Die Verwendung der Zentralprojektion im Modell Cayley—Klein des hyperbolischen Raumes

Von A. GYARMATHI und L. GYARMATHI (Debrecen)

In dem vergangenen Jahrzehnt haben sich mehrere Verfasser mit der darstellende Geometrie der dreidimensionalen Geometrie von Bolyai—Lobatschewski beschäftigt. Unter diesen heben wir die Arbeit des ZAGORKA ŠNAJDER [5] heraus. Unsere Arbeit zeigt, wie man im Cayley—Klein Modell[1]) des hyperbolischen Raumes die Zentralprojektion anwenden kann.[2])

I. Die Erörterung einiger zur Anwendung kommender Grundbegriffe der hyperbolischen Geometrie

1. Solche Kollineationen Π, welche den Kugel K^2 eines zu projektivem Raum ergänzten euklidischen Raumes so insich führen, daß die inneren Punkte von K^2 in innere Punkte derselben gehen, nennen wir die Bewegungen des im Modell erklärten hyperbolischen Raumes, wenn sie die Orientierung von K^2 behalten.

Die inneren Pukte von K^2 sind die wirklichen Punkte[3] des hyperbolischen Raumes, die äußeren Punkte sind die *idealen* Punkte. Die Punkte von K^2 sind die *Endpunkte* der hyperbolischen Geometrie.

2. *Die Strecken- und die Winkelcharakteristiken. Die parallelen und die senkrechten Geraden*

Es sei k^2 ein Ebeneschnitt von K^2. Unter Streckencharakteristik von $\overline{P_1P_2}$ verstehen wir das Doppelverhältnis $\Delta(\overline{P_1P_2})=(\Xi HP_2P_1)$, wo Ξ, H die Endpunkte der die Strecke $\overline{P_1P_2}$ enthaltenden Geraden sind. Zwei Strecken sind im hyperbolischen Sinn kongruent, wenn ihre Charakteristiken gleich sind (Fig. 1).

Unter Winkelcharakteristik von $\sphericalangle a_1b_1$ verstehen wir das Doppelverhältnis $\Delta(\sphericalangle a_1b_1)=(\Xi_1H_1\Xi_2H_2)$, wo Ξ_1, H_1, Ξ_2, H_2 die Endpunkte der Winkelschenkel bzw. der ergänzenden Halbgeraden.

---

[1]) Wir wählen das Modell deshalb, weil man durch die Anwendung desselben die Aufgaben und die Konstruktionen, nicht nur symbolisch sondern wirklich erledigen kann.

[2]) Die Arbeit gibt die Lösungen einiger fundamentalen Aufgaben.

[3]) Bei den Konstruktionen brauchen wir in erster Reihe die wirklichen Punkte, nur nötigenfalls nutzen wir die idealen Punkte.

Solche Halbgeraden, deren Endpunkte gemeinsam sind, sind *parallel*.

Im Modell drückt man die Orthogonalität mittels der durch K^2 bestimmten Polarität bzw. durch die in seinen Ebenschnitte auftretenden Polarität aus ([1] 232).

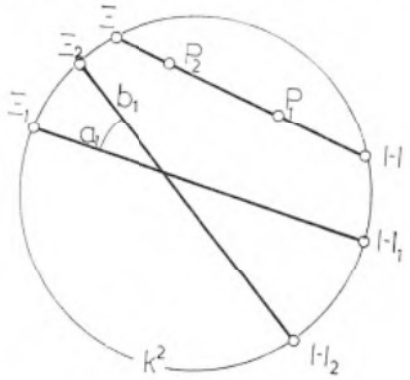


Fig. 1.

3. *Parazyklus*

Es sei k^2 ein Ebenschnitt von K^2. Unter Parazyklus p^2 verstehen wir eine solche Kurve zweiter Ordnung, inwelche eine speziälle Perspektivität (Fig. 2) mit Fixpunkt U und Axe u den k^2 überträgt. p^2 ist innerhalb von k^2.[4]) Die Parazyklen sind die Bahnlinien der entsprechenden Bewegung der hyperbolischen Eben U ist der Mittelpunkt und u ist die Grundgerade von p^2.

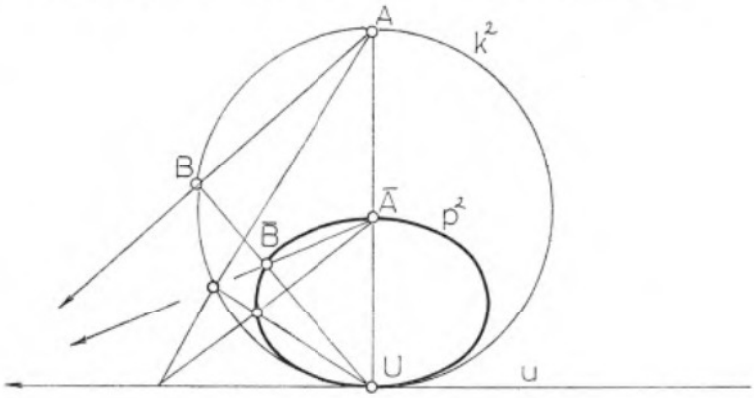


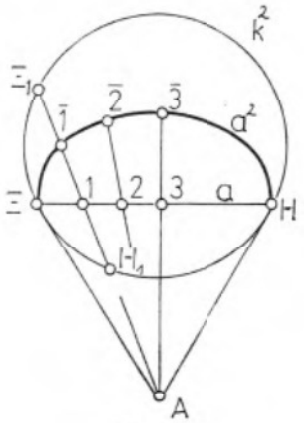
Fig. 2.

