

Инварианты пар полупростых групповых алгебр конечных абелевых p -групп

Т. Ж. МОЛЛОВ (Пловдив)

Пусть G и G_1 — конечные абелевы p -группы, H и H_1 — соответственно их подгруппы, K — поле, характеристика которого не равна p и KG (KG_1) — групповая алгебра группы G (G_1) над полем K . Говорят, что пары групповых алгебр (KG, KH) и (KG_1, KH_1) K -изоморфны, если существует K -изоморфизм алгебры KG на алгебру KG_1 , ограничение которого на KH является изоморфизмом на KH_1 . В статье найдены необходимые и достаточные условия для K -изоморфизма пар (KG, KH) и (KG_1, KH_1) , т. е. полная система инвариантов пары (KG, KH) .

Пусть $\mathcal{A}$ — категория, объекты которой являются упорядоченными парами (G, H) таких конечных абелевых p -групп, что существует вложение μ группы H в G . Пары (G, H) будем обозначать через $H \xrightarrow{\mu} G$. Морфизмы категории $\mathcal{A}$ будут пары вида (φ_G, φ_H) , где φ_G и φ_H — такие гомоморфизмы соответственно группы G в группу G_1 и группы H в группу H_1 , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\mu} & G \\ \varphi_H \downarrow & & \downarrow \varphi_G \\ H & \xrightarrow{\mu_1} & G_1 \end{array}$$

коммутативна ($H_1 \xrightarrow{\mu_1} G_1$ — объект категории $\mathcal{A}$). Пусть K — поле, характеристика которого не равна p . Аналогично образуем категорию $\mathcal{A}_K$, объекты которой являются такие пары групповых алгебр (KG, KH) , что существует вложение μ^* алгебры KH в KG (обозначенные через $KH \xrightarrow{\mu^*} KG$), а морфизмы категории $\mathcal{A}_K$ являются парами $(\varphi_{KG}, \varphi_{KH})$, где φ_{KG} и φ_{KH} — такие гомоморфизмы соответственно алгебры KG в KG_1 и алгебры KH в KH_1 , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} KH & \xrightarrow{\mu^*} & KG \\ \downarrow & & \downarrow \\ KH_1 & \xrightarrow{\mu_1^*} & KG_1 \end{array}$$

коммутативна, где $KH_1 \xrightarrow{\mu_1^*} KG_1$ — объект категории $\mathcal{A}$. В частности, если гомоморфизмы φ_{KG} и φ_{KH} являются изоморфизмами, то морфизм $(\varphi_{KG}, \varphi_{KH})$

есть K -изоморфизм пары (KG, KH) на пару (KG_1, KH_1) . В статье рассматриваются условия, при которых объекты категории $\mathcal{A}$ определяются с точностью до изоморфизма, т. е. дается полная система инвариантов объектов категории $\mathcal{A}_K$ в терминах категории $\mathcal{A}$ и поля K .

Поле K называется *полем первого рода относительно простого числа p* ([7], стр. 684), если степень $(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots):K) = \infty$, где ε_i — первообразный корень степени p^i из единицы в алгебраическом замыкании $\bar{K}$ поля K , $i \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. В противном случае K называется *полем второго рода относительно p* .

В [6] найдена полная система инвариантов пары (KG, KH) алгебр, когда а) G — периодическая абелева группа (H — ее подгруппа) и K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы G и в) G — абелева p -группа и K — поле второго рода относительно p , причем при $p=2$ имеет место $K=K(\varepsilon_2)$. Отметим, что полная система инвариантов полупростой групповой алгебры счетной абелевой p -группы G получена С. Д. Берманом [1]. Когда G — любая абелева группа, а K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов периодической части группы G , то полная система инвариантов алгебры KG получена W. Мау [3]. В [2] получена полная система инвариантов алгебры KG в следующих двух случаях: 1) K — поле второго рода относительно p , а G — произвольная абелева группа, периодическая часть которой является p -группой; 2) K — поле первого рода относительно p , а G — такая абелева p -группа, что фактор-группа G/G^1 группы G по ее подгруппе G^1 элементов бесконечной высоты разлагается в прямое произведение циклических групп.

