

## О вещественных групповых алгебрах групп с бесконечной циклической подгруппой конечного индекса

К. БУЗАШИ (Дебрецен)

Алгеброй типа  $E$  над произвольным полем  $K$  называем скрещенное произведение  $A$  тела  $T$ , содержащего в своем центре поле  $K$ , с бесконечной циклической группой  $(a)$  или с бесконечной группой диэдра  $D$ :

$$A = \{T, a\}; \quad \lambda a = a\lambda^\varphi,$$

$$A = \{T, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda^\varphi; \quad \lambda b = b\lambda^\psi; \quad b^{-1}ab = \gamma a^{-1}; \quad b^2 = \mu,$$

где  $\lambda, \gamma, \mu \in T$ ;  $\varphi, \psi$  — автоморфизмы тела  $T$ , оставляющие на месте элементы поля  $K$ .

В работах [2] и [3] дается описание всех алгебр типа  $E$  над полем вещественных чисел.<sup>1)</sup> Для однозначности обозначений запишем здесь всех их опять.

Если  $\mathbf{R}, \mathbf{C}$  — поля вещественных и комплексных чисел,  $\mathbf{Q}$  — тело кватернионов,  $(a)$  — бесконечная циклическая группа,  $D$  — бесконечная группа диэдра, заданная соотношениями

$$D = (a) \cdot (b); \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

то всех алгебр типа  $E$  над  $\mathbf{R}$  имеется 15:

$$A_1 = \mathbf{R}(a); \quad A_2 = \mathbf{C}(a); \quad A_3 = \mathbf{Q}(a),$$

которые являются групповыми алгебрами группы  $(a)$ ,

$$A_4 = \{\mathbf{C}, a\}; \quad \lambda a = a\bar{\lambda}$$

( $\lambda \in \mathbf{C}$ ,  $\bar{\lambda}$  — сопряженная к  $\lambda$ ) — скрещенное произведение поля  $\mathbf{C}$  с группой  $(a)$ ,

$$A_5 = \mathbf{R}D; \quad A_6 = \mathbf{C}D; \quad A_7 = \mathbf{Q}D -$$

групповые алгебры группы  $D$ , и

$$A_8 = \{\mathbf{R}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

$$A_9 = \{\mathbf{R}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

<sup>1)</sup> В работе [2] из классификации выпущены типы алгебр, которые в этой статье обозначены через  $A_{12}$  и  $A_{15}$ .

$$\begin{aligned}
A_{10} &= \{C, a, b\}; \quad \lambda a = a\bar{\lambda}; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in C), \\
A_{11} &= \{C, a, b\}; \quad \lambda a = a\bar{\lambda}; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in C), \\
A_{12} &= \{C, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in C), \\
A_{13} &= \{C, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in C), \\
A_{14} &= \{C, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in C), \\
A_{15} &= \{Q, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in Q) -
\end{aligned}$$

скрещенные произведения полей  $R$ ,  $C$  и тела  $Q$  с группой  $D$ .

В настоящей работе мы покажем, что все вещественные алгебры типа  $E$  реализуются в вещественных групповых алгебрах, то есть для любой фиксированной алгебры  $A_i$  ( $i=1, \dots, 15$ ) типа  $E$  существует такая группа  $G_i$ , что групповая алгебра  $RG_i$  группы  $G_i$  над полем вещественных чисел  $R$  содержит идеал, который как  $R$ -алгебра  $R$ -изоморфен  $R$ -алгебре  $A_i$ .

**Лемма 1.** Пусть  $R_1$  — любое подполе поля вещественных чисел,  $C_1 = R_1(i)$ , ( $i \in C$ ,  $i^2 = -1$ ) и  $(b)$  — циклическая группа 4-го порядка,  $e = 1/2(1 - b^2)$ . Тогда идеал  $R_1(b)e$  групповой алгебры  $R_1(b)$  изоморфен полю  $C_1$ .

