

Спектральное представление однородных случайных полей и авторегрессионных полей дискретного аргумента

Дь. ТЕРДИК (Дебрецен)

Эта работа посвящена анализу Фурье однородных случайных полей, специально, авторегрессионных случайных полей.

1) Рассматривается однородное случайное поле y_k на целочисленной решетке в R^n ($n \geq 1$) т.е. при обозначении $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, случайные величины y_k , $k \in Z^n$ имеют следующие свойства:

$$My_k = m, \quad \text{cov}(y_k, y_l) = M(y_k - m)(y_l - m) = C(k - l)$$

Известно, что y_k допускает спектральное разложение (обобщение однопараметрического случая)

$$(1.1) \quad y_k = \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{i(k, \lambda)} \Phi(d\lambda)$$

где $(k, \lambda) = \sum_{j=1}^n k_j \lambda_j$ и $\Phi(d\lambda)$ случайная спектральная мера поля $\{y_k\}$. Интересно отметить, что спектральные разложения типа (1.1) следуют из общих теорем о спектральном разложении однородного поля на коммутативной топологической группе G с мерой Хаара [1]. Несмотря на это, результаты о спектральном представлении для однородных полей непрерывного параметра неоднократно доказываются [2] в то время как дискретный случай даже не упоминается. Мы дадим теперь доказательство представления (1.1) исходя из следующей общей леммы.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n$ -линейные унитарные операторы на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, которые перестановочны. Тогда существует, и единственно, разложение единицы $H(d\lambda)$ на $[-\pi, \pi]^n$, такое что

$$(1.2) \quad \mathcal{L}_1^{k_1} \mathcal{L}_2^{k_2} \dots \mathcal{L}_n^{k_n} = \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{i(k, \lambda)} H(d\lambda)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $n=2$. Известно [4], что $\mathcal{L}_1^k, \mathcal{L}_2^l$ представимы в виде

$$\mathcal{L}_1^k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} E(d\lambda), \quad \mathcal{L}_2^l = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu l} F(d\mu)$$

и для произвольных $g, f \in \mathcal{H}$ выполняются

$$(\mathcal{L}_1^k g, f) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} (E(d\lambda)g, f), \quad (\mathcal{L}_2^l g, f) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu l} (F(d\mu)g, f)$$

где $E(d\lambda)$ и $F(d\mu)$ разложения единицы на $[-\pi, \pi]$ и это представления единственности. Покажем сначала, что если $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ перестановочны тогда скажем $\mathcal{L}_2^l$ и $E(d\lambda)$ тоже перестановочны. Положим $\mathcal{L}_2^l h = f$ тогда имеем

$$(\mathcal{L}_1^k \mathcal{L}_2^l h, g) = (\mathcal{L}_1^k f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} (E(d\lambda)f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} (E(d\lambda) \mathcal{L}_2^l h, g)$$

$$(\mathcal{L}_1^k \mathcal{L}_2^l h, g) = (\mathcal{L}_1^k h, \mathcal{L}_2^{-l} g) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} (E(d\lambda)h, \mathcal{L}_2^{-l} g) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} (\mathcal{L}_2^l E(d\lambda)h, g).$$

В силу единственности представлений отсюда следует равенство

$$(E(d\lambda) \mathcal{L}_2^l h, g) = (\mathcal{L}_2^l E(d\lambda)h, g)$$

для каждого $h, g \in \mathcal{H}$. Следовательно $\mathcal{L}_2^l$ и $E(d\lambda)$ перестановочны. Аналогично проверяется перестановочность $E(d\lambda)$ и $F(d\mu)$. Теперь положим $H(d\lambda, d\mu) = E(d\lambda)F(d\mu)$. Очевидно, что произведение $E(d\lambda)F(d\mu)$ является разложением единицы на $[-\pi, \pi]^2$ таким что

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_1^k \mathcal{L}_2^l h, g) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} (E(d\lambda) \mathcal{L}_2^l h, g) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k + i\mu l} (E(d\lambda)F(d\mu)h, g) = \\ &= \int_{[-\pi, \pi]^2} e^{i\lambda k + i\mu l} (H(d\lambda, d\mu)h, g). \end{aligned}$$

тем самым лемма доказана.

