

О спектре кольца нормирования

С. Д. Берман—Н. И. Вишнякова (Харьков)

Кольцом нормирования называется ненулевое коммутативное кольцо с единицей, идеалы которого образуют цепь.

В дальнейшем буква R всегда будет обозначать кольцо нормирования.

Любое непустое подмножество идеалов кольца R , очевидно, образует линейно упорядоченное множество относительно теоретико-множественного включения идеалов. Знак $\subset$ всегда будет обозначать строгое включение соответствующих множеств.

В настоящей заметке даётся полная характеристика линейно упорядоченных множеств, изоморфных спектрам колец нормирования, а также путём перехода к спектру кольца определяется минимальная мощность системы образующих произвольного идеала кольца R . Предварительно изучается мультипликативная полугруппа главных идеалов кольца нормирования.

Объединение всех главных идеалов кольца R , порождённых его необратимыми элементами, образует единственный максимальный идеал V в R .

Кольцо R нётерово тогда и только тогда, когда в R нет других простых идеалов, кроме V , и, быть может, нулевого идеала (в последнем случае R целостно).

Пусть S — мультипликативная коммутативная полугруппа с нулем и единицей ($0 \neq 1$). Будем говорить, что S есть полугруппа с сокращением, если из условия $ab = ac \neq 0$ ($a, b, c \in S$) вытекает равенство $b = c$.

Пусть Γ — мультипликативная полугруппа главных идеалов кольца R . Оказывается, тот факт, что R — кольцо нормирования, определяется простыми свойствами полугруппы Γ .

Прежде всего отметим, что Γ есть полугруппа с сокращением. В самом деле, пусть $(a) \cdot (b) = (a) \cdot (c) \neq 0$. Тогда $a(b - c_1) = 0$, где $c_1 = \theta c$, θ — обратимый в R элемент, и $d = b - c_1 \in \text{Ann } a$. Так как $c_1 \notin \text{Ann } a$, то $d = c_1 r$, где $r \in V$. Значит $b = c_1 + c_1 r = c(1 + r)\theta$, и ввиду обратимости элемента $(1 + r)$ выполняется равенство главных идеалов $(b) = (c)$.

Далее в Γ можно определить линейную упорядоченность по делимости: $(a) \leq (b)$, если $b = ad$.

Действительно, так как R — кольцо нормирования, то из любых двух элементов $a, b \in R$ один всегда делится на другой.

Если $(a) \leq (b)$ и $(b) \leq (a)$, то $b = ac_1$, $a = bc_2$, откуда $a = c_1 c_2 a$, и при $a \neq 0$ из свойства сокращения получаем, что $(c_1 c_2) = (1)$, что даёт $(a) = (b)$, и такое же равенство получаем при $a = 0$.

Свойство транзитивности отношения $\leq$ очевидно. Наконец, если $(a) \leq (b)$ и $(c) \leq (d)$, то $(ac) \leq (bd)$, ибо $b = ar_1$, $d = cr_2$ и $bd = ac r_1 r_2$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что линейно упорядоченная по делимости мультипликативная полугруппа есть такая полугруппа S , что из двух элементов $a, b \in S$ один делится на другой и при этом $a=b$, если a делится на b и b делится на a .

Теорема 1. Мультипликативная коммутативная полигруппа S с нулем и единицей ($1 \neq 0$) тогда и только изоморфна мультипликативной полугруппе Γ всех главных идеалов некоторого кольца нормирования R , когда S — линейно упорядоченная по делимости полугруппа с сокращением.

Доказательство. Необходимость условий была доказана выше. Предположим, что полугруппа S удовлетворяет условиям теоремы. Тогда при

$$g_1 \equiv g_3; \quad g_2 \equiv g_4, \quad g_1 g_2 \neq 0 \quad (g_i \in S, i = 1, 2, 3, 4)$$

выполняется строгое неравенство

$$(1) \quad g_1 g_2 < g_3 g_4,$$

если имеет место хотя бы одно из неравенств

$$g_1 < g_3, \quad g_2 < g_4.$$

В самом деле, если $g_3 g_4 = 0$, то неравенство (1) очевидно. Пусть $g_3 g_4 \neq 0$ и, например, $g_1 < g_3$. Тогда

$$g_3 g_4 \equiv g_1 g_4 \equiv g_1 g_2.$$

Так как $g_3 g_4 \neq 0$, то $g_1 g_4 \neq 0$ ($0 > g$ для всех $g \neq 0$, $g \in S$), и в силу свойства сокращения в S

$$g_3 g_4 > g_1 g_4 \equiv g_1 g_2.$$

Пусть K — произвольное поле. Образует алгебру KS полугруппы S над полем K . KS есть линейное пространство над K с базисом $S \setminus \{0\}$, т. е. KS состоит из всевозможных формальных линейных комбинаций

$$\sum_{g \in S} \lambda_g g, \quad \lambda_g \in K, \quad g \in S, \quad g \neq 0,$$

причём нуль пространства KS отождествляется с нулем полугруппы S , а умножение в KS индуцируется по закону дистрибутивности умножением элементов $g \in S$.

Если

$$x = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_r g_r \quad (\lambda_1 \neq 0, \quad g_1 < g_2 < \dots < g_r),$$

то положим

$$N(x) = g_1 \in S,$$

а при $x=0$ будем считать, что $N(x)=0$. Тогда

$$(2) \quad N(xy) = N(x) \cdot N(y) \quad (x, y \in KS).$$

Действительно, пусть $N(x)=g_1$, $N(y)=g_2$, $g_1 g_2 \neq 0$. Тогда из (1) вытекает, что элемент $g_1 g_2$ фактически входит в запись элемента xy , причём $g_1 g_2$ — наименьший из элементов полугруппы S , участвующих в этой записи, т. е. $N(xy) =$

$=N(x) \cdot N(y) = g_1 g_2$. Если же $g_1 g_2 = 0$, то $xy = 0$, $N(xy) = 0$ и снова $N(xy) = N(x) \cdot N(y)$.