**Доказательство.** Каждый элемент  $x \in R_1(b)e$  однозначно представляется в виде

$$x = \sum_{j=0}^3 \lambda_j b^j e = (\lambda_0 - \lambda_2)e + (\lambda_1 - \lambda_3)be = \alpha_0 + \alpha_1 be \quad (\lambda_j, \alpha_k \in R_1),$$

так как  $b^2 e = -e$ . Отображение

$$\Theta: \alpha_0 e + \alpha_1 be \rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 i$$

кольца  $R_1(b)e$  на поле  $C_1$ , очевидно, является изоморфизмом. Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $R_1$  — любое подполе поля вещественных чисел,  $Q_1 = R_1(i, j, k)$ , где  $1, i, j, k$  — базис тела кватернионов  $Q$ , и  $\mathcal{D}_1$  — группа кватернионов:

$$\mathcal{D}_1 = (b) \cdot (c); \quad b^4 = c^4 = 1; \quad b^{-1}cb = c^{-1}, \quad b^2 = c^2.$$

Пусть  $e = 1/2(1 - b^2)$ . Тогда идеал  $R_1 \mathcal{D}_1 e$  групповой алгебры  $R_1 \mathcal{D}_1$  изоморфен телу  $Q_1$ .

**Доказательство.** Так как

$$(be)^2 = (ce)^2 = (bce)^2 = -e;$$

$$be \cdot ce = bce; \quad ce \cdot bce = be; \quad bce \cdot be = ce;$$

$$ce \cdot be = -bce; \quad bce \cdot ce = -be; \quad be \cdot bce = -ce,$$

и каждый элемент идеала  $R_1 \mathcal{D}_1 e$  однозначно представляется в виде

$$x = \alpha_0 e + \alpha_1 (be) + \alpha_2 (ce) + \alpha_3 (bce) \quad (\alpha_{ji} \in R_1),$$

то отображение

$$\Theta: x \rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$$

является изоморфизмом идеала  $R_1 \mathcal{D}_1 e$  и тела  $Q_1$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть  $H$  — произвольная группа,  $R_1$  — любое подполе поля вещественных чисел и поле  $C_1 = R_1(i)$  — расширение поля  $R_1$  присоединением комплексного числа  $i$ . Тогда групповая алгебра  $C_1 H$  как  $R_1$ -алгебра  $R_1$ -изоморфна идеалу некоторой групповой алгебры  $R_1 H_1$ .

**Доказательство.** Пусть  $H_1$  — прямое произведение

$$H_1 = (b) \times H$$

циклической группы 4-го порядка  $(b)$  с группой  $H$ . Рассмотрим идемпотент  $e = 1/2(1 - b^2)$  групповой алгебры  $R_1 H_1$ . Покажем, что идеал  $R_1 H_1 e$  как  $R_1$ -алгебра  $R_1$ -изоморфна  $R_1$ -алгебре  $C_1 H$ . Действительно, каждый элемент идеала  $R_1 H_1 e$  представляется в виде

$$x = \sum_j \mu_j h_j b^j e = \sum_j \alpha_j h_j,$$

где  $\mu_j \in R_1$ ,  $\mu_j b^j e = \alpha_j \in R_1(b)e$ ,  $h_j \in H$ . Согласно лемме 1, идеал  $R_1(b)e$  изоморфен полю  $C_1$ . Пусть  $\alpha'_j \in C_1$  — образ элемента  $\alpha_j \in R_1(b)e$  при этом изоморфизме. Тогда отображение

$$\psi: \sum_j \alpha_j h_j \rightarrow \sum_j \alpha'_j h_j \quad (h_j \in H)$$

очевидно является  $R_1$ -изоморфизмом  $R_1$ -алгебр  $R_1 H_1 e$  и  $C_1 H$ . Лемма доказана.