Пусть теперь $\mathcal{H}_y$ гильбертово пространство значений однородного случайного поля $\{y_k\}$, т. е. $\mathcal{H}_y$ -линейная оболочка величин $y_k, k \in \mathbb{Z}^n$. Определим операторы частного запаздывания $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n$ равенством

$$(1.3) \quad \mathcal{L}_j y_{k_1, k_2, \dots, k_j, \dots, k_n} = y_{k_1, k_2, \dots, k_j-1, \dots, k_n}.$$

Из-за свойства однородности поля $\{y_k\}$ операторы $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n$ изометричны на $\{y_k, k \in \mathbb{Z}^n\}$, и по лемме Розанова ([3] Лемма 4.1) они могут быть продолжены с сохранением изометричности на все пространство $\mathcal{H}_y$. Операторы $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_n$ являются унитарными и поэтому по лемме 1.1 допускают спектральное разложение (1.2). Из (1.2) легко получить нижеследующее спектральное представление поля $\{y_k\}$

$$y_k = \mathcal{L}^k y_0 = \mathcal{L}_1^{k_1} \mathcal{L}_2^{k_2} \dots \mathcal{L}_n^{k_n} y_0$$

т. е.

$$y_k = \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{i(k, \lambda)} \Phi(d\lambda)$$

где $\Phi(d\lambda) = H(d\lambda)y_0$ — случайная σ -аддитивная мера. Мера $\Phi(d\lambda)$ является также случайной спектральной мерой поля $\{y_k\}$. Аналогично случаю стацио-

нарных процессов, спектральное представление ковариационной функции поля $\{y_k\}$ выражается равенством

$$C(k-l) = \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{i(k-l, \underline{\lambda})} F(d\underline{\lambda}).$$

Здесь $F(d\underline{\lambda}) = M|\Phi(d\underline{\lambda})|^2$ спектральная мера поля $\{y_k\}$. В случае когда мера F абсолютно непрерывна, так что существует производная

$$f(\underline{\lambda}) = \frac{F(d\underline{\lambda})}{\mu(d\underline{\lambda})}$$

(μ -мера Лебега на $[-\pi, \pi]^n$) будем говорить, что поле $\{y_k\}$ имеет спектральную плотность $f(\underline{\lambda})$.

2) Важным классом однородных полей являются авторегрессионные поля, естественное обобщение авторегрессионных процессов. В дальнейшем мы будем пользоваться следующим определением: поле $\{y_t\}$ назовем авторегрессионным порядка R если оно удовлетворяет случайному разностному уравнению

$$(1.4) \quad y_t = - \sum_{0 < r \leq R} a_r y_{t-r} + u_t$$

где случайные величины u_t некоррелированы ($Mu_t u_s = \delta_{ts}^s \sigma^2$). Что касается порядка R , он определяется следующим образом:

$$R_j = \max \{r_j | a_{r_1, r_2, \dots, r_n} \neq 0\}$$

Перечислим некоторые факты, доказательство которых аналогичны доказательством для случая стационарных процессов. Как и в случае $n=1$ интеграл

$$\int_{[-\pi, \pi]^n} \varphi(\underline{\lambda}) \Phi(d\underline{\lambda})$$

по случайной мере $\Phi(d\underline{\lambda})$ однородного поля $\{y_t\}$ определен в среднем квадратичном тогда и только тогда когда $\varphi \in L_F^2$. Рассмотрим линейное преобразование $\varphi \in L_F^2$ однородного поля $\{y_t\}$

$$(1.5) \quad X_t = \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{i(t, \underline{\lambda})} \varphi(\underline{\lambda}) \Phi(d\underline{\lambda}).$$

X_t -также однородно и имеет спектральное представление

$$X_t = \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{i(t, \underline{\lambda})} \Phi_x(d\underline{\lambda}).$$

Из соотношения (1.5) сразу видно, что спектральная случайная мера $\Phi_x(d\underline{\lambda})$ поля X_t представима в виде

$$\Phi_x(d\underline{\lambda}) = \varphi(\underline{\lambda}) \Phi(d\underline{\lambda}).$$

Поле y_t имеет спектральную плотность $f(\underline{\lambda})$ тогда и только тогда когда любое поле X_t получающееся из него линейным преобразованием, имеет спектраль-