Рассмотрим теперь подмножество $M \subset KS$ всевозможных элементов вида

$$(3) \quad m = \lambda_0 \cdot 1 + \sum_{g \in S} \lambda_g g \quad (\lambda_0 \neq 0, g \in S, g \neq 0, 1).$$

Так как для элементов $m \in M$ выполняется равенство $N(m) = 1$, то ввиду (2) M — мультипликативная система в KS .

Обозначим через L кольцо частных кольца KS относительно системы M . Каждый элемент из L записывается в виде $\frac{x}{m}$ ($x \in KS, m \in M$), а отображение $\varphi: x \rightarrow \frac{x}{1}$ является гомоморфизмом KS в L , ядро которого есть объединение аннуляторов всех элементов $m \in M$ в KS .

Но из (2) сразу вытекает, что аннулятор любого элемента $m \in M$ в KS равен нулю. Поэтому φ есть вложение кольца KS в L , и элементы $x \in KS$ можно отождествить с элементами $\frac{x}{1} \in L$.

Очевидно, произвольный элемент $x \in KS$, $x \neq 0$ однозначно записывается в виде

$$(4) \quad x = gm, \quad \text{где} \quad g = N(x), \quad m \in M.$$

В силу (4) для любого элемента $\frac{x}{m} \in L$ ($x \in KS, m \in M$) имеет место равенство главных идеалов кольца L :

$$(5) \quad L \frac{x}{m} = L \cdot N(x).$$

Формула (5) показывает, что каждый главный идеал в кольце L порождается некоторым элементом $g \in S$. Докажем, что различные элементы $g \in S$ порождают различные главные идеалы в L . Действительно, если $Lg_1 = Lg_2$ ($g_1, g_2 \in S$), то $g_1 = \frac{x_2}{m_2} g_2$, $g_2 = \frac{x_1}{m_1} g_1$ ($x_i \in KS, m_i \in M, i = 1, 2$), откуда $m_2 g_1 = x_2 g_2$, $g_2 m_1 = x_1 g_1$, что ввиду (3) и (4) даёт в S равенства:

$$g_1 = N(x_2) g_2; \quad g_2 = N(x_1) \cdot g_1,$$

и так как полугруппа S линейно упорядочена по делимости, то $g_1 = g_2$.

Теперь формула (5) показывает, что L — кольцо нормирования (из двух элементов полугруппы S один всегда делится на другой) и что отображение $Lg \rightarrow g$ является изоморфизмом мультипликативной полугруппы главных идеалов кольца L на полугруппу S . Теорема доказана.

Замечание. В случае целостного кольца R теорема 1 может быть доказана более просто путём использования известных результатов о нормированиях полей [1].

Лемма 1. Идеал $P \neq 0$, R кольца нормирования R тогда и только тогда является простым, когда для всех $a \notin P$ ($a \in R$) выполняется равенство $aP = P$.

Доказательство. Пусть P — простой идеал в R . Если $a \notin P$, то $P \subset (a)$ и для любого элемента $p \in P$ выполняется равенство $p = ap_1$, где $p_1 \in P$, ибо P — простой идеал. Следовательно, $P \subseteq aP$ и тогда $P = aP$.

Наоборот, пусть $P \neq 0$, R и $aP = P$ для всех $a \notin P$. Пусть $a, b \notin P$. Тогда $abP = a(bP) = aP = P$. Отсюда сразу следует, что $ab \notin P$, т. е. P — простой идеал.

Следствие 1. Пусть $P_1, P_2 (P_1 \subset P_2)$ — простые идеалы кольца R . Тогда существует такой элемент $a \in R$, что имеют место строгие включения

$$P_1 \subset (a) \subset P_2.$$

Доказательство. Пусть V — максимальный идеал в R . Предположим, что утверждение следствия несправедливо. Тогда P_1 — максимальный идеал в P_2 и, следовательно, $P_2 = (b)$ — главный идеал в R и $P_1 = bV$. Если $P_1 = 0$, то R — целостно, что даёт противоречие. Значит $P_1 \neq 0$. Так как $b \notin P_1$, то по лемме 1 $bP_1 = P_1$ или $0 \subset bV = b^2V$, что основа ведёт к противоречию, ибо $(b^2) \subset bV$ и $b^2V \subset (b^2)$. Утверждение доказано.

Следствие 2. Пусть $a \in V$ — нильпотентный элемент. Тогда

$$P = \bigcap_{i=1}^{\infty} (a^i)$$

есть простой идеал кольца R .

Доказательство. Предположим сначала, что $P \neq 0$. Это условие всегда выполняется для нецелостного кольца R , ибо в этом случае каждый из идеалов (a^n) ($n=1, 2, \dots$) содержит нильрадикал кольца R . Положим $S = R \setminus P$. Так как $(a^n) \supset (a^{n+1})$ ($n=1, 2, \dots$), то S состоит из всевозможных делителей всех элементов a^n ($n=1, 2, \dots$). Пусть $b \in P$, $b \neq 0$. Тогда $b = a^n b_1 = a^{n+1} b_2$ для любого элемента a^n , откуда $b_1 = ab_2 \in P$, т. е. $P = a^n P$ ($n=1, 2, \dots$), а тогда $P = cP$ для всех $c \in S$. В силу леммы 1 заключаем, что P — простой идеал.

Остаётся рассмотреть случай, когда $P = 0$. Тогда R — целостное кольцо, а 0 является простым идеалом такого кольца. Следствие доказано.

Замечание 2. Главный идеал $(a) \neq 0$ в R прост тогда и только тогда, когда он максимален. Этот факт сразу вытекает из леммы 1 и допускает весьма простое прямое доказательство.