**Лемма 4.** Пусть  $H$  — произвольная группа,  $R_1$  — любое подполе поля вещественных чисел,  $Q_1 = R_1(i, j, k)$ , где  $1, i, j, k$  базис тела кватернионов. Тогда групповая алгебра  $Q_1 H$  как  $R_1$ -алгебра  $R_1$ -изоморфна идеалу некоторой групповой алгебры  $R_1 H_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $H_2 = H \times \mathcal{D}_1$  — прямое произведение группы  $H$  и группы кватернионов

$$\mathcal{D}_1 = (b) \cdot (c); \quad b^4 = c^4 = 1; \quad b^{-1}cb = c^{-1}; \quad b^2 = c^2.$$

Рассмотрим идемпотент  $e = 1/2(1 - b^2)$ . Каждый элемент  $x$  идеала  $R_1 H_2 e$  групповой алгебры  $R_1 H_2$  записывается в виде

$$x = \sum \lambda_j h_j d_j e = \sum \alpha_j h_j$$

где  $\lambda_j \in R_1$ ,  $h_j \in H$ ,  $d_j \in \mathcal{D}_1$ ,  $\alpha_j = \lambda_j d_j e \in R_1 \mathcal{D}_1 e$ . Согласно лемме 2, идеал  $R_1 \mathcal{D}_1 e$  изоморфен телу  $Q_1$ , поэтому отображение

$$\varphi: \sum \alpha_j h_j \rightarrow \sum \alpha'_j h_j,$$

где  $\alpha'_j \in Q_1$  — образ элемента  $\alpha_j$  в изоморфизме  $R_1 \mathcal{D}_1 e \cong Q_1$ , является  $R_1$ -изоморфизмом  $R_1$ -алгебр  $R_1 H_2 e$  и  $Q_1 H$ . Лемма доказана.

**Теорема 1.** Для каждой алгебры  $A_i$  ( $i=1, 2, 3, 5, 6, 7$ ) существуют вещественные групповые алгебры  $\mathbf{R}G_i$ , содержащие идеал  $I_i$ ,  $\mathbf{R}$ -изоморфный  $\mathbf{R}$ -алгебре  $A_i$ .

**Доказательство.**  $A_1$  сама является вещественной групповой алгеброй. Для алгебры  $A_2 = \mathbf{C}(a)$  рассмотрим прямое произведение

$$G_2 = (a) \times (b)$$

бесконечной циклической группы  $(a)$  и циклической группы 4-го порядка  $(b)$ . Используя лемму 3, получаем, что идеал  $\mathbf{R}G_2 e$ , порожденный идемпотентом  $e = 1/2(1 - b^2)$ ,  $\mathbf{R}$ -изоморфен  $\mathbf{R}$ -алгебре  $A_2$ .

В случае алгебры  $A_3 = \mathbf{Q}(a)$  рассмотрим прямое произведение

$$G_3 = \mathcal{D}_1 \times (a)$$

группы кватернионов  $\mathcal{D}_1$  и бесконечной циклической группы  $(a)$ . Используя лемму 4, получаем, что идеал  $\mathbf{R}G_3 e$  вещественной групповой алгебры  $\mathbf{R}G_3$ , порожденный идемпотентом  $e = 1/2(1 - c^2)$ ,  $\mathbf{R}$ -изоморфен  $\mathbf{R}$ -алгебре  $A_3$ .

$A_5$  сама является групповой алгеброй над  $\mathbf{R}$ .

Для алгебры  $A_6 = \mathbf{C}D$  рассмотрим прямое произведение

$$G_6 = \mathcal{D}_1 \times (d)$$

бесконечной группы диэдра  $\mathcal{D}_1$  и циклической группы 4-го порядка  $(d)$ . Применяя лемму 3, получаем, что идеал  $\mathbf{R}G_6 e$ , порожденный идемпотентом  $e = 1/2(1 - d^2)$ , как  $\mathbf{R}$ -алгебра  $\mathbf{R}$ -изоморфен  $\mathbf{R}$ -алгебре  $\mathbf{C}D$ .