4. *Äquidistantenlinien*

Es sei k^2 ein Ebeneschnitt der Kugel K^2, Ξ, H die zwei Enden der a (Fig. 3) A ist der Pol von a bezüglich von k^2. Zu $P(1, 2, 3, \ldots)$, $P \in a$, gehörige solche Gesamtheit a^2 des $\bar{P}(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots)$, wo $\Delta(\overline{1\bar{1}}) = \Delta(\overline{2\bar{2}}) = \Delta(\overline{3\bar{3}}) = \ldots = \Delta(\Xi_1 H_1 \bar{1}1)\ldots$, ist eine Äquidistantenlinie von a, wobei a die Grundgerade von a^2 ist. a^2 ist die Bahnlinie irgendeines Punktes bei Verschieburg längs von a.

---

[4]) p^2 ist Grenzparazyklus.



Fin. 3.

5. *Hyperbolischkreis*

Es sei k^2 ein Ebeneschnitt des Kugels K^2, Q der innere Punkt von k^2, q Polargerade von Q bezüglich von k^2 und I elliptische Involution auf $q((1, 1')(2, 2'))$ bezüglich von k^2 (Fig. 4).

Die Drehung um Q ist die Orientierung behaltende und den k^2 in sich führende Kollineation, für welche Q Doppelpunkt ist.

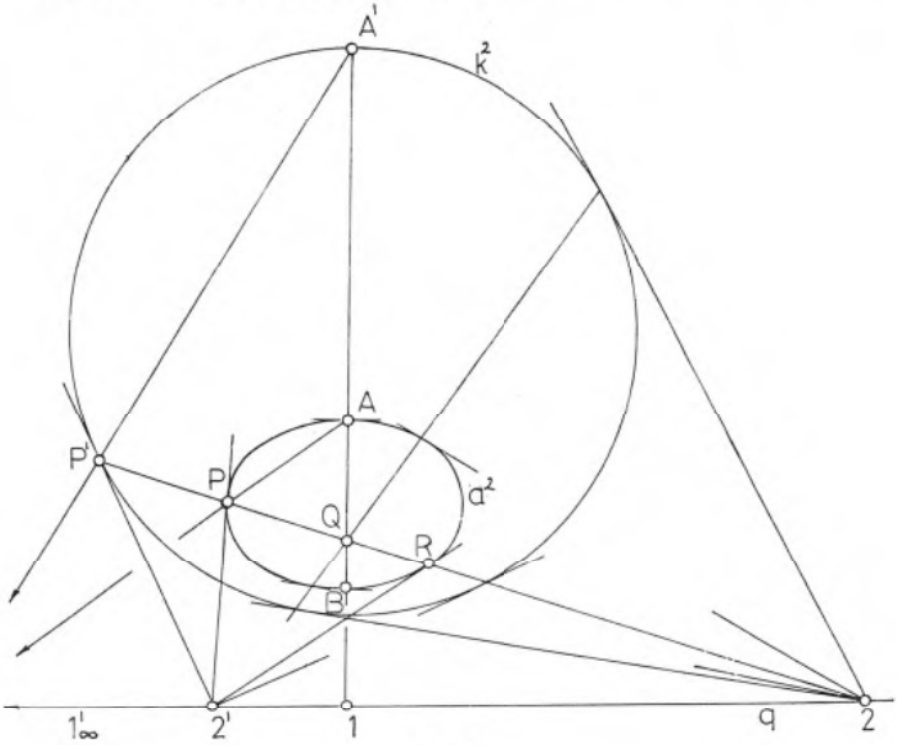


Fig. 4.

[5]) k^2 ist Grenzhyperbolischkreis.

[6]) a^2 ist ein Hyperbolischkreis mit Mittelpunkt Q: $(ABQ1) = -1$, $(PRQ2 = -1$.

Die Hyperbolischkreise mit Mittelpunkt Q sind die Elemente solcher Kegelschnittreihen in Innere von k^2,[5]) welche man durch k^2 und Q bestimmt [6]). Die durch Q gehenden Geraden schneiden entsprechende Punkte $(P', P), (A', A)$ aus k^2 und aus dem Hyperbolischkreis heraus. Die Verbindungsgeraden der zwei Punkte (P', A') und der zwei entsprechenden Punkte (P, A) schneiden sich in q, weil q die assozierte, invariante Gerade des Q in der Drehung um Q ([1] 288) ist.

II. Zentralprojektion im Modell Cayley—Klein

Den größten Kreis k^2 der Grundkugel K^2 nehmen wir in der Bildebene π auf. Der Mittelpunkt H von K^2 ist der Hauptpunkt. Das Zentrum C bestimmt den Distanzkreis k^2, C ist über der Bildebene [7]). Nur solche Punkte haben ein Zentralbild, welche innere Punkte des Kegels Ck^2 und K^2 sind. Die untere Hälfte des K^2 bezeichnen mit K_1. Die Gebilde wählen wir womöglich in der K_1. Bei der Zentralprojektion brauchen wir in erster Reihe das Verfahren der *Spurelemente*. Die ersten Spurelemente sind die inneren Punkte von k^2, die zweiten Spurelemente sind die Punkte der Fläche des K^2, die Endpunkte. In einigen Fällen verwenden wir bei Konstruktionen auch die Orthogonalprojektion. Diese projiziert man im euklidischen Sinn. Diese stimmt hier mit der hyperbolischen überein.

