

Vervollständigung der Arbeit „Characterization of generalized q -additive functions“¹⁾

Von JÁNOS FEHÉR

1.

Es bezeichnen N , N_0 , C die Menge der positiven, der nichtnegativen ganzen Zahlen bzw. der komplexen Zahlen. Für $S \subset N$ sei $\bar{S} = S \cup \{0\}$. Falls $S (\subset N_0)$ endlich ist, bezeichnet $|S|$ die Anzahl der Elemente von S .

Definition 1. Es seien R_i ($i=0, 1, \dots$) endliche aber nicht leere Untermengen von N . Das Mengensystem $\{R_0, R_1, \dots\}$ wird *R-System* genannt, falls es die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (a) das kleinste Element von R_i ist kleiner als das kleinste Element von R_j ($0 \leq i < j$),
- (b) jede positive ganze Zahl n kann eindeutig in der Form

$$(1.1) \quad n = r_{i_1} + \dots + r_{i_s} \quad (r_{i_j} \in R_{i_j})$$

aufgeschrieben werden, wobei auch der Fall $s=1$ zugelassen ist.²⁾

Definition 2. Die Funktion $f: N_0 \rightarrow C$ wird (bezüglich eines gegebenen *R-Systems*) *R-additiv* genannt, falls $f(0)=0$ und $f(n)=f(r_{i_1})+\dots+f(r_{i_s})$ gelten, wobei n der Form (1.1) ist.

Es sei $q > 1$ eine gegebene natürliche Zahl und

$$R_i = q^i \{1, \dots, q-1\} = \{q^i m | m = 1, \dots, q-1\} \quad (i = 0, 1, \dots).$$

Dann ist $\{R_0, R_1, \dots\}$ das Zahlensystem von der Basis q . Die additive Funktionen, bezüglich des Zahlensystems von der Basis q , heißen q -additiv. Der Begriff der q -Additivität stammt von A. O. GELFOND [6]. Die *R*-Additivität wurde als eine Verallgemeinerung der q -Additivität in [3] eingeführt.

Die Funktionen von der Form $f(n)=cn$, wobei c eine komplexe Konstante ist, sind — bezüglich jedes *R-Systems* — *R*-additiv und sehr regelmäßig. Im Bereich der *R*-additiven Funktionen spielen sie dieselbe Rolle, was die Funktionen $c \cdot \log n$

¹⁾ In der Arbeit [5] wurde der Hauptsatz dieser Arbeit bei der Bedingung der Monotonität von dem vorliegenden *R-System* bewiesen.

²⁾ Bei N. G. DE BRUIJN [1] wurde das Mengensystem $\{R_0, R_1, \dots\}$ ohne die Bedingung der Endlichkeit von R_i Zahlensystem genannt. In dieser Arbeit wird die Endlichkeit der Mengen R_i fest ausgenutzt, und deshalb ist die unterscheidende Benennung „*R-System*“ begründet.

im Bereich der additiven Funktionen spielen. Es sei c eine ganze Zahl. Dann ist die Funktion $f(n)=cn$ R -additiv, ganzwertig und es gilt: $n|f(n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Der Hauptzweck dieser Arbeit ist zu zeigen, daß diese Eigenschaft eine ganzwertige R -additive Funktion f nur im Falle $f(n)=cn$ besitzen kann.

2.

Es sei für das R -System $\{R_0, R_1, \dots\}$ $R = \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$. I. KÁTAI und der Autor haben in [2] den folgenden Satz bewiesen:

Satz A. *Es seien g und f ganzwertige R -additive Funktionen. Setzen wir voraus, daß eine Primzahl p mit den folgenden Eigenschaften existiert:*

(a) *es genügt unendlich(viel)mal $p \nmid g(r)$ ($r \in R$),*

(b) *$p^a | g(n) \Rightarrow p^a | f(n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).*

Dann ist $f(n)=c \cdot g(n)$, wobei c eine passende rationale Konstante ist.³⁾

Ein Spezialfall des Satzes A ($g(n)=n$) ist

Satz B. *Setzen wir voraus, daß es zu dem vorliegenden R -System eine Primzahl p mit der folgenden Eigenschaft existiert: es genügt unendlich(viel)mal $p \nmid r$ ($r \in R$). Dann ist die Funktion $f=0$ die einzige ganzwertige R -additive Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

$$(2.1) \quad f(1) = 0 \quad \text{und} \quad n | f(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Die Bedingungen des Satzes A sind nicht mit der Bedingung $g(n) | f(n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) vertauschbar. Es gilt nämlich (vgl. [2]):

Satz C. *Zu jedem R -System können die ganzwertigen R -additiven Funktionen g, f so gegeben werden, daß die Folgenden gelten sollen:*

(a) $g(n) \neq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$),

(b) $g(n) | f(n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$),

(c) $\frac{f(n)}{g(n)} \neq \text{konstant.}$

3.