В случае алгебры  $A_7 = \mathbf{Q}D$  строим прямое произведение

$$G_7 = D \times \mathcal{D}_1$$

бесконечной группы диэдра  $D$  и группы кватернионов  $\mathcal{D}_1$ . Тогда, в силу леммы 4, идеал  $\mathbf{R}G_7 e$ , порожденный идемпотентом  $e = 1/2(1 - c^2)$ , как  $\mathbf{R}$ -алгебра  $\mathbf{R}$ -изоморфен  $\mathbf{R}$ -алгебре  $\mathbf{Q}D$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $A_4 = \{\mathbf{C}, a\}$  — скрещенная групповая алгебра бесконечной циклической группы  $(a)$  над полем комплексных чисел  $\mathbf{C}$ , причем  $\lambda a = a\bar{\lambda}$  ( $\lambda \in \mathbf{C}$ ). Пусть группа  $G$  — полупрямое произведение

$$G = (b) \cdot (a); \quad a^{-1}ba = b^3, \quad b^4 = 1$$

циклической группы 4-го порядка  $(b)$  на бесконечную циклическую группу  $(a)$ . Тогда идеал  $\mathbf{R}Ge$ , порожденный идемпотентом  $e = 1/2(1 - b^2)$ , как  $\mathbf{R}$ -алгебра  $\mathbf{R}$ -изоморфен  $\mathbf{R}$ -алгебре  $A_4$ .

**Доказательство.** Согласно лемме 1 кольцо  $\mathbf{R}(b)e$  изоморфно полю комплексных чисел  $\mathbf{C}$ . Каждый элемент  $x \in \mathbf{R}Ge$  однозначно записывается в виде

$$x = \sum \lambda_j g_j e = \sum a^j \gamma_j e = \sum a^j \alpha_j,$$

где  $\lambda_j \in \mathbf{R}$ ,  $g_j \in G$ ,  $\gamma_j \in \mathbf{R}(b)$ ,  $\alpha_j \in \mathbf{R}(b)e$ . Рассмотрим отображение

$$\psi: \sum a^j \alpha_j \rightarrow \sum a^j \alpha'_j$$

идеала  $\mathbf{R}Ge$  на алгебру  $A_4$ , где  $\alpha'_j$  — образ элемента  $\alpha_j \in \mathbf{R}(b)e$  в  $\mathbf{C}$  при изоморфизме  $\mathbf{R}(b)e \cong^\varphi \mathbf{C}$ . Очевидно,  $\psi$  является взаимно однозначным, выдерживает сложение и умножение на элементы из  $\mathbf{R}$ . Покажем, что имеет место равенство  $a\alpha'_j = \overline{\alpha'_j}a$ , где  $\overline{\alpha'_j}$  — число, комплексно сопряженное с  $\alpha'_j \in \mathbf{C}$ . Действительно, каждый элемент  $\alpha_j \in \mathbf{R}(b)e$  представляется в виде

$$\alpha_j = \beta e + \beta_1 b e \quad (\beta, \beta_1 \in \mathbf{R}).$$

Тогда

$$a\alpha_j = a(\beta e + \beta_1 b e) = \beta e a + \beta_1 b^{-1} e a = (\beta e + \beta_1 b^{-1} e) a.$$

Но образ элемента  $\beta e + \beta_1 b^{-1} e \in \mathbf{R}(b)e$  в поле  $\mathbf{C}$  при изоморфизме  $\varphi$  как раз  $\overline{\alpha'_j}$ . Следовательно, умножение элементов в алгебре  $\mathbf{R}Ge$  подчиняется тем же законам, что и в  $\mathbf{R}$ -алгебре  $A_4$ . Значит,  $\psi$  есть  $\mathbf{R}$ -изоморфизм  $\mathbf{R}$ -алгебр  $\mathbf{R}Ge$  и  $A_4$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** Для алгебр  $A_i$  ( $i=8, 9$ ) существуют такие группы  $G_i$ , что  $A_i$  как  $\mathbf{R}$ -алгебра  $\mathbf{R}$ -изоморфна некоторому идеалу групповой алгебры  $\mathbf{R}G_i$ .