1. *Die Darstellung der Geraden*

a) Die Gerade a schneidet π im Spurpunkt S, ihr unterer Endpunkt ist U_1. Zu einer gegebenen a kann man das Punktpaar (S, U_1') bestimmen und zu gegebenem Punktpaar (S, U_1') kann man die Gerade a angeben, welche deren unterer Endpunkt U_1 in K_1 ist (Fig. 5).

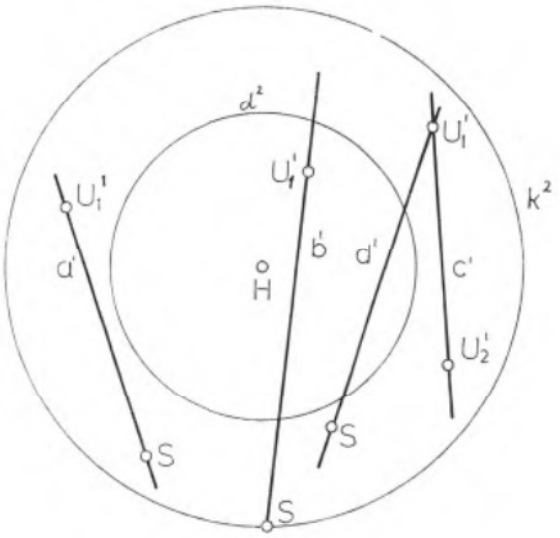


Fig. 5.

[7]) Diese vorteilhafte Aufnahme der projizierendem Systems weicht im wesentlichen wenig von der universalen ab, hingegen bieten sich viele Erleichterungen bei den Konstruktionen dar. Die Bildebene ist wagerecht.

b) b ist parallel zu π im K_1. Ihr Spurpunkt S ist der Punkt von k^2, U_1 ist ihr Endpunkt. Wir stellen b mit dem Punktpaar (S, U_1') dar. Zu gegebenem (S, U_1') gehört eine Gerade im K_1.

c) c ist ultraparallel zu π in K_1. Mit Endpunkte U_1, U_2 stellt man c dar, zu (U_1', U_2') gehört eine Gerade in K_1. d ist parallel zu c.

2.[8]) *Die Umglegung der zentrischen Projektionsebene von a in π um a'*

Es sei Q der Fußpunkt der aus C zu a gestellten Senkrechten h. Es ist genug den Punkt C um Q in Ebene hh^o [9]) mit der Anwendung des Hyperbolischkreises hk_C^2 in dem Punkt $[C]$ der π umlegen.[10]) Die Konstruktion de $[C]$ verrichten wir nach Punkt 5) (Fig. 4) in π, wohin wir die Ebene hh^o abdrehen. Bei Abdrehung um h^o erhalten wir die Punkte (C) und (U) der (h). Der $[U]$ ist auf h^a und (q) ist Polar von Q bezüglich von k^2 (Fig. 6). Die Gerade $[C]\ U_1'$ schneidet

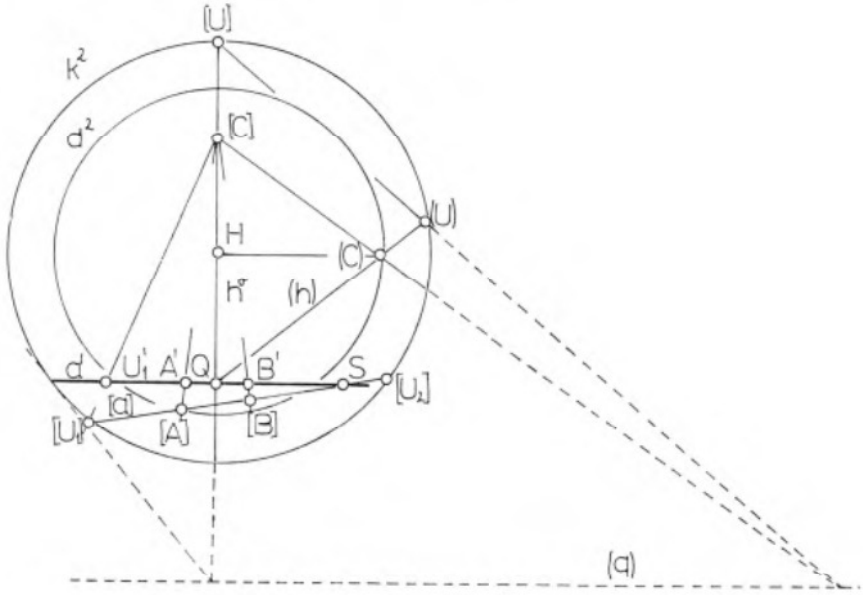


Fig. 6.

aus $k^2[U_1]$ aus, weil $[a] \| [C][U_1]$. Bestimmen wir noch die $[A]$ und $[B]$ Punkte. $\Delta(\overline{AB}) = ([U_2][U_1][B][A])$.

(Im Falle b) und c) vollziehen wir nicht die Umlegung.)