Man kann leicht ein die Bedingung des Satzes B nicht erfüllendes R -System konstruieren. Deshalb hat der folgende Hauptsatz ein besonderes Interesse.

Hauptsatz. *Bei einem beliebig gegebenen R -System ist $f=0$ die einzige ganzwertige R -additive Funktion, die die Bedingungen (2.1) erfüllt.*

³⁾ In [2] wurden Satz A und Satz C für q -additiven Funktionen bewiesen. Mit denselben Methoden kann man diese allgemeineren Sätze beweisen.

Folgerung 1. Es sei h eine ganzwertige R -additive Funktion. Wenn $n|h(n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) gilt, dann ist $h(n) = cn$, wobei c eine ganze Konstante ist.

Bei einem R -System es bezeichne T_{i_0} die Menge der Zahlen n , für die in (1.1) $i_0 \equiv i_1 < \dots < i_s$ ist.

Folgerung 2. Es sei f eine ganzwertige R -additive Funktion und i_0 ein gegebener Index. Wenn $n|f(n)$ ($\forall n \in T_{i_0}$) gilt, dann ist $f(n) = cn$ ($\forall n \in T_{i_0}$), wobei c eine ganze Konstante ist.

Die Folgerungen 1—2. sind bei verschiedenen Verwendungen von besonderem Interesse (vgl. [4]).

Eine Permutation g von $\mathbb{N}_0$ wird „ R -additive Permutation“ genannt, falls g gleichzeitig auch R -additiv ist.

Folgerung 3. Es sei f eine ganzwertige R -additive Funktion, g eine R -additive Permutation und i_0 ein gegebener Index. Wenn $g(n)|f(n)$ ($\forall n \in T_{i_0}$) gilt, so ist $f(n) = c \cdot g(n)$ ($\forall n \in T_{i_0}$), wobei c eine passende ganze Konstante ist.

Die Folgerung 3 zeigt, daß $g(n)$ im Satz C keine R -additive Permutation sein kann.

4.

Wir lassen einige Begriffe, Bezeichnungen und Hilfssätze vorausgehen.

Definition 3. Das R -System $\{R_0, R_1, \dots\}$ wird *monoton* genannt, falls jedes Element von R_i kleiner als das kleinste Element von R_j ($0 \leq i < j$) ist.

Hilfssatz 1. Das Mengensystem $\{R_0, R_1, \dots\}$ ist genau dann ein monotonen R -System, wenn

$$(4.1) \quad \begin{cases} R_i = d_i \{1, \dots, k_i - 1\} & (i = 0, 1, \dots), \text{ wobei} \\ d_0 = 1, d_i = k_0 \cdot \dots \cdot k_{i-1} & (i = 1, 2, \dots) \text{ sind.}^4 \end{cases}$$

(Den Notwendigkeitsbeweis kann der Leser leicht durchführen. Bekanntlich ist die Bedingung auch hinreichend.)

Es sei $\{R_0, R_1, \dots\}$ ein R -System und I_s eine endliche aber nicht leere Untermenge von $\mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\sum_{i \in I_s} * \bar{R}_i := \left\{ \sum_{i \in I_s} r_i \mid r_i \in \bar{R}_i \right\}.$$

Definition 4. Es seien I_s ($s = 0, 1, \dots$) endliche aber nicht leere und paarweise gliederfremde Untermengen von $\mathbb{N}_0$. Das Mengensystem $\{I_0, I_1, \dots\}$ wird *I-System* genannt, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$$(a) \quad \bigcup_{s=0}^{\infty} I_s = \mathbb{N}_0,$$

(b) das kleinste Element von I_s ist kleiner als das kleinste Element von I_t ($0 \leq s < t$).

⁴⁾ Bei N. G. DE BRUIJN wurden die monotonen R -Systeme „*britisches Zahlensystem*“ (British Number System) genannt.

Es seien $\{R'_0, R'_1, \dots\}, \{I_0, I_1, \dots\}$ ein R' -System bzw. ein I -System. Offenbar ist das durch die Relationen

$$(4.2) \quad R_s = \left(\sum_{i \in I_s} * \bar{R}'_i \right) \setminus \{0\} \quad (s = 0, 1, \dots)$$

definierte Mengensystem $\{R_0, R_1, \dots\}$ ein R -System.