Пусть по-прежнему R — кольцо нормирования, а Γ — мультипликативная полугруппа главных идеалов этого кольца. Очевидно, каждый идеал I в R определяет идеал I' в Γ (этот идеал есть множество всех главных идеалов, порождённых элементами из I). Наоборот, если I' — идеал в Γ , то объединение элементов кольца R , принадлежащих идеалам из множества I' , является идеалом I в R . При этом идеал I кольца R простой тогда и только тогда, когда соответствующий идеал I' простой в полугруппе Γ .

Замечание 3. Лемма 1 остаётся справедливой, если вместо кольца R и его идеала P рассматривать мультипликативную полугруппу главных идеалов Γ кольца R и идеал $P \neq 0$, Γ этой полугруппы.

Утверждение замечания 3 сразу следует из отмеченного выше соответствия между идеалами кольца R и идеалами полугруппы Γ .

Используем теперь некоторые обозначения и определения из [2] и [3].

Пусть $I \neq 0$ — идеал в R . Положим $S(I) = \{a \in R, aI = I\}$. Множество $S(I)$, которое мы будем называть стабилизатором идеала I , есть мультипликативная система в R , а дополнение $R \setminus S(I)$ является простым идеалом в R , который мы будем обозначать через $P(I)$. Пусть $P = P(I)$. Идеал $I \neq 0$ назовём P -главным, если существует такой элемент $a \in I, a \neq 0$, что I есть объединение всех главных идеалов вида $\left(\frac{a}{r}\right), r \in S(I)$. (Обозначение $I = (a)_P$.)

Если $P = P(I)$, то идеал I является объединением P -главных идеалов (a_p) , порождённых ненулевыми элементами $a \in I$.

В силу леммы 1 идеал $I \neq 0$ простой тогда и только тогда, когда $P(I) = I$.

Если $I = (a)_P$ — P -главный идеал, то гомоморфный образ $\bar{I}$ идеала I в кольце частных R_P есть главный идеал кольца R_P (быть может, нулевой).

Пусть M — линейно упорядоченное множество и $a, b \in M, a < b$. Пару (a, b) будем называть интервалом в M . Интервалы (a_1, b_1) и (a_2, b_2) будем считать равными тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2, b_1 = b_2$. Интервал (a, b) назовём минимальным, если в M не существует элементов c , удовлетворяющих условию $a < c < b$.

Определение 1. Линейно упорядоченное множество M назовём полным нигде не плотным в себе множеством, если одновременно выполняются следующие условия:

1) Каждое непустое подмножество M_1 множества M имеет точную верхнюю и точную нижнюю грань (обозначения: $\sup M_1, \inf M_1$).

2) Для любого интервала (a, b) в M существует такой минимальный интервал (c, d) , что $a \leq c < d \leq b$.

В дальнейшем буква M всегда будет обозначать полное нигде не плотное в себе линейно упорядоченное множество.

В силу свойства 1 определения 1 множество M имеет минимальный элемент m_1 и максимальный элемент m_2 .

Пусть $A = \{(a_\alpha, b_\alpha)\}$ — множество всех различных минимальных интервалов множества M , пополненное двумя символическими интервалами $(-\infty, m_1)$ и (m_2, ∞) , где α пробегает некоторое множество индексов $\mathfrak{A}$. По определению будем считать, что символ $-\infty$ предшествует всем элементам множества M и все элементы этого множества предшествуют символу ∞ . Будем называть $a_\alpha (b_\alpha)$ соответственно левым (правым) концом интервала $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$.

Лемма 2. Пусть $a \in M$. Тогда $a = \sup b_\alpha, b_\alpha \leq a, (a_\alpha, b_\alpha) \in A, a = \inf a_\alpha, a_\alpha \leq a, (a_\alpha, b_\alpha) \in A$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что множество интервалов $(a_\alpha, b_\alpha) \in A, b_\alpha \leq a$ непусто, так как оно содержит, например, интервал $(-\infty, m_1)$. Пусть $\bar{a} = \sup b_\alpha, b_\alpha \leq a, (a_\alpha, b_\alpha) \in A$. Предположим, что $\bar{a} < a$. Тогда, в силу свойства 2) определения 1, существует такой минимальный интервал (c, d) , что $\bar{a} \leq c < d \leq a$, а это противоречит определению элемента $\bar{a}$. Значит $\bar{a} = a$. Аналогично доказывается второе утверждение леммы.

Ввиду леммы 2 для элемента $a \in M$ обозначим через $\tau_l(a)$ ($\tau_r(a)$) наименьшее из таких кардинальных чисел τ , что a есть точная верхняя (нижняя) грань множества $\{b_\alpha\}$ (множества $\{a_\alpha\}$) мощности τ , где $b_\alpha(a)$ — правые (левые) концы минимальных интервалов. В частности, равенство $\tau_l(a)=1$ ($\tau_r(a)=1$) означает, что элемент $a \in M$ есть правый (левый) конец минимального интервала.

Заметим теперь, что интервалы $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$ естественным способом образуют линейно упорядоченное множество в силу следующего определения:

$$(6) \quad (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \equiv (a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}),$$

если $b_{\alpha_1} \leq a_{\alpha_2}$.

В самом деле, для двух интервалов $(a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1})$, $(a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2})$ либо $b_{\alpha_1} \leq a_{\alpha_2}$, либо $b_{\alpha_2} \leq a_{\alpha_1}$, причём из условий $b_{\alpha_1} \leq a_{\alpha_2}$ и $b_{\alpha_2} \leq a_{\alpha_1}$ вытекает равенство $(a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) = (a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2})$. Далее очевидным образом имеет место транзитивность введённого нами отношения $\equiv$ для интервалов $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$.

Ясно, что линейная упорядоченность интервалов $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$ тривиально переносится на множество индексов $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$, взаимно однозначно соответствующих этим интервалам.