**Доказательство.** Рассмотрим сначала  $A_8$ —скрещенную групповую алгебру бесконечной группы диэдра  $D$  над полем вещественных чисел с определяющими соотношениями

$$(1) \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Пусть  $H$ —прямое произведение

$$H = (a) \times (c)$$

бесконечной циклической группы  $(a)$  и циклической группы 2-го порядка  $(c)$ , а группа  $G_8$ —полупрямое произведение

$$G_8 = H \cdot (b); \quad bc = cb; \quad b^{-1}ab = a^{-1}c; \quad b^2 = c^2 = 1$$

группы  $H$  на циклическую группу 2-го порядка  $(b)$ . Покажем, что идеал  $\mathbf{R}G_8e$ , порожденный идемпотентом  $e = 1/2(1 - c)$ , как  $\mathbf{R}$ -алгебра  $\mathbf{R}$ -изоморфна  $\mathbf{R}$ -алгебре  $A_8$ . Действительно, каждый элемент идеала  $\mathbf{R}G_8e$  представляется в виде

$$x = \sum \lambda_j a^j b^{\delta_j} e = \sum \lambda_j d_j e \quad (\lambda_j \in \mathbf{R}; \quad 0 \leq \delta_j < 2; \quad d_j \in D),$$

так как  $ce = -e$ . Отображение

$$\psi: \sum \lambda_j d_j e \rightarrow \sum \lambda_j d_j$$

идеала  $\mathbf{R}G_8e$  на алгебру  $A_8$  является  $\mathbf{R}$ -изоморфизмом  $\mathbf{R}$ -алгебр  $\mathbf{R}G_8e$  и  $A_8$ , так как  $\psi(ae) = a$ ;  $\psi(be) = b$ ;  $\psi(ce) = c$ ;  $\psi(e) = 1$  и выполняются равенства (1):

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}ce = -a^{-1}e = -(ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = e.$$

Рассмотрим алгебру  $A_9 = \{\mathbf{R}, a, b\}$ —скрещенную групповую алгебру бесконечной группы диэдра  $D$  над полем  $\mathbf{R}$  с определяющими соотношениями

$$(2) \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\lambda, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Пусть группа  $G_9$ —полупрямое произведение

$$G_9 = (a) \cdot (b), \quad b^4 = 1, \quad b^{-1}ab = a^{-1}$$

бесконечной циклической группы  $(a)$  на циклическую группу 4-го порядка  $(b)$ . Каждый элемент  $x$  идеала  $RG_9e$ , порожденного идемпотентом  $e = 1/2(1 - b^2)$ , представляется в виде

$$x = \sum \lambda_j d_j e,$$

где  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ,  $d_j \in D$ , так как  $b^2e = -e$ . Тогда отображение

$$\varphi: \sum \lambda_j d_j e \rightarrow \sum \lambda_j d_j$$

идеала  $RG_9e$  на  $A_9$  является взаимно однозначным. Ясно, что  $\varphi(ae) = a$ ;  $\varphi(be) = b$ ,  $\varphi(e) = 1$ . Так как

$$(be)^{-1}(ae)(be) = (ae)^{-1}; \quad (be)^2 = b^2e = -e,$$

то есть в  $RG_9e$  выполняются равенства (2), то отображение  $\varphi$  является  $\mathbb{R}$ -изоморфизмом  $\mathbb{R}$ -алгебр  $RG_9e$  и  $A_9$ . Теорема доказана.

**Теорема 4.** Для алгебр  $A_i$  ( $i=10, 11$ ) существуют такие группы  $G_i$ , что  $\mathbb{R}$ -алгебра  $A_i$   $\mathbb{R}$ -изоморфна некоторому идеалу вещественной групповой алгебры  $RG_i$ .

**Доказательство.** Алгебры  $A_{10}$  и  $A_{11}$  заданы определяющими соотношениями

$$(3) \quad \lambda a = a\bar{\lambda}; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

$$(4) \quad \lambda a = a\bar{\lambda}; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Пусть группа  $H$ —полупрямое произведение

$$H = (c) \cdot (a); \quad a^{-1}ca = c^{-1}; \quad c^4 = 1$$

циклической группы 4-го порядка  $(c)$  на бесконечную циклическую группу  $(a)$ . Рассмотрим полупрямые произведения

$$(5) \quad G_{10} = H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad bc = cb,$$

$$(6) \quad G_{11} = H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}c^2; \quad bc = cb$$

группы  $H$  на циклическую группу 2-го порядка  $(b)$  с определяющими соотношениями (5) и (6).