Definition 5. Es seien $\{R_0, R_1, \dots\}, \{R'_0, R'_1, \dots\}$ zwei R -Systeme und $\{I_0, I_1, \dots\}$ ein I -System. Man sagt, daß $\{R', I\}$ eine *Zerlegung* des R -Systems $\{R_0, R_1, \dots\}$ ist, falls (4.2) erfüllt ist. Diese Zerlegung heißt *monoton*, falls das R' -System *monoton* bzw. *trivial*, falls $I_s = \{s\}$ ($s=0, 1, \dots$) ist. Das R -System wird *primitiv* genannt, wenn es keine nichttriviale Zerlegung besitzt. Die Zerlegung $\{R', I\}$ heißt *primitiv*, falls das R' -System primitiv ist.

Hilfssatz 2. Jedes R -System hat eine monotone Zerlegung.

BEWEIS. Siehe N. G. DE BRUIJN [1].

Hilfssatz 3. Das R -System $\{R_0, R_1, \dots\}$ ist genau dann primitiv, wenn $|\bar{R}_i| = \text{Primzahl}$ ($i=0, 1, \dots$) ist.

BEWEIS. 1. Nehmen wir im Gegenteil an, daß $|\bar{R}_i| = \text{Primzahl}$ ($i=0, 1, \dots$), $\{R', I\}$ eine Zerlegung des R -Systems und mindestens einmal $|I_s| \geq 2$ sind. Dann ist für einen solchen Index s $|\bar{R}_s| = \prod_{i \in I_s} |\bar{R}'_i|$, was aber wegen $|\bar{R}'_i| \geq 2$ unmöglich ist.

2. Nehmen wir umgekehrt an, daß das R -System primitiv ist. Denn laut des Hilfssatzes 2 R *monoton* ist, genügt es laut des Hilfssatzes 1 zu sehen, daß bei $a, b > 1$ die Gleichung $\{0, 1, \dots, ab-1\} = \{0, 1, \dots, a-1\} \oplus a \{0, 1, \dots, b-1\}$ gilt. (Dabei ist für $A, B \in N_0$ $A \oplus B = \{a+b | a \in A, b \in B\}$.) ■

Aus den Obigen folgt unmittelbar

Hilfssatz 4. Jedes R -System besitzt eine primitive Zerlegung.

Es seien im R -System $\{R_0, R_1, \dots\}$ $m = r_{t_1} + \dots + r_{t_u}$ ($r_{t_i} \in R_{t_i}$) bzw. n von der Form (1.1). m und n heißen (zu einander, bezüglich des vorliegenden R -Systems) R -fremd, falls $\{t_1, \dots, t_u\} \cap \{i_1, \dots, i_s\} = \emptyset$ ist. Falls n und m R -fremd und f R -additiv sind, gilt $f(n+m) = f(n) + f(m)$.

Beweis des Hauptsatzes. Es sei $\{R', I\}$ eine primitive Zerlegung des vorliegenden R -Systems, und nehmen wir an, daß die ganzwertige R -additive Funktion f den Bedingungen (2.1) entspricht.

Wenn es mindestens eine Primzahl p von der Eigenschaft $|\bar{R}'_i| \neq p$ ($i=0, 1, \dots$) existiert, so gilt wegen der Monotonität von R' $p \nmid d'_i$ ($i=0, 1, \dots$). (Für die Bedeutung von d'_i vgl. (4.1)!) So gilt also nach dem Hilfssatz 1 unendlich(viel)mal $p \nmid r$ ($r \in R'$). Weil $R' \subseteq R$ ist, folgt unsere Behauptung aus dem Satz B.

In Folgenden werden wir annehmen, daß es zu jeder Primzahl p ein Index i von der Eigenschaft $|\bar{R}'_i| = p$ existiert. Es bezeichne $i(p)$ für die Primzahl p den kleinsten Index von der Eigenschaft $|\bar{R}'_{i(p)}| = p$. Falls p und q verschiedene Primzahlen sind, ist also $i(p) \neq i(q)$.

Es sei $(1 <) b \in N$. Wir werden $f(b-1) = 0$ annehmen, und $f(b) = 0$ beweisen.

Der Index i_0 soll so fixiert werden, daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sein sollen:

$$(a) \quad 1, \dots, b-1, b \in \bar{A}_{i_0} = \sum_{s=0}^{i_0-1} * \bar{R}_s = \sum_{s \in I'} * \bar{R}'_s, \quad \text{wobei} \quad I' = \bigcup_{j=0}^{i_0-1} I_j \quad \text{ist,}$$

$$(b) \quad p \equiv \max(b, |f(b)|) \quad (p \text{ Primzahl}) \Rightarrow i(p) \in I'.$$

Es sei a_0 das größte Element von I' . Der Index $h(>i_0)$ soll so fixiert werden, daß das kleinste Element von $I_h > a_0$ sein soll. Es sei m das größte Element von I_h und p ein Primteiler von $d'_m + 1$. Dann, wegen $p \nmid d'_m$, es gilt $i(p) \notin I'$, und deshalb folgt aus (b) $p > 2$.