Существенную роль в статье имеет понятие характер абелевой группы G . Чтобы определить это понятие, обозначим через K^* мультипликативную группу алгебраического замыкания $\bar{K}$ поля K и через E — подгруппу группы K^* , порожденную корнями n -ой степени из единицы, где n пробегает множество натуральных чисел. Тогда каждый элемент χ группы $\text{Hom}(G, E)$ называется характером группы G . Если H — подгруппа группы G , то существует точная последовательность $1 \rightarrow H \rightarrow G \xrightarrow{\eta} G/H \rightarrow 1$, где η — естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/H . Эта точная последовательность индуцирует следующую точную последовательность

$$(1) \quad 1 \longrightarrow \text{Hom}(G/H, E) \xrightarrow{\lambda} \text{Hom}(G, E) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(H, E),$$

где λ , для каждого $\chi \in \text{Hom}(G/H, E)$ и для любого $g \in G$, определяется формулой

$$(2) \quad (\lambda(\chi))(g) = \chi(gH),$$

а α , для каждого $\chi \in \text{Hom}(G, E)$ и для любого $h \in H$ — формулой

$$(3) \quad (\alpha(\chi))(h) = \chi(h).$$

Если K — поле первого рода относительно простого числа p , то множество $s_p(K) = \{i \in N_0 \mid K(\varepsilon_i) \neq K(\varepsilon_{i+1})\}$ называется спектром поля K относительно p [4]. Если $i \in s_p(K)$, то через i' обозначается максимальное число спектра $s_p(K)$, если оно вообще существует, которое меньше i .

Обозначим через $K(\chi)$ поле, полученное в результате присоединения к полю K всех значений характера χ группы G . Поле $K(\chi)$ будем называть полем характера χ . Пусть E_i — циклическая подгруппа группы E порядка p^i , где $i \in N_0$. Легко заметить, что если K — поле первого рода относительно простого числа p , $\chi \in \text{Hom}(G, E)$ и $i \in s_p(K)$, то $K(\chi) \subseteq K(E_i)$ тогда и только тогда, когда $\chi \in \text{Hom}(G, E_i)$.

В следующих определениях и утверждениях K является полем первого рода относительно p .

Пусть G — конечная абелева p -группа, H — ее подгруппа и u — минимальный идемпотент алгебры KH . Тогда существует такое однозначно определенное число $i \in s_p(K)$, что $KHu \cong K(E_i)$. Число i называется *характеристическим числом идемпотента u* . Пусть N_j — множество всех минимальных идемпотентов алгебры KH , $j \in s_p(K)$, характеристические числа которых равны j . Обозначим через N_{ji} множество всех идемпотентов из N_j , для которых i — минимальное характеристическое число слагаемых их разложения в сумме минимальных идемпотентов алгебры KG . Очевидно $i \leq j$ и N_j — раздельное объединение множество N_{ji} при переменном $i \in s_p(K)$, т. е.

$$(4) \quad N_j = \bigcup_{\substack{i \in s_p(K) \\ i \leq j}} N_{ji}.$$

Пусть M_{ji} — множество всех характеров группы H , которым соответствуют идемпотенты множества N_{ji} . Так как каждому идемпотенту множества N_{ji} соответствует точно $(K(E_j):K)$ K -сопряженных характеров группы H , то между мощностями $|N_{ji}|$ и $|M_{ji}|$ множеств N_{ji} и M_{ji} существует связь $|M_{ji}| = |N_{ji}| (K(E_j):K)$.

Пусть G — абелева p -группа и H — ее подгруппа. Тогда для любых чисел i и j спектра $s_p(K)$ существует вложение

$$(5) \quad \beta_j: \text{Hom}(H, E_j) \rightarrow \text{Hom}(H, E)$$

и гомоморфизм

$$(6) \quad \alpha_i: \text{Hom}(G, E_i) \rightarrow \text{Hom}(H, E),$$

где α_i определяется формулой типа (3) при помощи последовательности типа (1).

Лемма 1. Пусть $j, i \in s_p(K)$, $j \leq i$ и $i' (j')$, если вообще существует, есть максимальное число спектра $s_p(K)$, которое меньше $i (j)$. Тогда

$$(7) \quad M_{ji} = (\text{Im } \alpha_i \setminus \text{Im } \alpha_{i'}) \cap (\text{Im } \beta_j \setminus \text{Im } \beta_{j'}),$$

где $\text{Im } \alpha_{i'}$ и $\text{Im } \beta_{j'}$ участвуют в (7), если соответственно i' и j' существуют (α_i и β_j определены при помощи формул (6) и (5)).