Согласно лемме 1, идеал  $\mathbb{R}(c)e$ , порожденный идемпотентом  $e = 1/2(1 - c^2)$ , изоморфен полю комплексных чисел  $\mathbb{C}$ :

$$\varphi: \mathbb{R}(c)e \cong \mathbb{C}.$$

Нетрудно заметить, что каждый элемент идеалов  $RG_{10}e$  и  $RG_{11}e$  однозначно представляется в виде

$$x = \sum \lambda_j a^j c^{\delta_j} b^{\gamma_j} e = \sum d_j \alpha_j,$$



где  $\alpha_j \in \mathbf{R}$ ;  $\alpha_j \in \mathbf{R}(c)e$ ;  $d_j \in D$ ;  $0 \leq \delta_j < 4$ ;  $0 \leq \gamma_j < 2$ , так как  $c^2e = -e$ . Покажем, что отображение

$$\psi: \Sigma \alpha_j d_j \rightarrow \Sigma \alpha'_j d_j,$$

где  $\alpha'_j = \varphi(\alpha_j) \in \mathbf{C}$ , является  $\mathbf{R}$ -изоморфизмом  $\mathbf{R}$ -алгебр  $\mathbf{R}G_{10}e \cong A_{10}$  и  $\mathbf{R}G_{11}e \cong A_{11}$ . Действительно,  $\psi$  очевидно является взаимно однозначным отображением на всю алгебру  $A_{10}$  (также на  $A_{11}$ ) и выдерживает сложение и умножение на элементы из  $\mathbf{R}$ . Значит достаточно показать, что в  $\mathbf{R}$ -алгебре  $\mathbf{R}G_{10}e$  ( $\mathbf{R}G_{11}e$ ) выполняются условия (3) (соответственно (4)). В случае обеих алгебр  $\psi(e) = 1$ ;  $\psi(ce) = i$ ;  $\psi(ae) = a$ ;  $\psi(be) = b$  и каждый элемент  $\alpha_j \in \mathbf{R}(c)e$  представляется в виде

$$\alpha_j = \beta_0 e + \beta_1 ce \quad (\beta_0, \beta_1 \in \mathbf{R}).$$

Поэтому, используя соотношения (5), в алгебре  $\mathbf{R}G_{10}e$  имеют место равенства

$$\alpha_j b = b \alpha_j$$

$$a \alpha_j = a(\beta_0 e + \beta_1 ce) = \beta_0 ea + \beta_1 c^{-1}ea = (\beta_0 e + \beta_1 c^{-1}e)a.$$

Однако

$$\varphi(\beta_0 e + \beta_1 c^{-1}e) = \overline{\alpha'_j},$$

то есть

$$a \alpha'_j = \overline{\alpha'_j} a.$$

Кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}e = (ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = e,$$

значит в  $\mathbf{R}G_{10}e$  условия (3) выполняются.

Точно так же можно показать, что в алгебре  $\mathbf{R}G_{11}e$

$$b \alpha_j = \alpha_j b \quad (\alpha_j \in \mathbf{R}(c)e),$$

$$a \alpha'_j = \overline{\alpha'_j} a \quad (\alpha'_j = \varphi(\alpha_j) \in \mathbf{C}),$$

кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}c^2e = -a^{-1}e = -(ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = e,$$

то есть в  $\mathbf{R}G_{11}e$  условия (4) выполняются. Теорема доказана.

**Теорема 5.** Для каждой алгебры  $A_i$  ( $i=12, 13, 14$ ) существует такая группа  $G_i$ , что  $\mathbf{R}$ -алгебра  $A_i$   $\mathbf{R}$ -изоморфна некоторому идеалу вещественной групповой алгебры  $\mathbf{R}G_i$ .