---

[8]) Wir bezeichnen die Endpunkte mit $U, U_1, U_2, \ldots$, die Endkegelschnitte mit $u^2, u_1^2, u_2^2 \ldots$.

[9]) ^{o} bezeichnet das orthogonale Bild.

[10]) Die Umglegung des Punktes und der Gerade der Ebene bezeichnen wir mit [ ], die Abdrehung um $h' = h^o$ mit ( ).

3. *Die Darstellung der Punkte*

Beim Verfahren der Spurelemente kann man die Punkte allein nicht darstellen. Die Lage des Punktes P bestimmen wir durch seine Zentralprojektion und die Zentralprojektion einer beliebigen durch diesen Punkt gehenden Geraden oder Ebene.

Später wenden wir mehrmal Fig. 7[11]). an. P^oP' geht durch H. (P) ist die Abdrehung um P^oP'.

4. *Die Darstellung der Ebene*

Drei Typen der Ebene stellen wir dar:

(a) die Bildebene schneidende, (b) zur Bildebene parallel, (c) zur Bildebene ultraparallel. Wir stellen die Ebenen einheitlich mit sogenannten *Hauptgeraden* dar[12]). Wir nennen die auf die Hauptgerade senkrechten Geraden *Hauptlinien*

(a) In diesem Fall stellen wir die Ebene mit Hauptfallinie h dar. h ist senkrecht auf die Spurlinie m der Ebene und hh' enthält den Hauptpunkt $H, hh' \perp \pi$ (Fig. 8). Die h stellen wir mit Spurpunkt M und mit unterem Endpunkte U_1 dar.

Die Darstellung des P in die Ebene mit seinem orthogonalen Bild: wir nehmen P' auf und führen durch ihn das Hauptlinienbild n' (Fig. 9). Bezeichnen wir ihren Fußpunkt mit $N', n' \perp h'$, weil $n \perp h$.[13]) Dreht man h um h' in $\pi\, ab$, bekommt man h. Dann bestimmen wir auf die gewohnte Art die (N). n^a ist senkrecht in N^o zu $h' = h^o$. P^a ist auf HP' und n^o.

(b) Im Fall b stellen wir die Ebene mit ihrer Hauptparallelgeraden dar. $h \| h'$ und $H \in h'$ (Fig. 10). Die Gerade h stellt die Ebene mit ihren Spurpunkt M und mit ihren niederen Endpunkt U_1 dar.

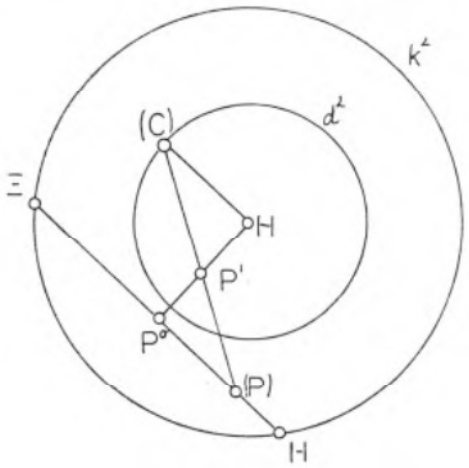


Fig. 7.

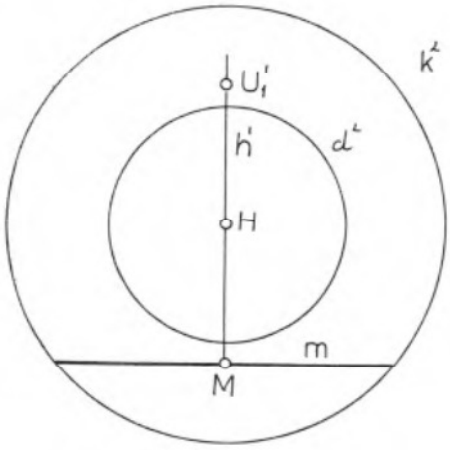


Fig. 8.

[11]) Fig. 7 ist die Grundfigur der Distanzperspektive. Die orthogonale Projektion und die Abdrehung nehmen wir jetzt im hyperbolischen Sinn.

[12]) Gewissermaßen, wie im kotierten Projektion, S. noch [5], 132.

[13]) Die Bilde der Hauptlinie n' und n^o sind senkrecht zu $h' = h^o$, weil sie der Durchmesser der k^2 ist und so ist ihre Konjugierte senkrecht zu $h' = h^o$.

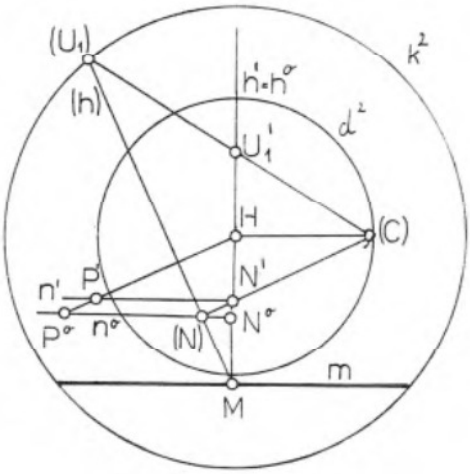


Fig. 9.