Доказательство. Пусть χ принадлежит правой части равенства (7). Так как $\chi \in \text{Im } \beta_j$, то $K(\chi) \subseteq K(E_j)$. Из $\chi \notin \text{Im } \beta_{j'}$ вытекает, что $K(\chi) \not\subseteq K(E_{j'})$. Итак $K(\chi) = K(E_j)$. Следовательно, характеру χ соответствует минимальный идемпотент u алгебры KH с характеристическим числом j . Пусть e — минимальный идемпотент алгебры KG , участвующий в разложение идемпотента u в сумме минимальных идемпотентов алгебры KG , т. е. $u = e + \dots$ и харак-

характеристическое число идемпотента e минимально. Пусть φ — характер группы G , которому соответствует идемпотент e . Если через $\varphi|_H$ обозначим ограничение характера φ на группе H , то очевидно следующие утверждения эквивалентны: (а) $\chi \in \text{Im } \alpha_i$ и $\varphi|_H = \chi$; (в) $\varphi \in \text{Hom}(G, E_i)$ и $\alpha_i(\varphi) = \chi$; (с) $K(\varphi) \subseteq K(\varepsilon_i)$ и $\alpha_i(\varphi) = \chi$. Так как имеет место (а), то $K(\varphi) \subseteq K(\varepsilon_i)$. Из $\chi \notin \text{Im } \alpha_i$ вытекает, ввиду эквивалентности (а) и (с), что $K(\varphi) \not\subseteq K(\varepsilon_i)$. Это означает, что $K(\varphi) = K(\varepsilon_i)$, т. е. характеристическое число идемпотента e равняется i . Следовательно, $\chi \in M_{ji}$. Таким образом, правая часть равенства (7) содержится в M_{ji} .

Пусть, обратно, $\chi \in M_{ji}$. Тогда идемпотент u , соответствующий характеру χ , имеет характеристическое число j , т. е. $KHu \cong K(\varepsilon_j)$. Следовательно, $K(\chi) = K(\varepsilon_j)$, т. е. $K(\chi) \subseteq K(\varepsilon_j)$ и $K(\chi) \not\subseteq K(\varepsilon_{j'})$, откуда вытекает $\chi \in \text{Im } \beta_j \setminus \text{Im } \beta_{j'}$. Пусть e — идемпотент алгебры KG с характеристическим числом i , участвующий в разложении идемпотента u в сумму минимальных идемпотентов алгебры KG и e соответствует характеру φ группы G . Тогда $\varphi \in \text{Hom}(G, E_i)$. Отсюда и из $\varphi|_H = \chi$ следует, что $\alpha_i(\varphi) = \chi$, т. е. $\chi \in \text{Im } \alpha_i$. Допустим, что $\chi \in \text{Im } \alpha_{i'}$, т. е. что существует характер $\varphi' \in \text{Hom}(G, E_{i'})$ со свойством $\varphi'|_H = \chi$. Тогда характеру φ' соответствует идемпотент e' , участвующий в разложении идемпотента u и имеющий характеристическое число, не превышающее i' . Это противоречит определению множества M_{ji} . Следовательно, $\chi \in \text{Im } \alpha_i \setminus \text{Im } \alpha_{i'}$. Таким образом справедлива формула (7).

Лемма 2. Пусть $j, i \in s_p(K)$ и $j \leq i$. Тогда

$$(8) \quad \text{Im } \alpha_i = \{\chi \in \text{Hom}(H, E) / \text{Ker } \chi \supseteq H \cap G^{p^i}\},$$

$$(9) \quad \text{Im } \beta_j = \{\chi \in \text{Hom}(H, E) / K(\chi) \subseteq K(\varepsilon_j)\}$$

$$(10) \quad \text{Im } \alpha_i \cap \text{Im } \beta_j = \{\chi \in \text{Hom}(H, E) / K(\chi) \subseteq K(\varepsilon_j) \text{ и } \text{Ker } \chi \supseteq H \cap G^{p^i}\}.$$

Доказательство. Формула (9) очевидна, если мы исходим из определения (5) гомоморфизма β_j .

Докажем формулу (8). Пусть $\chi \in \text{Hom}(H, E)$ и $\text{Ker } \chi \supseteq H \cap G^{p^i}$. Определим характер $\psi \in \text{Hom}(HG^{p^i}, E_i)$, полагая $\psi(hg^{p^i}) = \chi(h)$ для каждого $h \in H$ и для каждого $g \in G$. Корректность отображения ψ непосредственно вытекает из условия $\text{Ker } \psi \supseteq H \cap G^{p^i}$. Так как для каждого $h \in H$ имеет место $\chi(h) \in E_i$, то $\psi \in \text{Hom}(HG^{p^i}, E_i)$. Имеет место следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & 1 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \text{Hom}(G/G^{p^i}, E_i) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}(HG^{p^i}/G^{p^i}, E_i) & \longrightarrow & 1 \\ \beta \downarrow & & A & & \downarrow \gamma \\ \text{Hom}(G, E_i) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(HG^{p^i}, E_i) & & \\ & & \downarrow \lambda & & \\ & & \text{Hom}(G^{p^i}, E_i) & & \end{array}$$