**Доказательство.** Алгебры  $A_{12}, A_{13}, A_{14}$  задаются определяющими соотношениями

$$(7) \quad A_{12} = \{\mathbf{C}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{C}),$$

$$(8) \quad A_{13} = \{\mathbf{C}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{C}),$$

$$(9) \quad A_{14} = \{\mathbf{C}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in \mathbf{C}).$$

Пусть группа  $H$  — прямое произведение

$$H = (a) \times (c)$$

бесконечной циклической группы  $(a)$  и циклической группы 4-го порядка  $(c)$ . Рассмотрим полупрямые произведения группы  $H$  на циклическую группу  $(b)$  с определяющими соотношениями

$$(10) \quad G_{12} = H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^{-1}cb = c^{-1}; \quad c^4 = 1,$$

$$(11) \quad G_{13} = H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}c^2; \quad b^{-1}cb = c^{-1}; \quad c^4 = 1,$$

$$(12) \quad G_{14} = H \cdot (b); \quad b^4 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^{-1}cb = c^{-1}; \quad c^4 = 1.$$

Определим идемпотент  $e_1 = 1/2(1 - c^2)$  в вещественных групповых алгебрах  $\mathbf{R}G_{12}$  и  $\mathbf{R}G_{13}$ , и идемпотент  $e_2 = 1/4(1 - c^2)(1 - b^2)$  в групповой алгебре  $\mathbf{R}G_{14}$ . Согласно лемме 1, все идеалы  $\mathbf{R}(c)e_1$ ,  $\mathbf{R}(c)e_2$  изоморфны полю комплексных чисел  $\mathbf{C}$ . Обозначим эти изоморфизмы через общий символ  $\varphi$ . Так как  $c^2e_1 = -e_1$ ;  $c^2e_2 = b^2e_2 = -e_2$ , то элементы во всех трех идеалах представляются в виде

$$\sum d_j \alpha_j$$

где  $\alpha_j \in \mathbf{R}(c)e_i$  ( $i=1, 2$ ),  $d_j \in D$ . Рассмотрим отображение

$$\psi: \sum d_j \alpha_j \rightarrow \sum d_j \alpha'_j,$$

где  $\alpha'_j = \varphi(\alpha_j) \in \mathbf{C}$ . Покажем, что отображение  $\psi$  является  $\mathbf{R}$ -изоморфизмом  $\psi: \mathbf{R}G_i e \rightarrow A_i$  ( $i=12, 13, 14$ ), где  $e$  — соответствующий идемпотент  $e_1$  или  $e_2$ . Действительно,  $\psi$  — взаимно однозначно на всю алгебру  $A_i$  для всех  $i=12, 13, 14$ , выдерживает сложение и умножение на элементы из  $\mathbf{R}$ . Покажем, что в алгебре  $\mathbf{R}G_{12}e_1$  ( $\mathbf{R}G_{13}e_1$  или  $\mathbf{R}G_{14}e_2$ ) выполняются соотношения (7) ((8) или (9) соответственно). Действительно, учитывая

$$\psi(ae) = a; \quad \psi(be) = b, \quad \psi(e) = 1,$$

и что каждый элемент из  $\mathbf{R}(c)e$  представляется в виде

$$\alpha = \beta_0 e + \beta_1 c e \quad (\beta_0, \beta_1 \in \mathbf{R}),$$

в алгебре  $\mathbf{R}G_{12}e_1$  имеем (используя соотношения (10))

$$a\alpha = \alpha a \quad (\alpha \in \mathbf{R}(c)e_1)$$

$$b\alpha = b(\beta_0 e_1 + \beta_1 c e_1) = (\beta_0 e_1 + \beta_1 c^{-1} e_1) b,$$

что равносильно равенству

$$b\alpha' = \overline{\alpha'} b \quad (\alpha' = \varphi(\alpha) \in \mathbf{C}).$$

Кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}e = (ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = e.$$

Значит, в алгебре  $\mathbf{R}G_{12}e$  выполняются условия (7).



В алгебре  $\mathbf{R}G_{13}e_1$  с использованием соотношений (11) имеют место равенства

$$\begin{aligned} a\alpha &= \alpha a; \quad b\alpha' = \overline{\alpha'}b; \\ (be)^{-1}(ae)(be) &= b^{-1}abe = a^{-1}c^2e = -a^{-1}e = -(ae)^{-1} \\ (be)^2 &= b^2e = e, \end{aligned}$$

то есть выполняются все условия (8).