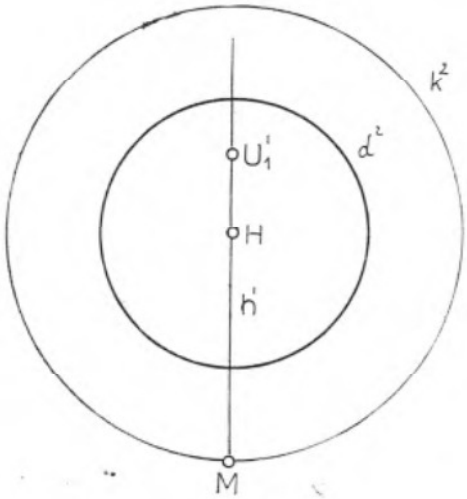


Fig. 10.

(c) Im Fall C stellen wir die Ebene α mit ihrer Hauptultraparallelen Geraden dar. h und h' sind ultraparallel. Die Ebene hh' enthält die gemeinsame senkrechte Gerade von α und π. $H \in h'$. h wird mit Punkten U_1 und U_2 dargestellt (Fig. 11).

Wir konstruieren noch die um h' abgedrehte h. Die Darstellung des Punktes in der Ebene im Falle (b) und (c) ist ähnlich zu (a), für diese machen wir keine besondere Figur.

5. *Konstruktion des Bildes der Endpunkte der Ebene*

Stellen wir eine Ebene α, welche π schneidet mit ihrer Hauptfallinie h dar. α schneidet aus K^2 ihre Endpunkte, den Kreis u^2. Dreht man h um h' in π ab, (U_1) und (U_2) sind die Abdrehungen der Endpunkte von h. U_1' und U_2' sind die Achsenpunkte von $u^{2'}$. (Man kann leicht einsehen, daß h' die Achse von u^2

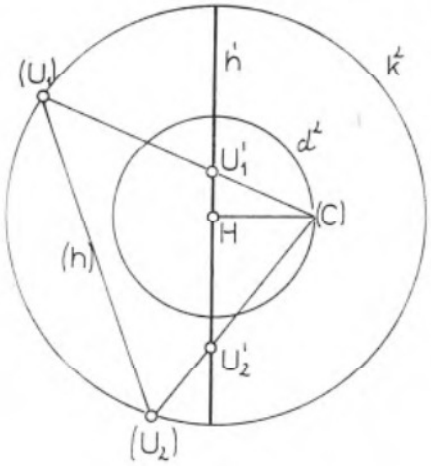


Fig. 11.

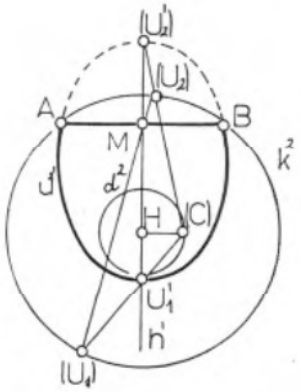


Fig. 12.

ist.) (Fig. 12) A un B sind die Punkte von $a^{2'}$. Die Achsenpunkte und A, B bestimmen den $u^{2'}$. $u^{2'}$ ist eine Halbhyperbel ([2] 229).

Im Falle (b) und (c) ist die Konstruktion des Zentralbildes der Endpunkte ähnlich, nur soll man A oder B mit einem geeigneten Punkt ersetzen.

6. *Das perspektive Bild des auf gegebener Ebene stehenden vierseitigen Prismas*

Wir machen die Konstruktion in den Fall, wo die Grundebene β zu dem Typus (b) gehört Für die zwei anderen Typen stimmt die Konstruktion im wesentlichen überein.

Wir stellen β mit ihrer Hauptparallellinie h dar. Bestimmen wir das Bild $u^{2'}$ der Endpunkte von β wie im Fall von α. (Den Punkt A vertreten wir mit I und den Punkt I stellen wir nach Figur 9. dar, I° ist der eine Endpunkt der großen Achse von $u^{2\circ}$, $\overline{(K)N}=\overline{(K)(U_1)}$, $\overline{K^{\circ}I^{\circ}}=(K)(U_1)$.) (Fig. 13)

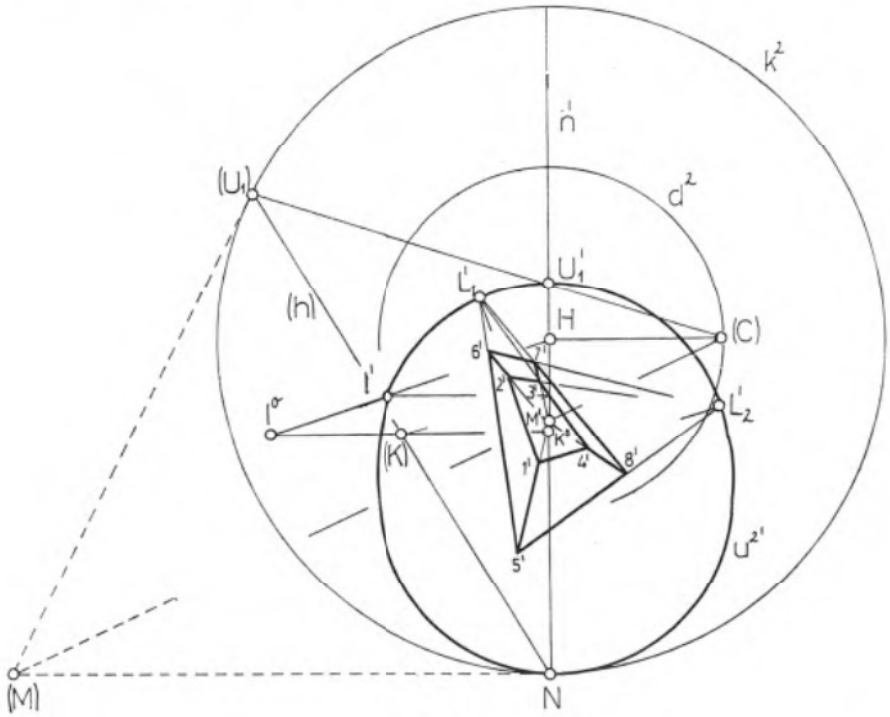


Fig. 13.