где квадрат A коммутативен и все горизонтальные и вертикальные строки точны. Отображение $\lambda(\psi)$ единично, т. е. $\psi \in \text{Ker } \lambda = \text{Im } \gamma$, так как для любого

$g \in G$ имеет место $(\lambda(\psi))(g^{p^i}) = \psi(g^{p^i}) = \psi^{p^i}(g) = 1$. Следовательно, существует $\bar{\psi} \in \text{Hom}(HG^{p^i}/G^{p^i}, E_i)$, так что $\gamma(\bar{\psi}) = \psi$. Так как α — эпиморфизм, то существует такой гомоморфизм $\bar{\varphi} \in \text{Hom}(G/G^{p^i}, E_i)$, что $\alpha(\bar{\varphi}) = \bar{\psi}$. Тогда $\beta(\bar{\varphi}) = \varphi \in \text{Hom}(G, E_i)$ и φ — продолжение характера ψ , т. е. $\delta(\varphi) = \psi$, ибо из коммутативности квадрата А следует $\delta(\varphi) = \delta(\beta(\bar{\varphi})) = \gamma(\alpha(\bar{\varphi})) = \gamma(\bar{\psi}) = \psi$. Ввиду того, что ψ — продолжение характера χ , а φ — продолжение характера ψ , то φ — продолжение характера χ , т. е. $\alpha_i(\varphi) = \chi$ или $\chi \in \text{Im } \alpha_i$. Пусть, наоборот, $\chi \in \text{Im } \alpha_i$, т. е. существует такой характер $\varphi \in \text{Hom}(G, E_i)$, что $\alpha_i(\varphi) = \chi$. Следовательно, $\varphi|_H = \chi$. Тогда $\text{Ker } \chi \supseteq H \cap G^{p^i}$, ибо из $h = g^{p^i}$, $h \in H$, и $g \in G$, вытекает $\chi(h) = \varphi(g^{p^i}) = (\varphi(g))^{p^i} \in E_i^{p^i} = 1$, т. е. $\chi(h) = 1$. Таким образом имеет место (8).

Из (8) и (9) непосредственно следует (10).

Следствие 3. Для любых $j, i \in s_p(K)$, $j \leq i$, имеет место формула $\text{Im } \alpha_i \cap \text{Im } \beta_j \cong \text{Hom}(H/H \cap G^{p^i}, E_j)$.

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательности

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & \downarrow \\ 1 \longrightarrow & \text{Hom}(H/H \cap G^{p^i}, E_j) & \xrightarrow{\lambda} \text{Hom}(H, E_j) \\ & & \downarrow \beta_j \\ & & \text{Hom}(H, E) \end{array}$$

где строка и столбец точны. Поскольку композиция $\beta_j \lambda$ есть вложение, то достаточно доказать, что $\text{Im } \beta_j \lambda = \text{Im } \alpha_i \cap \text{Im } \beta_j$, откуда вытекает утверждение леммы. Действительно, пусть $\chi \in \text{Im } \beta_j \lambda$. Тогда $\chi \in \text{Im } \beta_j$. Докажем, что $\text{Ker } \chi \supseteq H \cap G^{p^i}$, откуда, ввиду (8), получится $\chi \in \text{Im } \alpha_i$. Действительно, пусть $h = g^{p^i}$, где $h \in H$ и $g \in G$. Из $\chi \in \text{Im } \beta_j \lambda$ следует, что существует такой характер $\chi_1 \in \text{Hom}(H/H \cap G^{p^i}, E_j)$, что $\chi = (\beta_j \lambda)(\chi_1)$. Тогда

$$\chi(h) = ((\beta_j \lambda)(\chi_1)(g^{p^i})) = \beta_j(\chi_1(g^{p^i}(H \cap G^{p^i}))) = \beta_j(\chi_1(H \cap G^{p^i})) = \beta_j(1) = 1,$$

т. е. $\text{Ker } \chi \supseteq H \cap G^{p^i}$, где второе равенство следует из формулы типа (2). Таким образом доказано, что $\text{Im } \beta_j \lambda \subseteq \text{Im } \alpha_i \cap \text{Im } \beta_j$.