ную плотность $f_x(\lambda)$. Причем очевидно что

$$(1.6) \quad f_x(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda).$$

Для изучения стохастического разностного уравнения (1.4) удобно его переписать в форме

$$(1.7) \quad \sum_{0 \leq r \leq R} a_r y_{-r} = u_t \quad (a_0 = 1)$$

Поскольку случайные величины U_t некоррелированы, поле U_t имеет спектральную плотность

$$f_u(\lambda) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^n}.$$

Отсюда и из (1.6) вытекает

Лемма 2. Допустим что авторегрессионное поле y_t однородно. Тогда y_t имеет спектральную плотность $f(\lambda)$ и

$$\frac{\sigma^2}{(2\pi)^n} = |P(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda)$$

или же

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^n |P(e^{i\lambda})|^2},$$

где $P(e^{i\lambda}) = P(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, \dots, e^{i\lambda_n})$ и P алгебраический полином присоединенный к (1.7) (характеристический полином поля (1.7)) т. е.

$$(1.8) \quad P(x) = \sum_{0 \leq r \leq R} a_r x^r = \sum_{0 \leq r \leq R} a_r x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}.$$

Заметим что, если $f(\lambda)$ — спектральная плотность авторегрессионного поля y_t , то она неотрицательна и интегрируема по Лебегу на $[-\pi, \pi]^n$.

Зададим пример, когда несмотря на то, что

$$P(e^{i\lambda_0}) = 0 \quad \lambda_0 \in [-\pi, \pi]^n$$

спектральная плотность $f(\lambda)$ интегрируема.

Пусть $n \equiv 5$ и

$$P(e^{i\lambda}) = 1 - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n e^{i\lambda_k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{i\lambda_k \cdot 2}$$

в этом случае

$$P(e^{i\lambda})|_{\lambda=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_k} P(e^{i\lambda})|_{\lambda=0} = 0 \quad k=1, 2, \dots, n$$

и

$$P(e^{i\lambda}) = -\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 + o\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2\right), \quad \lambda \in O_{0,\varepsilon} = \{-\varepsilon \leq \lambda \leq \varepsilon\}$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{o_{0,\varepsilon}} |P(e^{i\lambda})|^{-2} d\lambda \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \int_{o_{0,\varepsilon}} \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2\right)^2} d\lambda < \infty.$$

3) В настоящем пункте обсуждается вопрос представимости авторегрессионного поля y_t в форме скальзящего среднего, в смысле сходимости в среднем квадратическом:

$$(1.9) \quad y_t = \sum_{q=-\infty}^{\infty} f_q u_{t-q},$$

где u_t некоррелированы, а $\sum_{q=-\infty}^{\infty} |f_q|^2 < \infty$. С этой целью обратимся к операторам частного запаздывания $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n$ (см. (1.3)). Используя эти операторы, разностное уравнение (1.7) можно записать в виде

$$\left(\sum_{r=0}^R a_r \mathcal{L}^r\right) y_t = u_t.$$

Поставим вопрос: когда существует такой обратный оператор и оператору

$$\sum_{r=0}^R a_r \mathcal{L}^r$$

который представимый в виде

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} f_q \mathcal{L}^q?$$

Этот вопрос равносильен вопросу: когда обратный полином тригонометрического полинома $P(e^{i\lambda})$ (см. (1.8)) может быть представлен в виде

$$P^{-1}(e^{i\lambda}) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} f_q e^{i(q, \lambda)},$$

где $\sum_{q=-\infty}^{\infty} |f_q|^2 < \infty$?

Рассмотрим следующие три случая:

А) По лемме Винера ([4] лемма 11.6) если $P(e^{i\lambda}) \neq 0$ для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}^n$ тогда

$$P^{-1}(e^{i\lambda}) = \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} f_q e^{i(q, \lambda)}, \quad \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} |f_q|^2 < \infty.$$

А это означает, что

$$y_t = \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} f_q u_{t-q}.$$

Используя это замечание и лемму 1.2 приходим к следующей теореме:

Теорема 1. Авторегрессионное поле y_t , (1.7) однородно тогда и только тогда если

$$\int_{[-\pi, \pi]^n} |P(e^{i\lambda})|^2 d\lambda < \infty.$$

Для того, чтобы авторегрессионное поле было однородным достаточно чтобы $P(e^{i\lambda}) \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Замечание. Теорема 1. верна и для случая $|R| = \prod_{j=1}^n (R_j + 1) = \infty$, при ограничении

$$\sum_{0 \leq r \leq R} |a_r| < \infty.$$

Б) Случай $\sum_{0 \leq r \leq R} |a_r| < 1$ — более простой.