Die auf β senkrechten Geraden schneiden sich im M, welcher Pol von β bezüglich von K^2 ist. (M) ist Pol von (h) bezüglich von k^2, in (M) hat man den (idealen) Punkt M um h' in π gedreht. Den (M) projizieren wir aus C zu h' in M'. M' ist das Zentralbild des gemeinsamen Punktes der zu β senkrechten Geraden.

Es sei die in β liegende Grundfläche des Prismas ein Viereck, deren gegenüberliegende Seiten parallel sind. Nehmen wir nach Belieben auf $u^{2'}$ die Zentral-

projektionen der zwei Endpunkte unseres Viereckes L_1' und L_2' an und noch $1'$, und $3'$ die Zentralprojektion seiner Ecke 1 und 3.

Die Geraden $L_1'1'$, $L_1 3'$ und $L_2'1'$, $L_2'3'$ schneiden das Viereck $1'2'3'4'$, das Zentralbild der Grundfläche aus. Es sei die Seitenkante des Prismas senkrecht zu β. Verbinden wir die Punkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ mit M', so bekommen wir die haltenden Geraden der Zentralbilder der Seitekanten. Auf $1'M'$ kann man nach Belieben den Punkt $5'$ aufnehmen, dann kann man mit dem Gebrauch von L_1' und L_2' auch die Punkte $6'$, $7'$, $8'$ bestimmen.[14])

Diese Figur zeigt auch die Konstruktion der *zur Ebene senkrechten Geraden.*

7. *Die Anwendung der stereographischen Projektion*

Es sei $d^2 = k^2$, hier ist C ein Punkt von K^2. In diesem Fall ist die Berührungsebene von K^2 im Punkt C parallel zu π. In diesem Fall ist die Zentralprojektion eine stereographische Projektion.[15]) (Fig. 14)

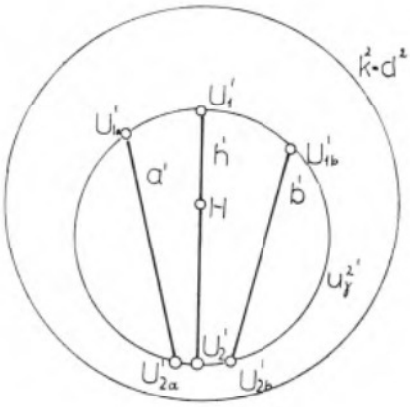


Fig. 14.

Es sei $\gamma(h, U_1, U_2)$ ultraparallel zu π. Bestimmen wir die Zentralprojektion $u_\gamma^{2'}$ ihrer Endkreise u_γ^2. Wegen den stereographischen Projektion ist $u_\gamma^{2'}$ auch Kreis. Nach dem vorhergehenden sind U_1' und U_2' die Endpunkte der Durchmesser von $u^{2'}$, so kann man $u^{2'}$ leicht Zeichnen.

Die Geraden a und b sind in einer Ebene, weil die Zentralprojektionen U'_{1_a}, U'_{2_a} bzw. U'_{1_b}, U'_{2_b} auf dem Kreis $u^{2'}$ sind.

---

[14]) Die Eindeutigkeit von $8'$ sichert die Perspektivität der Dreiecke $4'1'2'$ und $8'5'6'$. Wir stellen das Drahtgerippe des Körpers dar, deshalb geben wir nicht die Sichtbarkeit an.

[15]) Prof. Gy. Strommer macht uns auf die stereographische Projektion aufmerksam. Diese Projektion kann man vielerorts vorteilhaft anwenden.

8. *Die Umlegung der Ebenen in die Bildebene*

Bei der Umlegung führen wir die Ebene mit Kollineation (Bewegung) Π in die Bildebene π Weil Π K^2 in sich führt, gehen die Endpunkte der Ebene in k^2. Wir beschäftigen uns mit allen drei Typen der Ebenen. Als gemeine Eigenschaft heben wir, daß die umgelegten $[n]$ der Hauptlinien n senkrecht zu den umgelegten $[h]$ von h sind, nämlich n und h bzw. $[n]$ und $[h]$ sind konjugiert.