Обратно, докажем, что $\text{Im } \alpha_i \cap \text{Im } \beta_j \subseteq \text{Im } \beta_j \lambda$. Пусть $\chi \in \text{Im } \alpha_i \cap \text{Im } \beta_j$. Так как $\chi \in \text{Im } \beta_j$, то существует такой гомоморфизм $\chi_2 \in \text{Hom}(H, E_j)$, что $\beta_j(\chi_2) = \chi$. Из $\chi \in \text{Im } \alpha_i$, ввиду (8), получится $\text{Ker } \chi \supseteq H \cap G^{p^i}$. Следовательно, существует такой характер $\chi_1 \in \text{Hom}(H/H \cap G^{p^i}, E_j)$, что $\lambda(\chi_1) = \chi_2$. Таким образом, $\chi \in \text{Im } \beta_j \lambda$. Лемма доказана.

Лемма 4. Если G — конечная абелева p -группа, то для каждого натурального i имеет место $\text{Hom}(G, E_i) \cong \text{Hom}(G/G^{p^i}, E_i)$.

Доказательство. В точной последовательности

$$1 \rightarrow \text{Hom}(G/G^{p^i}, E_i) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(G, E_i) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}(G^{p^i}, E_i),$$

где α и β определены формулами типа (2) и (3), гомоморфизм β единичен,

ибо если $\chi \in \text{Hom}(G, E_i)$, то для каждого $g \in G$ имеет место $(\beta(\chi))(g^{p^i}) = \chi(g^{p^i}) = \chi^{p^i}(g) \in E_i^{p^i} = 1$, т. е. $\beta(\chi) = 1$. Следовательно, α — изоморфизм.

Лемма 5. Если $j, i \in s_p(K)$ и $j \leq i$, то $|\text{Im } \alpha_i \cap \text{Im } \beta_j| = (H : H^{p^j}(H \cap G^{p^i}))$.

Доказательство. Применяя последовательно следствие 3, лемму 4 и теорему 13.2.1. ([8], стр. 218), получится

$$\begin{aligned} \text{Im } \alpha_i \cap \text{Im } \beta_j &\cong \text{Hom}(H/H \cap G^{p^i}, E_j) \cong \text{Hom}((H/H \cap G^{p^i})/(H/H \cap G^{p^i})^{p^j}, E_j) \cong \\ &\cong (H/H \cap G^{p^i})/(H/H \cap G^{p^i})^{p^j} \cong H/H^{p^j}(H \cap G^{p^i}), \end{aligned}$$

откуда ледует утверждение.

Лемма 6. Имеет место формула

$$(11) \quad |M_{ji}| = (H : H^{p^j}(H \cap G^{p^i})) + (H : H^{p^{j'}}(H \cap G^{p^{i'}})) - \\ - (H : H^{p^{j'}}(H \cap G^{p^i})) - (H : H^{p^j}(H \cap G^{p^{i'}})),$$

где i' и j' определены как в лемме 2, причем второй, третий и четвертый индексы в (11) существуют, если соответственно существуют пара (j', i') , j' и i' .

Доказательство. Из формулы (7) вытекает

$$M_{ji} = (\text{Im } \alpha_i \cap (\text{Im } \beta_j \setminus \text{Im } \beta_{j'})) \setminus (\text{Im } \alpha_{i'} \cap (\text{Im } \beta_j \setminus \text{Im } \beta_{j'})).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |M_{ji}| &= |\text{Im } \alpha_i \cap (\text{Im } \beta_j \setminus \text{Im } \beta_{j'})| - |\text{Im } \alpha_{i'} \cap (\text{Im } \beta_j \setminus \text{Im } \beta_{j'})| = \\ &= |\text{Im } \alpha_i \cap \text{Im } \beta_j| - |\text{Im } \alpha_i \cap \text{Im } \beta_{j'}| - |\text{Im } \alpha_{i'} \cap \text{Im } \beta_j| + |\text{Im } \alpha_{i'} \cap \text{Im } \beta_{j'}| \end{aligned}$$

и из леммы 5 следует (11).

Лемма 7. Если G — конечная абелева p -группа, H — ее подгруппа, $\chi \in \text{Hom}(H, E_i)$ и χ имеет по крайней мере одно продолжение в $\text{Hom}(G, E_i)$, то число продолжений характера χ в $\text{Hom}(G, E_i)$ равняется индексу $(G : HG^{p^i})$.