Лемма 3. *Спектр $\mathfrak{M}$ кольца нормирования R является полным нигде не плотным в себе линейно упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения простых идеалов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — спектр кольца нормирования R , а $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ — произвольное непустое подмножество. Обозначим через $P_1(P_2)$ пересечение (объединение) всех простых идеалов из $\mathfrak{M}_1$. Тогда $P_1 \in \mathfrak{M}$ — точная нижняя грань, а $P_2 \in \mathfrak{M}$ — точная верхняя грань множества $\mathfrak{M}_1$. (Пересечение простых идеалов произвольного коммутативного кольца T не является, вообще говоря, простым идеалом в T , но это так, если T — кольцо нормирования.)

Пусть $P, Q \in \mathfrak{M}$, $P \subset Q$. Тогда согласно следствию 1 из леммы 1 существует такой элемент $a \in R$, что $P \subset (a) \subset Q$ (строгое включение). Из замечания 1 к лемме 1 следует, что (a) — не простой идеал в R .

Обозначим через P_1 объединение всех простых идеалов кольца R , содержащихся в (a) , а через P_2 — пересечение всех простых идеалов R , содержащих (a) . Тогда $P_1 \subset (a) \subset P_2$, ибо по доказанному идеал (a) не прост.

Пусть P — произвольный простой идеал, удовлетворяющий условию $P_1 \subset P \subset P_2$. Если $P \subseteq (a)$, то $P = P_1$, а если $P \supseteq (a)$, то $P = P_2$. Следовательно, (P_1, P_2) — минимальный интервал в $\mathfrak{M}$.

Лемма 4. (Гёльдср—Клиффорд [4]) *Каждая коммутативная линейно упорядоченная по делимости архимедова полугруппа S изоморфна полугруппе одной из следующих трёх полугрупп:*

- 1) D_1 — аддитивная полугруппа всех неотрицательных вещественных чисел.
- 2) D_2 — все вещественные числа отрезка $[0, 1]$ с обычной упорядоченностью и операцией $ab = \min(a+b, 1)$.
- 3) D_3 — все вещественные числа отрезка $[0, 1]$ с обычной упорядоченностью

и символ ∞ , где операция задаётся так:

$$ab = a + b, \text{ если } a + b \leq 1, \text{ и } ab = \infty, \text{ если } a + b > 1.$$

Лемма 5. Пусть (P, Q) — минимальный интервал в спектре кольца R . Тогда для любого элемента $a \in R$, $P \subset (a) \subseteq Q$ выполняется равенство

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a^n) = P.$$

Доказательство. Так как P — простой идеал, то $a^n \neq 0$ для всех натуральных чисел n . Положим $P_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a^n)$. В силу следствия 2 из леммы 1 идеал P_1 — простой. Так как $P \subseteq P_1 \subset (a)$ и (P, Q) — минимальный интервал в спектре, то $P_1 = P$. Лемма доказана.

Кольцо R называется примарным, если максимальный идеал V кольца является его единственным ненулевым простым идеалом.

Лемма 6. Пусть R — примарное кольцо, а S — мультипликативная полугруппа всех ненулевых (всех) главных идеалов кольца R , если R целостно (нецелостно). Тогда S — линейно упорядоченная по делимости архимедова полугруппа.

Доказательство. По теореме 1 S — линейно упорядоченная по делимости полугруппа: $(a) \leq (b)$, если $b = ac$. Покажем, что в S выполняется аксиома Архимеда. Пусть $a, b \in V$ и $(a) < (b)$. Если R нецелостно, то V — нильрадикал R и для некоторого натурального n имеем $a^n = 0$, откуда $(a^n) \geq (b)$. Пусть R — целостно. Тогда $(0, V)$ — минимальный интервал в спектре R и по лемме 5 $0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a^n)$. Следовательно, $(a^n) \geq (b)$ для некоторого натурального n , т. е. $(a)^n \geq (b)$, что доказывает утверждение.

Следствие. Пусть R — примарное кольцо нормирования. Тогда из каждого бесконечного множества главных идеалов $\{(a_\alpha)\}$ в R можно выделить такое счётное подмножество $\{(a_{\gamma_i})\}$ ($i = 1, 2, \dots$), что для каждого (a_α) существует идеал (a_{γ_j}) , удовлетворяющий условию $(a_\alpha) \leq (a_{\gamma_j})$.

Доказательство. Обозначим через S мультипликативную полугруппу всех ненулевых (всех) главных идеалов кольца R , если R целостно (нецелостно). В силу лемм 4 и 6 полугруппа S изоморфна подполугруппе одной из полугрупп D_1, D_2, D_3 , указанных в лемме 4. Из геометрической интерпретации этих полугрупп непосредственно следует, что в каждой полугруппе D_i из любого бесконечного подмножества элементов $\{\lambda_\alpha\}$ можно выделить такое счётное подмножество $\{\lambda_{\gamma_i}\}$ ($i = 1, 2, \dots$), что для любого λ_α найдётся такой элемент λ_{γ_i} , что $\lambda_{\gamma_i} \geq \lambda_\alpha$. Предложение доказано.

Пусть I — идеал в R . Обозначим через $\tau(I)$ такое кардинальное число, что I обладает множеством образующих мощности $\tau(I)$ и не имеет системы образующих меньшей мощности. Пусть, как обычно, $\aleph_0$ обозначает мощность счётного множества.