Заметим, что условие А. т. е. $P(e^{i\mathbf{x}}) \neq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняется и в случае Б. Из этого следует, что поле может быть представимо в виде

$$y_t = \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} f_q u_{t-q}.$$

В случае Б) докажем ещё, что $f_q = 0$ при $q \neq 0$. Множество А функций вида $F(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq r} a_r e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})}$ где $\sum_{0 \leq r} |a_r| < \infty$ с нормой $\|F\| = \sum_{0 \leq r} |a_r|$ является коммутативной алгеброй Банаха с единицей 1 и элемент

$$T(\mathbf{x}) = 1 + \sum_{0 \leq r \leq R} a_r e^{i(\mathbf{r}, \mathbf{x})} = 1 + T_1(\mathbf{x})$$

обратим если

$$\|T_1\| = \sum_{0 \leq r \leq R} |a_r| < 1 \quad (\text{см. [4], 10.7})$$

Лемма 3. При $\sum_{0 \leq r \leq R} |a_r| < 1$, авторегрессионное поле y_t , (1.7) представимо в форме скалзющего спредного т. е.

$$y_t = \sum_{0 \leq q} f_q u_{t-q}.$$

В) Переходим теперь к общему случаю. Обозначим соответственно $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}_+^n$ множества точек n -мерного комплексного пространства и n -мерного вещественного пространства с неотрицательными координатами. Очевидно, что функция $G(z) = 1/z$ голоморфна при $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}^1$, и функция

$$P(\underline{z}) = \sum_{0 \leq r \leq R} a_r \underline{z}^r$$

целая. Поэтому функция $(G \circ P)(\underline{z}) = 1/P(\underline{z})$ голоморфна в области $\mathbb{C}_n \setminus T_0$, где $T_0 = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^n | P(\underline{z}) = 0\}$. Рассмотрим отображение $\alpha(\underline{z}) = (|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$ $2n$ -мерного пространства в n -мерный абсаютный октант $\mathbb{R}_+^n$ и пусть множество

$$K = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^n | \alpha(\underline{z}) < (1, 1, \dots, 1)\} \cup \{\alpha(\underline{z}) = (1, 1, \dots, 1)\},$$

т. е. оно является объединением полицилиндра и тора. Если полином $P(\underline{z})$ не обращается в нуль на множестве K , тогда K принадлежит области голоморфности H функции $G \circ P$. Отсюда следует, что функция $G \circ P$ представляется в H рядом тейлора с центром $\underline{0}$ и этот ряд сходится абсолютно и равномерно на всей области Рейнхарта ($\bar{K} \subset H_0 \subset H$). Так что

$$(G \circ P)(e^{i\mathbf{x}}) = \sum_{0 \leq q} f_q e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}, \quad \sum_{0 \leq q} |f_q| < \infty.$$

Теорема 2. Авторегрессионное поле y_t является полем скользящего среднего тогда и только тогда когда

$$K \cap T_0 = \emptyset.$$

Справедливость следующих лемм нетрудно установить:

Лемма 4. Разностное уравнение

$$\sum_{0 \leq r \leq R} a_r f_{q-r} = \delta_0^q$$

коэффициентов с начальными данными $f_q = 0$, $q \neq 0$ имеет единственное решение f_q , $q \geq 0$, которое представимо в виде

$$f_{q_1, q_2, \dots, q_n} = \sum_{\substack{\beta_r \in Z \\ \beta_r \geq 0}} \left\{ \sum_{\substack{0 \leq r \leq R \\ j=1, 2, \dots, n}} r_j \beta_r = q_j \right\} \frac{(\sum_{0 \leq r \leq R} \beta_r)!}{\prod_{0 \leq r \leq R} \beta_r!} \prod_{0 \leq r \leq R} (-a_r)^{\beta_r}.$$

Лемма 5. Если случайные величины u независимы тогда y_t и u_s , $s \in N_t$ тоже независимы, где $N_t = \{s | s \leq t\}$.

Для доказательства достаточно заметить, что y_t зависит лишь от случайных величин u_s , $s \leq t$.

Литература

- [1] А. М. Яглом, Second order homogeneous random fields *Fourth Berkeley Symposium on Math. Stat v. 2*, p. 593. Berkeley, 1961.
- [2] Э. Хеннан, Многомерные временные ряды *М. Мир* 1974.
- [3] Ю. А., Розанов, Стационарные случайные процессы *М. Физматгиз*, 1963.
- [4] У. Рудин, Функциональный анализ *М. Мир*, 1975.

(Поступила: 2.1.1981.)