Доказательство. Последовательность

$$1 \longrightarrow \text{Hom}(G/H, E_i) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(G, E_i) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}(H, E_i)$$

точна. Согласно условию существует такой характер $\varphi \in \text{Hom}(G, E_i)$, что $\beta(\varphi) = \chi$. Тогда множество M продолжений характера χ в $\text{Hom}(G, E_i)$ совпадает со смежным классом $\varphi \text{Ker } \beta = \varphi \text{Im } \alpha$. Следовательно, $|M| = |\text{Im } \alpha| = |\text{Hom}(G/H, E_i)|$. Однако

$$\text{Hom}(G/H, E_i) \cong \text{Hom}((G/H)/(G/H)^{p^i}, E_i) \cong (G/H)/(G/H)^{p^i} \cong G/HG^{p^i},$$

где первый изоморфизм вытекает из леммы 4. Следовательно, $|M| = (G : HG^{p^i})$. Лемма доказана.

Теорема 8. Пусть G и G_1 — конечные абелевы p -группы, H и H_1 — подгруппы соответственно групп G и G_1 и K — поле первого рода относительно p . Имеет место K -изоморфизм $(KG, KH) \cong (KG_1, KH_1)$ пар алгебр

тогда и только тогда, когда для любого $i \in s_p(K)$ выполнено

$$(12) \quad |G| = |G_1|, |G^{p^i}| = |G_1^{p^i}|, |H| = |H_1|$$

и для любых чисел i и j спектра $s_p(K)$, для которых $j \leq i$, имеет место

$$(13) \quad |H^{p^i} \cap G^{p^j}| = |H_1^{p^i} \cap G_1^{p^j}|, |H \cap G^{p^i}| = |H_1 \cap G_1^{p^i}|.$$

Доказательство. Аналогично множествам N_j , N_{ji} и M_{ji} , соответствующим алгебре KH , определяются множества N_j , N'_{ji} и M'_{ji} , соответствующие алгебре KH_1 .

Пусть имеет место K -изоморфизм $(KG, KH) \cong (KG_1, KH_1)$. Так как $KH \cong KH_1$ и $KG \cong KG_1$, то из [4] следует (12). Докажем, что $|M_{ji}|$ — инвариант пары (KG, KH) , откуда получатся формулы (13). Имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} KH & \xrightarrow{\theta} & KH_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ KG & \xrightarrow{\tau} & KG_1, \end{array}$$

где θ и τ — изоморфизмы. Докажем, что если $j, i \in s_p(K)$, $j \leq i$, то $|N_{ji}| = |N'_{ji}|$, откуда следует $|M_{ji}| = |M'_{ji}|$. С этой целью установим, что $u \in N_{ji}$ тогда и только тогда, когда $\theta(u) \in N'_{ji}$. Действительно, пусть $u \in N_{ji}$ и $u = e + e_1 + \dots + e_s$ является разложением идемпотента u в сумме минимальных идемпотентов алгебры KG , где характеристическое число идемпотента e равняется i . Тогда $\theta(u) = \tau(e) + \tau(e_1) + \dots + \tau(e_s)$. Так как при K -изоморфизме характеристические числа идемпотентов сохраняются, то $\theta(u)$ и $\tau(e)$ имеют характеристические числа соответственно j и i . Если некоторый из идемпотентов $\tau(e_r)$ в правой части последнего равенства имеет характеристическое число, которое меньше i , то, используя обратный изоморфизм τ^{-1} , получится, что e_r в вышеуказанном разложении идемпотента u имеет характеристическое число, которое меньше i , что противоречит факту $u \in N_{ji}$. Следовательно, $\theta(u) \in N'_{ji}$. Обратное утверждение вытекает, используя изоморфизм τ^{-1} . Из этого следует $|M_{ji}| = |M'_{ji}|$. С помощью формулы (11), докажем, что если $j, i \in s_p(K)$ и $j \leq i$, то индекс $(H: H^{p^j}(H \cap G^{p^i}))$ является инвариантом пары (KG, KH) . С этой целью множество $\mathcal{D}$ всех пар (j, i) , где $j, i \in s_p(K)$ и $j \leq i$, упорядочим лексикографически следующим образом: будем считать что $(j, i) < (j_1, i_1)$, где $(j_1, i_1) \in \mathcal{D}$, тогда и только тогда, когда $j < j_1$ или $j = j_1$ и $i < i_1$. Докажем что $(H: H^{p^j}(H \cap G^{p^i}))$ есть инвариант путем индукции в упорядоченном множестве $\mathcal{D}$. Для пары (j_0, j_0) , где j_0 — минимальное число спектра $s_p(K)$ утверждение следует из формулы (11), имея ввиду, что $|M_{ji}| = |M'_{ji}|$. Допустим, что утверждение верно для всех пар, которые меньше пары (j, i) . Тогда правая часть (11) равняется выражению $(H_1: H_1^{p^j}(H_1 \cap G_1^{p^i})) + (H_1: H_1^{p^{j'}}(H_1 \cap G_1^{p^{i'}})) - (H_1: H_1^{p^{j'}}(H_1 \cap G_1^{p^i})) - (H_1: H_1^{p^j}(H_1 \cap G_1^{p^{i'}}))$. Так как пары (j', i') , (j', i) и (j, i') меньше (j, i) , то, ввиду индуктивного предположения, имеет место $(H: H^{p^{j'}}(H \cap G^{p^{i'}})) = (H_1: H_1^{p^{j'}}(H_1 \cap G_1^{p^{i'}}))$, $(H: H^{p^{j'}}(H \cap G^{p^i})) = (H_1: H_1^{p^{j'}}(H_1 \cap G_1^{p^i}))$ и $(H: H^{p^j}(H \cap G^{p^{i'}})) = (H_1: H_1^{p^j}(H_1 \cap G_1^{p^{i'}}))$. Следовательно, $(H: H^{p^j}(H \cap G^{p^i})) = (H_1: H_1^{p^j}(H_1 \cap G_1^{p^i}))$ т. е., индекс $(H: H^{p^j}(H \cap G^{p^i}))$ — инвариант пары $(KG,$