Теорема 2. Пусть R — нётерово кольцо, I — неглавый идеал в R и $P = P(I)$. Тогда.

$$\tau(I) = \begin{cases} \aleph_0, & \text{если } I \text{ есть } P\text{-главный идеал и } \tau_r(P) = 1 \text{ или если } I \text{ — не} \\ & P\text{-главный идеал и } \tau_l(P) = 1. \\ \tau_r(P), & \text{если } \tau_r(P) > 1 \text{ и } I \text{ есть } P\text{-главный идеал.} \\ \tau_l(P), & \text{если } \tau_l(P) > 1 \text{ и } P \text{ не является } P\text{-главным идеалом.} \end{cases}$$

Доказательство. 1) Предположим, что I есть P -главный идеал и $\tau_r(P) = \tau$. Рассмотрим сначала случай, когда $\tau_r(P) > 1$, т. е. P не является левым концом минимального интервала в спектре R . Тогда

$$(7) \quad P = \bigcap_{\alpha} P_{\alpha},$$

где α пробегает линейно упорядоченное множество $\mathfrak{A}$ индексов мощности τ , а идеалы $P_{\alpha} \supset P$ — левые концы минимальных интервалов (P_{α}, Q_{α}) , взаимно однозначно соответствующие индексам α . При этом $P_{\alpha_1} \subset P_{\alpha_2}$, если $\alpha_1 < \alpha_2$. В силу следствия 1 из леммы 1 для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует такой главный идеал $(a_{\alpha}) \subset R$, что

$$(8) \quad P \subset (a_{\alpha}) \subset P_{\alpha}.$$

Тогда из (7) следует, что

$$(9) \quad P = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} (a_{\alpha}), \quad (a_{\alpha}) \supset P.$$

Так как I является P -главным идеалом, то I есть объединение всех главных идеалов вида $\left(\frac{a}{r}\right)$, где $a \neq 0$ — фиксированный элемент идеала I , а r пробегает $S(I) = R \setminus P$. Ввиду (9), для каждого $r \in S(I)$ существует такой элемент a_{α} , что $(a_{\alpha}) \subset (r)$ и тогда

$$(10) \quad \left(\frac{a}{r}\right) \subset \left(\frac{a}{a_{\alpha}}\right).$$

Значит, идеал I имеет систему образующих $\left\{\frac{a}{a_{\alpha}}\right\} (\alpha \in \mathfrak{A})$ мощности τ . Покажем, что I не обладает множеством образующих меньшей мощности. Действительно, предположим, что I имеет множество образующих мощности $\tau_1 < \tau$. Тогда из (10) вытекает, что из множества $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ можно выделить такое подмножество $\mathfrak{A}_1 = \{\gamma\}$ мощности τ_1 , что элементы $\left\{\frac{a}{a_{\gamma}}\right\}$ порождают идеал I . Положим $I' = \bigcap_{\gamma \in \mathfrak{A}_1} (a_{\gamma})$. В силу (8), для каждого $a_{\gamma}, \gamma \in \mathfrak{A}_1$ существует такой простой идеал $P_{i_{\gamma}} (i_{\gamma} \in \mathfrak{A}_1)$, что $P \subset P_{i_{\gamma}} \subset (a_{\gamma})$. Если $I' = P$, то $P = \bigcap_{\gamma \in \mathfrak{A}_1} P_{i_{\gamma}}$, что противоречит равенству $\tau_r(P) = \tau$. Значит, $P \subset I'$ и существует такой простой идеал P_{α_0} , участвующий в (7), что

$$P \subset P_{\alpha_0} \subset I'.$$

Теперь на основании (8) получим, что

$$(11) \quad (a_{\alpha_0}) \subset (a_\gamma) \quad \text{для всех } \gamma \in \mathfrak{A}_1.$$

С другой стороны, $\frac{a}{a_{\alpha_0}} \in I$ и так как $\left\{\frac{a}{a_\gamma}\right\}$ — система образующих идеала I , то для некоторого $\gamma_0 \in \mathfrak{A}_1$ имеем $\left(\frac{a}{a_{\alpha_0}}\right) \subseteq \left(\frac{a}{a_{\gamma_0}}\right)$, откуда

$$(12) \quad (a_{\alpha_0}) \supseteq (a_{\gamma_0}).$$

Соотношения (11) и (12) дают противоречие.

Итак, если идеал $P = P(I)$ не является левым концом минимального интервала в спектре кольца R , то $\tau(I) = \tau_r(P)$.

Предположим теперь, что P — левый конец минимального интервала (P, Q) . Тогда ввиду леммы 5 идеал P представляется в виде пересечения счётного числа главных идеалов $P = \bigcap_{i=1}^{\infty} (a_i)$ и, значит, идеал I имеет счётную систему образующих $\left\{\frac{a}{a_i}\right\}$.

2) Предположим теперь, что I не является P -главным идеалом. Изучим сначала случай, когда идеал P не является правым концом минимального интервала в спектре R . Пусть $\tau_l(P) = \tau$. Тогда

$$(13) \quad P = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} Q_\alpha,$$

где Q_α пробегает правые концы минимальных интервалов спектра, линейно упорядоченные по включению, а индекс α — соответствующее линейно упорядоченное множество $\mathfrak{A}$. При этом для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$

$$(14) \quad Q_\alpha \subset P, \quad Q_{\alpha_1} \subset Q_{\alpha_2}, \quad \text{при } \alpha_1 < \alpha_2.$$

Для каждого фиксированного $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует такой элемент $a_\alpha \in I$, что для всех $(a) \supset (a_\alpha)$, $a \in I$

$$(15) \quad a = b_\alpha a_\alpha, \quad \text{где } Q_\alpha \subset (b_\alpha) \subset P.$$