Наконец, используя соотношения (12), в алгебре  $\mathbf{R}G_{14}e_2$  получаем

$$\begin{aligned} \alpha a &= a\alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R}(c)e_2), \\ b\alpha &= b(\beta_0 e_2 + \beta_1 c e_2) = (\beta_0 e_2 + \beta_1 c^{-1} e_2)b, \\ (be_2)^{-1}(ae_2)(be_2) &= b^{-1}abe_2 = a^{-1}e_2 = (ae_2)^{-1}, \\ (be_2)^2 &= b^2e_2 = -e_2. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\psi$  выдерживает умножение. Теорема доказана.

**Теорема 6.** Для алгебры  $A_{15}$  существует такая группа  $G$ , что  $\mathbf{R}$ -алгебра  $A_{15}$   $\mathbf{R}$ -изоморфна некоторому идеалу вещественной групповой алгебры  $\mathbf{R}G$ .

Доказательство. Алгебра  $A_{15}$  задается соотношениями

$$(13) \quad A_{15} = \{Q, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in Q).$$

Пусть группа  $H$ —прямое произведение

$$H = \mathcal{D}_1 \times (a)$$

группы кватернионов  $\mathcal{D}_1$ :

$$\mathcal{D}_1 = (c) \cdot (d); \quad c^4 = d^4 = 1; \quad d^{-1}cd = c^3; \quad c^2 = d^2,$$

и бесконечной циклической группы  $(a)$ , а группа  $G$ —полупрямое произведение

$$G = H \cdot (b); \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad bc = cb; \quad bd = db; \quad b^2 = c^2; \quad b^4 = 1$$

группы  $H$  на циклическую группу 4-го порядка  $(b)$ .

Рассмотрим идеал  $\mathbf{R}Ge$ , порожденный идемпотентом  $e = 1/2(1 - c^2)$ . Согласно лемме 4 идеал  $\mathbf{R}D_1e$  изоморфен телу кватернионов  $Q$ . Так как  $b^2e = -e$ , элементы идеала  $\mathbf{R}Ge$  могут быть записаны в виде

$$\Sigma a^\nu b^{\gamma_\nu} \alpha_\nu = \Sigma d_\nu \alpha_\nu \quad (d_\nu \in \mathbf{R}\mathcal{D}_1e; \quad 0 \leq \gamma_\nu < 2; \quad d_\nu \in D).$$

Покажем, что отображение

$$\psi: \Sigma d_\nu \alpha_\nu \rightarrow \Sigma d_\nu \alpha'_\nu$$

$\mathbf{R}$ -алгебр  $\mathbf{R}Ge$  и  $A_{15}$  является  $\mathbf{R}$ -изоморфизмом, где  $\alpha'_\nu \in Q$ —образ элемента  $\alpha_\nu \in \mathbf{R}\mathcal{D}_1e$  при изоморфизме  $\mathbf{R}\mathcal{D}_1e \cong Q$ . Для этого достаточно показать, что в алгебре  $\mathbf{R}Ge$  выполняются условия (13), ибо отсюда уже легко получаются все свойства  $\mathbf{R}$ -изоморфизма. Учитывая, что элементы  $\alpha_\nu \in \mathbf{R}\mathcal{D}_1e$  имеют вид

$$\alpha_\nu = \beta_0 e + \beta_1 c e + \beta_2 d e + \beta_3 c d e \quad (\beta_i \in \mathbf{R}),$$

имеем

$$a\alpha_v = \alpha_v a; \quad b\alpha_v = \alpha_v b,$$

так как элементы  $a$  и  $b$  перестановочны с  $c$  и  $d$ . Кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}e = (ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = -e.$$

Теорема доказана.

### Литература

- [1] С. Д. Берман—К. Бузаши, О представлениях группы, содержащей бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **29** (1982), 163—170.
- [2] С. Д. Берман—К. Бузаши, О Модулях над групповыми алгебрами групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Studia Sci. Math. Hungarica* **16** (1981), 455—470.
- [3] С. Д. Берман—К. Бузаши, Описание всех конечномерных вещественных представлений групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **31** (1984), 133—144.
- [4] Ч. Кэртис—И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Изд. Наука, 1969.
- [5] N. JACOBSON, The theory of rings. *Amer. Math. Soc.* New York, 1943.

(Поступило 29. VII. 1983)