KH). Очевидно

$$(14) \quad (H: H^{p^j}(H \cap G^{p^i})) = \frac{|H||H^{p^j} \cap G^{p^i}|}{|H^{p^j}||H \cap G^{p^i}|}.$$

Левая часть равенства (14), ввиду доказанного, а также $|H|$ и $|H^{p^j}|$ (см. [4]), являются инвариантами пары (KG, KH) . Тогда из равенства (14) при $j=i$ получится, что $|H \cap G^{p^i}|$ — инвариант пары (KG, KH) , т. е. имеет место вторая формула (13). Тогда из (14) следует, что $|H^{p^j} \cap G^{p^i}|$ — инвариант пары (KG, KH) , т. е. имеет место первая формула (13).

Пусть, обратно, имеют место условия (12) и (13). Из первой формулы (13), при $j=i \in s_p(K)$, получится $|H^{p^i}| = |H_1^{p^i}|$. Отсюда, используя (12) и (13), вытекает $|M_{ji}| = |M'_{ji}|$, откуда $|N_{ji}| = |N'_{ji}|$. Следовательно, существует биективное отображение $\theta_{ji}: N_{ji} \rightarrow N'_{ji}$. Так как для N_j и аналогично для N'_j имеют место формулы вида (4), то при помощи отображений θ_{ji} определяется биективное отображение $\theta_j: N_j \rightarrow N'_j$, $j \in s_p(K)$, которое дает биективное отображение $\theta: \text{id}(KH) \rightarrow \text{id}(KH_1)$, сохраняющее характеристические числа идемпотентов, где $\text{id}(KH)$ и $\text{id}(KH_1)$ — множества минимальных идемпотентов соответственно алгебр KH и KH_1 . Отсюда вытекает, что θ продолжается до изоморфизма алгебры KH на алгебру KH_1 . Докажем, что θ продолжается до изоморфизма $\tau: KG \rightarrow KG_1$. Пусть $u \in N_{ji}$ и u соответствует характеру χ группы H . Обозначим через L_{ut} множество всех минимальных идемпотентов алгебры KG , которые входят в разложение идемпотента u и имеют характеристические числа $t \equiv i$. Пусть $L'_{u't}$ есть то же самое множество для идемпотента $\theta(u) = u'$. Докажем, что $|L_{ut}| = |L'_{u't}|$. Обозначим через $S_{ut}(S'_{u't})$ множество всех характеров группы G , (G_1) , соответствующих идемпотентам множества $L_{ut}(L'_{u't})$. Очевидно $S_{ut}(S'_{u't})$ — объединение множества K -сопряженных характеров. Так как $|S_{ut}| = |L_{ut}|(K(\varepsilon_t):K)$, то равенство $|L_{ut}| = |L'_{u't}|$ эквивалентно равенству $|S_{ut}| = |S'_{u't}|$. Докажем последнее из указанных равенств. Используем формулу

$$(15) \quad S_{ut} = \{\varphi \in \text{Hom}(G, E_t) \setminus \text{Hom}(G, E'_t) / \varphi|_H = \chi\},$$