В самом деле, в противном случае каждый элемент $a \in I$ имеет вид $a = bc$, где $b \in Q_\alpha$, откуда вытекает, что каждый элемент $d \notin Q_\alpha$ принадлежит стабилизатору $S(I)$, а это в силу (14) противоречит равенству $S(I) = P$. Из (14) и (15) сразу следует, что множество $\{a_\alpha\}$ ($\alpha \in \mathfrak{A}$) мощности τ порождает идеал I . Покажем, что I не обладает множеством образующих меньшей мощности. В самом деле, если I обладает системой образующих мощности $\tau_1 < \tau$, то, очевидно, из множества $\{a_\alpha\}$ можно выделить подмножество $\{a_\gamma\}$ мощности τ_1 , порождающее идеал I , где индекс γ пробегает подмножество $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$. Положим $Q = \bigcup_{\gamma \in \mathfrak{A}_1} P_\gamma$. Тогда $Q \subset P$, ибо $\tau_l(P) = \tau > \tau_1$. В силу (13) и (14) существует такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $Q \subset P_{\alpha_0} \subset P$, откуда в силу (15)

$$(16) \quad a_\gamma = b_\gamma a_{\alpha_0}$$

для всех $\gamma \in \mathfrak{U}_1$, где

$$(17) \quad P_{a_\gamma} \subset (b_\gamma) \subset P.$$

С другой стороны, так как множество $\{a_\gamma\}$, $\gamma \in \mathfrak{U}_1$ порождает идеал I , для некоторого $\gamma_0 \in \mathfrak{U}_1$ выполняется равенство

$$(18) \quad a_\alpha = c \cdot a_{\gamma_0}.$$

Ввиду (16) и (18) $a_{\gamma_0} = b_{\gamma_0} c a_{\gamma_0}$ и, значит, b_{γ_0} — обрратимый в R элемент, что противоречит (17). Итак, $\tau(I) = \tau_l(P)$.

Рассмотрим в заключение второй случай, когда $P = P(I)$ правый конец минимального интервала (P_1, P) . Покажем, что в этом случае идеал I обладает счётной системой образующих. Прежде всего заметим, что идеал I содержит такой элемент a , что для всех $(b) \supset (a)$, $b \in I$ имеем $a = cb$, где $c \notin P_1$. В противном случае $R \setminus P_1 \in S(I) = R \setminus P$, что невозможно. Фиксируем такой элемент $a \in I$. Тогда для любых элементов $c, d \in I$ таких, что $(d) \supset (c) \supseteq (a)$ имеем $c = dt$, где $t \notin P_1$. Далее, для любого элемента $b \in I$ найдётся такой элемент $c \in I$, $(b) \supset (c)$, что $b = dc$, где $d \notin P$. Действительно, если для всех $(c) \supset (b)$ выполняется равенство $b = dc$, где $d \notin P$, то I есть P -главный идеал $(b)_P$, порождённый элементом b , а это противоречит условию. Из предыдущих замечаний следует, что I можно представить в виде объединения трансфинитной возрастающей последовательности главных идеалов

$$(a) \subset (a_1) \subset \dots$$

где

$$(19) \quad a_\alpha = c_{\alpha, \beta} a_\beta, \quad P_1 \subset (c_{\alpha, \beta}) \subset P \quad \text{при} \quad (a_\alpha) \subset (a_\beta).$$

Пусть $a = d_\alpha a_\alpha$. Тогда

$$(20) \quad (d_1) \supset (d_2) \supset \dots$$

Если $\alpha < \beta$, то ввиду (19) $a = d_\alpha a_\alpha = d_\alpha c_{\alpha, \beta} a_\beta$, откуда

$$(21) \quad d_\beta = d_\alpha \cdot c_{\alpha, \beta}, \quad c_{\alpha, \beta} \in Q.$$

Из (20) и (21) вытекает, что

$$(22) \quad (d_1)_P \supset (d_2)_P \supset \dots,$$

где $(d_\alpha)_P$ — P -главный идеал, порождённый элементом d_α .

Пусть R_P — кольцо частных кольца R относительно идеала P , а $\bar{P}$, $\bar{P}_1$, $(\bar{d}_\alpha)$ — соответственно образы идеалов P , P_1 , $(d_\alpha)_P$ в R_P . Вследствие (22)

$$(23) \quad (\bar{d}_1) \supset (\bar{d}_2) \supset \dots$$

Так как $\bar{P}$ — максимальный идеал в R_P , то кольцо R_P примарно, и в силу следствия из леммы 6 существует такая счётная убывающая подпоследовательность

$$(\bar{d}_{\gamma_1}) \supset (\bar{d}_{\gamma_2}) \supset \dots$$

трансфинитной последовательности (23), что $(\bar{d}_\alpha) \supset (\bar{d}_{\gamma_j})$ для каждого идеала $(\bar{d}_\alpha)$ и некоторого идеала $(\bar{d}_{\gamma_j})$, зависящего от $(\bar{d}_\alpha)$. Теперь нетрудно видеть, что счётное множество элементов $\{a_{\gamma_i}\}$, $a = d_{\gamma_i} a_{\gamma_i}$ (см. (19)) порождает идеал I , т. е. $\tau(I)$ — счётная мощность. Теорема доказана.

Замечание. Пусть P — такой простой идеал кольца R , что $\tau_i(P) > 1$. Тогда $\tau(P) = \tau_i(P)$. Это сразу следует из того, что для любого элемента $a \in P$ существует такой простой идеал Q , что $(a) \subset Q \subset P$, и из того, что $\tau_i(P) > 1$.

Теорема 3. *Линейно упорядоченное множество M тогда и только тогда изоморфно спектру некоторого кольца нормирования, когда M — полное нигде не плотное в себе множество. При этом существует как целостное, так и нецелостное кольцо нормирования R , спектр которого изоморфен множеству M .*

Доказательство. Лемма 3 доказывает необходимость условия теоремы. Установим его достаточность.

Пусть M — полное нигде не плотное в себе множество. Как и выше будем обозначать через m_2 (m_1) максимальный (минимальный) элемент множества M . Если $m_1 = m_2$, то M состоит из одного элемента. Легко построить целостные и нецелостные кольца нормирования R , спектр которых содержит точно один простой идеал. Среди целостных колец такими кольцами являются только поля, а среди нецелостных — примарные кольца нормирования, максимальный идеал которых есть нильидеал. Примерами последних являются групповая алгебра конечной циклической p -группы (нётсорово кольцо) или групповая алгебра группы типа p^∞ (ненётсорово кольцо) над полем характеристики p .

