2]$ семейство кривых

$$(10) \quad x^a = f^a(\tau, \alpha) \quad (a = 1, 2),$$

исходящих из точки $P'_0(x^1_0, x^2_0)$, и вполне покрывающих одну окрестность точки P'_0 в плоскости $[x^1, x^2]$. Предположим, что $x^a_0 = 0$ и $\tau_0 = 0$ тогда таким семейством кривых является, например

$$(11) \quad x^1 = \tau \cos \alpha, \quad x^2 = \tau \sin \alpha.$$

Это семейство кривых даёт регулярное представление плоскости $[x^1, x^2]$ за исключением точки P'_0 . Если, мы подставим кривые (11) в уравнения (9), то мы получаем семейство кривых $x^i(\tau, \alpha)$, каждые из которых является квазиавтопараллельными кривыми. Эти кривые исходят из точки $P_0(x)$ и плоскостью бивектора $p^{ij}(\tau_0)$ является σ . По направлению каждого вектора плоскости σ исходит точно одна такая кривая. Итак $x^i(\tau, \alpha)$ — семейство таких квазиавтопараллельных кривых, которое рассматриваются в Определении 3. Однако эти двухпараметрические функции $x^i(\tau, \alpha)$ создают поверхность Ψ , т.е. функции $x^i(\tau, \alpha)$ непрерывно дифференцируемы и ранг матрицы $\frac{\partial(x^i)}{\partial(\tau, \alpha)}$ разнится двум в точке

P_0 . В Теореме 4. мы показали, что к данному P_0 и σ существует семейство квазиавтопараллельных кривых со свойством K , создающее поверхность Ψ . Ψ аналог геодезической поверхности аффинносвязного пространства L_n . В пространстве L_n каждая квазиавтопараллельная кривая со свойством K принадлежит к поверхности Ψ , но в пространстве T_n^* это не верно. Здесь существуют и квазиавтопараллельные кривые $\bar{x}^i(\bar{\tau})$ со свойством K , которые не принадлежат к Ψ . Такие кривые легко получаются, если вместо (11) дадим иное семейство функций плоскости $[x^1, x^2]$. Для того, чтобы все K характерные квазиавтопараллельные кривые принадлежали к Ψ , необходимо, чтобы дальнейшие условия удовлетворялись на B^{ij}_r .

Автопараллельная поверхность в каждой её точке квазиавтопараллельна. Это свойство только необходимо, но не достаточно для того, чтобы, поверхность была автопараллельной. Если T_n^* редуцируется на L_n , которое имеет компонентны объекта $\Gamma^i_{jr}(x)$, т. е. $B^{ij}_r(x, t) = (\delta^i_k \Gamma^j_{tr} + \delta^j_t \Gamma^i_{kr}) t^{kl}$, то автопараллельная поверхность тоталгеодезическая поверхность пространства L_n , и квазиавтопараллельная поверхность: геодезическая поверхность пространства L_n . В аффинном пространстве A_n обе поверхности являются плоскостями.

В пространстве A_n квазиавтопараллельные кривые это плоские привые. Очевидно, что в произвольной точке каждой поверхности пространства A_n по направлению каждой касающейся поверхности векторов исходят плоские кривые, которые принадлежат к поверхности. Это свойство верно и в пространстве T_3^* .

Теорема 5. В произвольной точке каждой двухпараметрической поверхности пространства T_3^* по направлению каждой касающейся поверхности векторов исходят квазиавтопараллельные кривые, которые принадлежат к поверхности.

Следует отметить, что эти поверхности вообще не являются квазиавтопараллельными, потому что плоскость σ простого бивектора p^{ij} квазиавтопараллельной кривой обычно не является касательной плоскостью поверхности в данной точке.

Доказательство Теоремы 5. Пусть задана $\Sigma(x)$ в точке $P(x)$ одной двухпараметрической поверхности пространства T_3^* . Из точки $P(x)$ в плоскости $\Sigma(x)$ исходит вектор $e(P)$, и проведем плоскость $S \neq \Sigma(x)$ через $e(P)$. Перенесём параллельно плоскость S по направлению вектора $e(P)$ в бесконечно близкую точку $P'(x+dx)$ поверхности χ . Тогда получаем здесь плоскость S' . Касательный вектор $e'(P')$ линия пересечения плоскости S' с касательной плоскостью в точке P' поверхности χ . Если перенесём параллельно S' по направлению $e'(P')$ в соседнюю точку $P''(P'' \in \chi)$, получается плоскость S'' . Продолжая дальше этот процесс, точки $P, P', P'', \dots$ дают квазиавтопараллельную кривую на поверхности χ . Этот процесс можно осуществлять в плоскости $\Sigma(x)$ по направлению каждого вектора, исходящего из точки $P(x)$. Так χ имеет свойство, рассмотренное в Теореме 5.

Литература

- [1] Н. С. Синюков, Геодезические отображения римановых пространств. Москва, Наука 1979.
- [2] A. Cossu, Nozioni generali sulle connessioni tensoriali di specie qualunque. *Rend. Mat. e Appl.* **21** 1962, 167—218.
- [3] L. TAMÁSSY—S. BÁCSÓ, On quasi-autoparallel curves in tensorially connected spaces. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, Differential geometry (to appear).

(Поступила: 22. VIII. 1979.)