которая доказывается из следующих эквивалентных утверждений: (а) $\varphi \in S_{ut}$; (в) $\varphi|_H = \chi$ и $K(\varphi) = K(\varepsilon_t)$; (с) $\varphi \in \text{Hom}(G, E_t) \setminus \text{Hom}(G, E'_t)$ и $\varphi|_H = \chi$. Из (15), и из леммы 7, использованной для $i=t$, вытекает, что $S_{ut} = (G: HG^{p^i}) - (G: HG^{p^{i'}})$, где второй член не существует, если число i' спектра $s_p(K)$ не существует. Тогда из формул (12) и (13) следует, что $|S_{ut}| = |S'_{u't}|$, т. е. $|L_{ut}| = |L'_{u't}|$ для всех чисел $t \in s_p(K)$, для которых $i \equiv t$ и для всех $u \in N_{ji}$, где $j \equiv i$. Из этих равенств и из формул

$$\text{id}(KG) = \bigcup_{\substack{u \in N_{ij} \\ j, i, t \in s_p(K) \\ j \equiv i \equiv t}} L_{ut}, \quad \text{id}(KG_1) = \bigcup_{\substack{u' \in N'_{ji} \\ j, i, t \in s_p(K) \\ j \equiv i \equiv t}} L'_{u't}$$

для множеств $\text{id}(KG)$ и $\text{id}(KG_1)$ идемпотентов алгебр KG и KG_1 вытекает, что существует биективное отображение $\tau_{ut}: L_{ut} \rightarrow L'_{u't}$, которое дает биективное отображение $\tau: \text{id}(KG) \rightarrow \text{id}(KG_1)$, сохраняющее характеристические числа идемпотентов. Тогда отображение τ продолжается до K -изоморфизма $\tau: KG \rightarrow KG_1$. Из построения τ следует, что его ограничение $\tau|_{KH}$ на алгебре KH совпадает с изоморфизмом $\theta: KH \rightarrow KH_1$. Теорема доказана.

Теорема 9. Если G и G_1 — конечные абелевы p -группы, H и H_1 — соответственно их подгруппы и K — поле второго рода относительно p , то имеет место K -изоморфизм $(KG, KH) \cong (KG_1, KH_1)$ пар групповых алгебр тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$|G|=|G_1|$ и $|H|=|H_1|$, если (а) $p \neq 2$ или (в) $p=2$ и $K=K(\varepsilon_2)$; $|G|=|G_1|$, $|H|=|H_1|$, $|G^2|=|G_1^2|$, $|H^2|=|H_1^2|$ и $|H \cap G^2|=|H_1 \cap G_1^2|$, если $p=2$ и $K \neq K(\varepsilon_2)$.

Доказательство является упрощенным вариантом теоремы 8, имея ввиду [4], если для поля K второго рода относительно p введется спектр $s_p(K) = \{i \in N_0/K(\varepsilon_i) \neq K(\varepsilon_{iN})\} \cup \{\infty\}$ и если по определению считать, что $G^{p^\infty} = 1$.

Литература

- [1] С. Д. Берман, Групповые алгебры счетных абелевых p -групп. *Publ. Math. (Debrecen)* **14** (1967), 365—405.
- [2] С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов. Об изоморфизме полупростых групповых алгебр бесчетных абелевых p -групп. *Доклады БАН* **35** (1982), 869—871.
- [3] W. MAU, Invariants vor kommutative group algebras. III. *J. Math.* **15**, (1971), 525—531.
- [4] Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах полупростых групповых алгебр абелевых p -групп. *Доклады БАН* **35** (1982), 1619—1622.
- [5] Т. Ж. Моллов. Об инвариантах пар полупростых групповых алгебр периодических абелевых групп. *Доклады БАН* **36** (1983), 1013—1014.
- [6] Т. Ж. Моллов. Об инвариантах пар полупростых групповых алгебр периодических абелевых групп. *Publ. Math. (Debrecen)* **31** (1984), 145—151.
- [7] D. S. PASSMAN. The algebraic structure of group rings. *New York, London, Sidney Toronto*, 1977.
- [8] М. Холл. Теория групп. *Москва*, 1962, с. 468.

ПЛОВДИВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"П. ХИЛЕНДАРСКИ", КАФЕДРА АЛГЕБРЫ
4000 ПЛОВДИВ

(Поступило 4. II. 1983 г.)