В дальнейшем мы можем предполагать, что M состоит более чем из одного элемента. В этом случае в силу свойства 2) определения 1 в M обязательно имеются минимальные интервалы. Пусть $A_1 = \{(a_\alpha, b_\alpha)\}$ — множество всех минимальных интервалов множества M , дополненное символическим интервалом $(-\infty, m_1)$. Тогда по-прежнему можно считать, что индексы α , взаимно однозначно соответствующие интервалам $(a_\alpha, b_\alpha) \in A_1$, образуют линейно упорядоченное множество $\mathfrak{A}_1$, причём при $\alpha_1 < \alpha_2$ имеем $a_{\alpha_1} < b_{\alpha_1} \leq a_{\alpha_2} < b_{\alpha_2}$.

Пусть интервалу $(-\infty, m_1)$ соответствует индекс $\gamma_0 \in \mathfrak{A}_1$. Тогда γ_0 наименьший элемент множества $\mathfrak{A}_1$. Сопоставим каждому элементу $\alpha \in \mathfrak{A}_1$, $\alpha \neq \gamma_0$, произвольную ненулевую подгруппу G_α аддитивной группы Q всех вещественных чисел, а индексу γ_0 — мультипликативную полугруппу G_{γ_0} , которая удовлетворяет условиям теоремы 1 и все элементы которой, отличные от 1, нильпотентны. В качестве G_{γ_0} можно взять, например, конечную нильполугруппу

$$\{a^0 = 1, a, \dots, a^{n-1}, a^n = 0\}$$

($n \geq 1$ — показатель нильпотентности элемента a) с присоединенной единицей.

Собозначим через G_α^+ ($\alpha > \gamma_0$) полугруппу всех положительных элементов группы G_α и положим $G_{\gamma_0}^+ = G_{\gamma_0}$. Заметим, что G_α ($\alpha > \gamma_0$) — линейно упорядоченные группы, а G_α^+ -линейно упорядоченные по делимости полугруппы с сокращением.

Условимся теперь записывать групповую операцию в группе G_α ($\alpha \neq \gamma_0$) мультипликативно и образуем прямое произведение

$$(24) \quad \hat{G} = G_{\gamma_0} \times H, \quad \text{где} \quad H = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}_1, \alpha \neq \gamma_0} G_\alpha$$

Элементы полугруппы $\hat{G}$ вида $0 \cdot h$, $h \in H$, очевидно, образуют идеал I в $\hat{G}$. Сбозначим через G фактор-группу Рисса $\hat{G}/I$ по этому идеалу. Тогда можно

считать, что

$$G = \{fh \in \hat{G} \ (h \in H, f \in G_\gamma, f \neq 0), 0\},$$

где 0 — нуль полугруппы G .

Каждый элемент $g \in G$, $g \neq 0, 1$ однозначно записывается в виде произведения

$$(25) \quad g = g_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot g_{\alpha_r} \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r).$$

где $1 \neq g_{\alpha_j} \in G_{\alpha_j}$ ($j=1, \dots, r$), $g_{\alpha_1} \in G_{\alpha_1}^+$, $g_{\alpha_1} \neq 0$ при $\alpha_1 = \gamma_0$.

Будем называть элементы $g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_r}$ соответственно первой, ... r -ой компонентами элемента g , а число r компонент g обозначать через $l(g)$. Если $g=0, 1$, то будем считать, что $l(g)=1$ и g совпадает с своей первой компонентой.

Пусть S — подмножество полугруппы G , содержащее 0 и 1, а также все элементы $g \neq 0, 1$ вида (25), где $g_{\alpha_1} \in G_{\alpha_1}^+$. Если $G_{\gamma_0} = \{0, 1\}$, то все ненулевые элементы S лежат в H . Легко проверить, что S — подполугруппа полугруппы G .

Из того, что каждая из полугрупп G_α^+ , G_{γ_0} есть полугруппа с сокращением и G_α ($\alpha > \gamma_0$) суть группы, сразу вытекает, что S — полугруппа с сокращением.

Заметим далее, что для любых двух элементов, $t_1, t_2 \in G_\alpha$ ($\alpha \in \mathfrak{A}_1$) всегда выполняется одна из равенств $t_1 = t_2 t'$, $t_2 = t_1 t''$, где $t', t'' \in G_\alpha^+$. Возьмём любые два элемента $g, f \in S$ вида (25):

$$g = g_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot g_{\alpha_n}, \quad f = f_{\beta_1} \cdot \dots \cdot f_{\beta_m}.$$

Если $\alpha_1 < \beta_1$, то $g = ft, t \in S$. Пусть $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_r = \beta_r$ и

$$g_{\alpha_1} = f_{\beta_1}, \dots, g_{\alpha_r} = f_{\beta_r}.$$

Если $r < n \leq m$ и $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$ или если $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$, но в $G_{\alpha_{n+1}}$ выполняется равенство $g_{\alpha_{n+1}} = f_{\alpha_{n+1}} t', t' \in G_{\alpha_{n+1}}^+$, то $g = ft, t \in S$. Наконец, если $r = n \leq m$ и $g_{\alpha_i} = f_{\alpha_i}$ ($i=1, \dots, n$), то $g = f$ при $n = m$ и $g = ft_1, f = gt_2$ ($t_1, t_2 \in S$), если $n < m$ и соответственно $f_{\beta_{n+1}} \notin G_{\beta_{n+1}}^+, f_{\beta_{n+1}} \in G_{\beta_{n+1}}^+$. Из этих рассуждений следует, что из двух элементов, $g, f \in S$ один всегда делится на другой, причём $g = f$, если g делится на f , а f делится на g . Ввиду замечания 1 теперь заключаем, что S — линейно упорядоченная по делимости полугруппа с сокращением.

Покажем, что множество всех простых идеалов полугруппы S как линейно упорядоченное множество изоморфно множеству M .