(a) Stellen wir die Ebene α mit Hauptfallinie $h(Q, U_1)$ dar, die Spurlinie von α ist m. Wir drehen h um h' in π ab und bekommen (h) (Fig. 15). Die

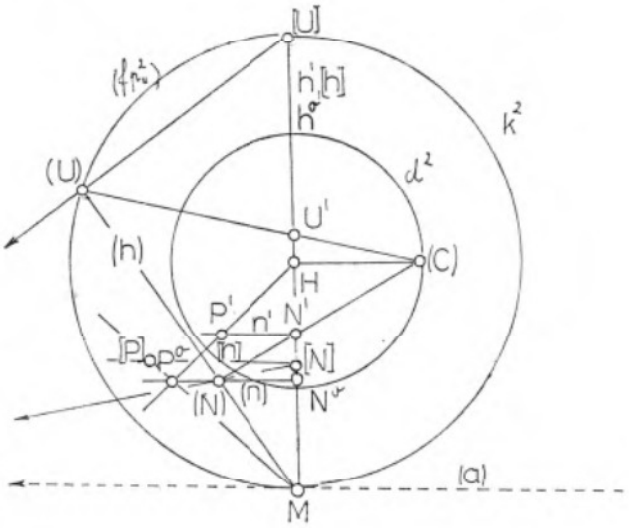


Fig. 15.

abgedrechten Endpunkte der Ebene hh' kommen in k^2. Stellen wir $P(P', P^o)$ von α dar, und konstruieren seinen umgelegten Punkt $[P]$. Die Umlegung geschiet um m so, daß h in h' fällt. Bei Umlegung die Punkte von α beschreiben die Punkte der Ebene Hyperbolischkreise hk^2, deren Ebenen senkrecht zu m sind, das ist sie gehen durch $\overline{m}$, wo $\overline{m}$ konjugierte zu m bezüglich von K^2 ist. In diesem Fall ist $\overline{m} \perp \pi$ und ihre Fußpunkt ist M. Der Mittelpunkt von hk^2 ist auf m. Es folgt aus dieser, daß das orthogonale Bild des zu P gehörigen umgelegten Hyperbolischkreises hk_p^2 auf die $\overline{M}P^o$ fällt und $[P] \in \overline{M}P^o$.

Wie man sah, wenn $n \perp h$, da $[n] \perp [h]$ so ist genug sich mit der Konstruktion der in hh' liegender hk^2 zu befassem. Es schneidet der (hk_N^2), welche um h' in π umgelegt Hyperbolischkreis der durch N gehende hk_N^2 ist, $[N]$ aus h' ab. Nach 5, $(U_1)[u_1]$ und $N[N]$ schneiden sich in q, so ist es nicht nötig die Konstruktion von hk_N^2, es ist genug $[N]$ zu bestimmen. Der durch $[N]$ gehende und zu $[h]$ senkrechte $[n]$ schneidet $[P]$ aus $\overline{M}P^o$ ab.

(b) Wir stellen die π berührende Ebene β mit ihrer Hauptparallelgeraden $h(M, U)$ dar. (Fig. 16). Wir drehen h um h' in π ab und erhalten (h). Die Ebene β legen wir um M in π so um, daß $[h]=h'$ sei. Bei Umlegung beschreiben die Punkte von β die Parazyklen. Diese bezeichnet man mit fp^2. Ihr Mittelpunkt

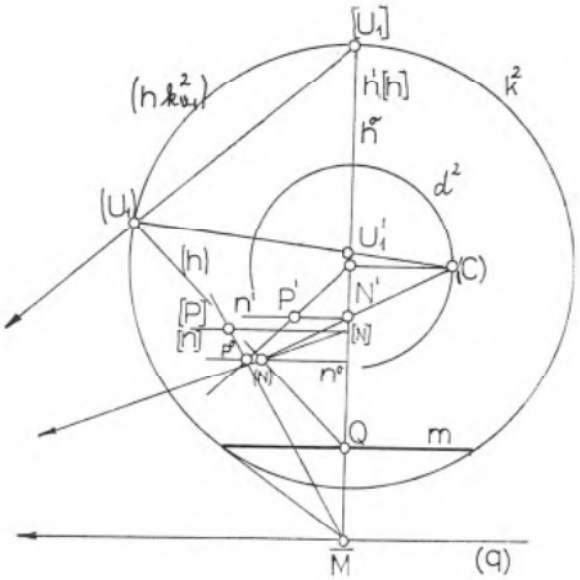


Fig. 16.

ist M und die Grundgerade ist a. Ihre Ebene ist senkrecht zu π im M. Die Abdrechung (fp_u^2) von fp_u^2 ist der k^2, deshalb ist $[U]$ die Umlegung von U. Hier nehmen wir auch in Betracht, daß wenn $n \perp h$, da $[n] \perp [h]$, so ist es genug sich mit der Konstruktion der in hh' gelegenen fp^2 befassen. Bei Konstruktion von $[P]$ schneidet der durch (N) gehende (fp_N^2) aus $[h]$ den Punkt $[N]$ aus und diesen konstruieren wir nach dem Punkt 3). Nach dem Vorigen ist $[n] \perp h$ in $[N]$. Weil fp^2 durch a hindurchgeht, deshalb ist die Ebene von fp^2 senkrecht zu π, ihre orthogonales Bild fällt auf MP^o und $[P]$ ist auch auf derselben. $[P]=[n] \cap \cap MP^o$.