Пусть b — произвольный элемент множества M . Ввиду леммы 2

$$(27) \quad b = \sup_{\alpha} b_{\alpha}, \quad b_{\alpha} \leq b, \quad (a_{\alpha}, b_{\alpha}) \in A_1.$$

Обозначим через P_b подмножество полугруппы S , состоящее из нуля и всевозможных элементов $g = g_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot g_{\alpha_r}$ вида (25), где для индекса $\alpha_1 \in \mathfrak{A}_1$ существует такой индекс $\alpha \in \mathfrak{A}_1$, что выполняется (27) и $\alpha_1 \leq \alpha$. Тогда P_b — простой идеал в S . В самом деле, произведение любого элемента из P_b на произвольный элемент из S , очевидно, снова лежит в P_b . Пусть $f \in S, gf \notin P_b, f \neq 1$. Тогда $f = f_{\beta_1} \cdot \dots \cdot f_{\beta_t}$, где $\beta_1 \in \mathfrak{A}_1$ — такой индекс, что $\beta_1 > \alpha$ для всех индексов α , удовлетворяющих (27). Следовательно, произвольный элемент $g \in P_b$ делится в S на элемент f , причём $g = ft$, где $t \in P_b$.

Таким образом, $P_b = fP_b$ для всех $f \notin P_b$, что в силу леммы 1 и замечания 3 к ней доказывает простоту идеала P_b при $P_b \neq 0$. Заметим, что идеал P_b

— нулевой тогда и только тогда, когда b — минимальный элемент множества M и $G_{\gamma_0} = \{0, 1\}$. Тогда все ненулевые элементы полугруппы S лежат в группе H и образуют мультипликативную систему. Следовательно, и в этом случае $P_0 = 0$ — простой идеал в S .

Пусть $b, c \in M$, $b < c$. Тогда для некоторого минимального интервала $(a_\alpha, b_\alpha) \in A_1$, $b \leq a_\alpha < b_\alpha \leq c$. Следовательно, идеал P_c содержит элемент вида

$$g_\alpha g_{\alpha_2} \cdots g_{\alpha_r} \quad (\alpha < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r),$$

($g_\alpha \in G_\alpha^+$), которые не входят в идеал P_b . С другой стороны, из определения идеалов P_a ($a \in M$) сразу следует, что $P_b \subseteq P_c$. Итак, при $b < c$ имеет место строгое включение $P_b \subset P_c$.

Пусть теперь $P \neq 0$ — произвольный простой идеал в S . Любой ненулевой элемент из P записывается в виде (25)

$$(28) \quad g_{\alpha_1} \cdots g_{\alpha_r} \quad (\alpha_1 < \cdots < \alpha_r), \quad g_{\alpha_1} \in G_{\alpha_1}^+, \quad (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \in A_1.$$

Пусть, $b = \sup b_{\alpha_1}$, где индексы $\alpha_1 \in \mathfrak{A}_1$ соответствуют всевозможным элементам (28) из P . Тогда в силу (27) и (28) идеал P совпадает с идеалом P_b , соответствующим элементу $b \in M$. Следовательно, отображение $\varphi: b \rightarrow P_b$ является сюръективным отображением множества M на множество $\mathfrak{M}$ всех простых идеалов полугруппы S .

Как было показано выше, $P_c \subset P_d$, если $c < d$. Следовательно, φ — изоморфизм линейно упорядоченных множеств M и $\mathfrak{M}$. По теореме 1 существует кольцо нормирования R , мультипликативная полугруппа главных идеалов Γ которого изоморфна S , а спектр R изоморфен спектру S . Кольцо R является искомым.

Если полугруппа $G_{\gamma_0} = \{0, 1\}$, то R — целостное кольцо, так как его минимальный простой идеал совпадает с нулем кольца R . Если полугруппа G_{γ_0} содержит ненулевые нильпотентные элементы, то кольцо R нецелостно. Нильрадикал этого кольца является объединением главных идеалов кольца, порожденных всевозможными элементами вида $g_{\gamma_0} g_{\alpha_2} \cdots g_{\alpha_r}$, где $g_{\gamma_0} \in G_{\gamma_0}^+$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть τ — произвольное бесконечное кардинальное число. Тогда существует такое кольцо нормирования R , что R содержит идеал I , который порождается множеством образующих мощности τ и не порождается множеством меньшей мощности.

Доказательство. Пусть $\{1, 2, \dots, \gamma\} = M$ — такое множество порядковых чисел, что γ наименьшее число, соответствующее мощности τ . Так как множество M вполне упорядочено, то M — полное нигде не плотное в себе линейно упорядоченное множество. При этом в силу выбора порядкового числа γ имеет место равенство $\tau_1(\gamma) = \tau$. По теореме 3 существует кольцо нормирования R , спектр которого как линейно упорядоченное множество изоморфен множеству M . При этом изоморфизме элементу $\gamma \in M$ соответствует максимальный идеал $V \in R$, причём $\tau_1(V) = \tau$. Теперь в силу замечания к теореме 2 получаем, что $\tau(V) = \tau$ (т. е. V порождается множеством образующих мощности τ и не порождается множеством меньшей мощности). Теорема доказана.

Литература

- [1] Бурбаки, Коммутативная алгебра. *Изд. Мир. Москва*. 1971.
- [2] Н. И. Вишнякова—С. Д. Берман, О модулях над нётеровыми кольцами нормирования. *Доклады АН Армянской ССР*, т. 60 № 3 (1975) 144—149.
- [3] С. Д. Берман—Н. И. Вишнякова, О мультипликативной полугруппе идеалов кольца нормирования. *Publ. Math. (Debrecen)* 29 (1982), ...
- [4] Л. Фукс, Частично упорядоченные алгебраические системы. *Изд. Мир. Москва* 1965.

Поступило 13. VII. 1979.

- [7] Л. Я. Куликов, К теореме абелевых групп произвольной мощности,

Некоторые

HUNGARY
COLUMBIA

*) [3], 31.