(c) Stellen wir die zu π ultraparellele Ebene γ mit ihrer Hauptultraparallelgeraden $h(U_1, U_2)$ dar. (h) ist die um h' abgedrechte von h (Fig. 17). Konstruieren wir die gemeine Senkrechte m von π und γ. Dann folgt aus der Stellung von π, daß m im euklidischen Sinn auch zu π senkrecht ist. Die Ebene rücken wir mit einer projektiven Transformation längs der m so, daß $[h]$ [16]) in h' fällt. Dabei beschreiben die Punkte von γ Äquidistantenlinien e_p^2, deren m die gemeinsame Grundgerade ist. Weil $m \perp \pi$, deshalb ist die Ebene von e_p^2 senkrecht zu π und $[P] \in M_\pi P^o$. Nehmen wir hier auch in Betracht, daß $n \perp h$, $[n] \perp [h]$ sind, so ist es genug sich mit der Transformation in hh' bzw. in $h'(h)$ zu befassen. Wir bestimmen die Transformation von N im $[N]$ mit Doppelverhältnis $\Delta(\overline{M_\gamma N}) = \Delta((M_\gamma)(N)) = = \Delta(M_\pi[N])((U_1)(U_2)(N)(M_\gamma) = ([U_1][U_2](N)M_\pi))$. $[n] \perp [h]$, $[N] \in [n]$ und $[P] = = [n] \cap M_\pi P^o$.

Aus den Figuren 15, 16, und 17 kann man die Umwendungen der Punkte bestimmen. So kann man auch in gegebenen Ebenen liegende Gebilde z. B. gegebene Kegelschnitte darstellen.

---

[16]) [ ] bedeutet jetzt die Rückung.

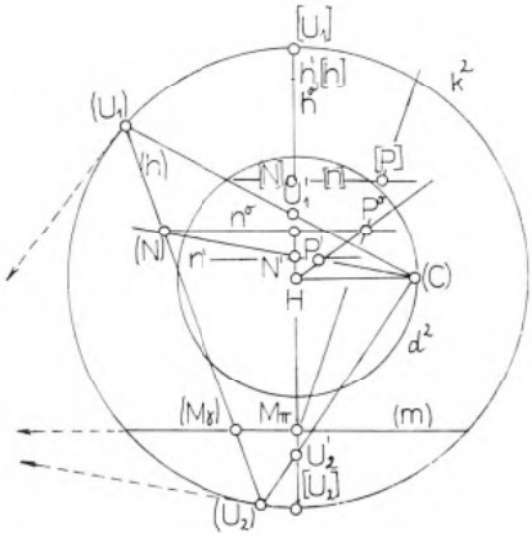


Fig. 17.

9. *Die Konstruktion der Schnittgeraden der zweier Ebenen*

Es sind α mit Spurgerade m und mit Hauptfallinie h und $\beta(\overline{m}, \overline{h})$ gegeben. Die Bilde der in „gleicher Höhe" liegenden Hauptlinien n' bzw. $\overline{n}'$ von α bzw. β schneiden sich in dem Bild M' des Punktes M der Schnittgeraden g von α und β. S ist der Spurpunkt von g (Fig. 18).

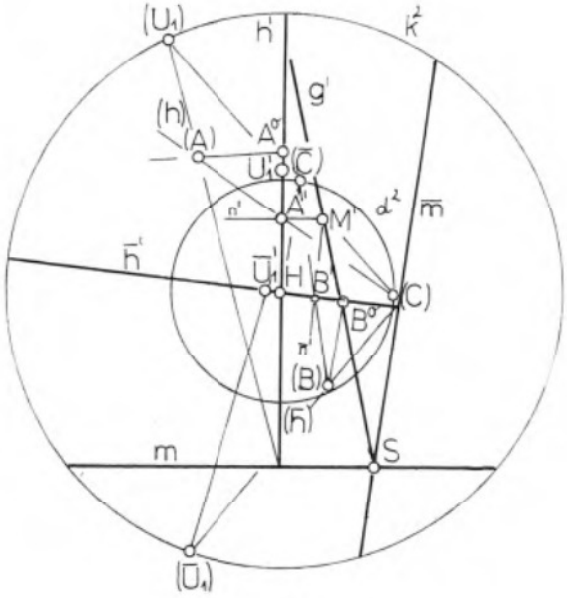


Fig. 18.

10. *Die Konstruktion der Distanz des Punktes und der Ebene*

Nach Figur 13. können wir zu der Ebene Senkrechte stellen und nach Anwendung des 8) kann man den Schnittpunkt der Ebene und der Geraden bestimmen. Über die Konstruktion machen wir keine Zeichung.

Auf Grund der dargestellten Konstruktionen kann man weitere Aufgaben der darstellenden Geometrie im hyperbolischen Modell lösen.

Die Aufgaben der Lage kann man mit den Erwägungen der euklidischen Geometrie lösen. Bei metrischen Aufgaben ist auch die Anwendung der Lehrsätze der hyperbolischen Raumgeometrie nötig.

Literatur

[1] KERÉKJÁRTÓ BÉLA, A geometria alapjairól II. Projektív geometria, Budapest, 1944, *(ungarisch)*.
[2] F. KLEIN, Vorlesungen über nicht Euklidische Geometria, *Berlin,* 1928.
[3] E. MÜLLER, Vorlesungen der darstellenden Geometrie, I. Band. E. KRUPPA, Die linearen Abbildungen, *Leipzig* und *Wien,* 1923.
[4] Н. В. Наумович, Перспективные проекции в гиперболическом пространстве. Труды Московского научно-методического семинара по начертательной геометрии и инженерной графике, выпуск II. *Москва,* 1963.
[5] ZAGORKA ŠNAJDER, Spur- und Fluchtpunktmethode bei Zentralprojektion im hyperbolischen Raum (**17**), 1975, стр. 127—136.

(Eingekommen am 13. Oktober 1980)