Fall 1. Falls $i(p) = m$ ist, so ist $2d'_m \in R'_m = d'_m \{1, \dots, p-1\}$. Es sei q ein Primteiler von $2d'_m + 1$. Wegen $q \nmid d'_m$ gilt $i(q) \equiv m$. Da $d'_m + 1$ und $2d'_m + 1$ teilerfremd sind, ist $p \neq q$, und deshalb ist $i(q) > m$.

Fall 2. $i(p) > m$.

Es seien in dem Fall 1 $x = 2d'_m$ und $P = q$ bzw. in dem Fall 2 $x = d'_m$ und $P = p$. Mit diesen Bezeichnungen gelten

$$(5.1) \quad P|x+1 \quad \text{und} \quad x \in R'_m \subset R_h.$$

Es soll $i(P)$ in der Menge I_t liegen. Dann gelten offenbar $t \equiv i_0$ und $t \neq h$. Wegen $P \nmid d'_{i(P)}$ bildet $R'_{i(P)} = d'_{i(P)} \{1, \dots, P-1\} (\subset R_t)$ ein reduziertes Restsystem (mod P). Wegen (b) es gilt $P > b-1 > 0$, und deshalb existiert eine Zahl y mit den folgenden Eigenschaften:

$$(5.2) \quad P|y+b-1 \quad \text{und} \quad y \in R'_{i(P)} \subset R_t.$$

Aus ihrer Auswahl folglich sind x und 1 bzw. y und $b-1$ R -fremd, und deshalb folgen aus (5.1), (5.2), (2.1) und $f(b-1) = 0$

$$(5.3) \quad P|f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x) \quad \text{und} \quad P|f(y+b-1) = f(y).$$

Aus (5.1) und (5.2) folgt $P|x+y+b$. Wegen $h \neq t$ und (b) sind x, y, b paarweise R -fremd, und deshalb folgt aus (2.1)

$$(5.4) \quad P|f(x+y+b) = f(x) + f(y) + f(b).$$

Aus (5.3) und (5.4) gewinnt man, daß P in $f(b)$ aufteht, was aber nur, falls $f(b) = 0$ ist, gelten kann. Damit ist der Hauptsatz bewiesen. ■

BEWEIS DER FOLGERUNG 1. Die Funktion $f(n) = h(n) - h(1)n$ ist eine ganzwertige, R -additive, den Bedingungen (2.1) entsprechende Funktion, und deshalb ist die Behauptung eine unmittelbare Folgerung des Hauptsatzes. ■

BEWEIS DER FOLGERUNG 2. Es seien: $\{R', I\}$ eine monotone Zerlegung des vorliegenden R -Systems $\{R_0, R_1, \dots\}$, $I' = \bigcup_{s=0}^{i_0-1} I_s$ und $a-1$ das größte Element von I' . Dann folgt aus $i \equiv a$ stets $i \in I'' = \bigcup_{s=i_0}^{\infty} I_s$. Für jedes $j \equiv i_0$ enthält I_j mindestens ein Element $\equiv a$. Lassen wir aus den Mengen $I'_{i_0}, I'_{i_0+1}, \dots$ ihre Elemente

$< a$ fallen, so erhalten wir die Mengen $I'_{i_0}, I'_{i_0+1}, \dots$. Die Mengen $R_j^* = (\sum_{i \in I'_j}^* \bar{R}_i) \setminus \{0\}$ ($j = i_0, i_0+1, \dots$) haben die folgenden Eigenschaften:

$$d'_a | r \quad (\forall r \in R_j^*, j = i_0, i_0+1, \dots),$$

$$R_j^* \subset R_j \quad (j = i_0, i_0+1, \dots).$$

Das durch die Relationen $R_k^{**} = (a'_a)^{-1} \cdot R_{i_0+k}^* = \{r/d'_a | r \in R_{i_0+k}^*\}$ ($k = 0, 1, \dots$) definierte Mengensystem $\{R_0^{**}, R_1^{**}, \dots\}$ ist ein R^{**} -System. Die Funktion $F(n) = f(d'_a n)$ ist eine ganzwertige, R^{**} -additive und die Bedingung $n | F(n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) erfüllende Funktion. Laut der Folgerung 1 ist also $F(n) = c_1 n$, wobei c_1 eine ganze Konstante ist. Wegen $d'_a | F(1)$ muß mit einem ganzen c $c_1 = c \cdot d'_a$ sein. Wir haben damit bewiesen, daß die Relation $f(r) = c \cdot r$ ($r \in R$) unendlich(viel)mal gilt.

Sei nun $b \in T_{i_0}$ fixiert. Nach den Obigen kann man ein $N \in T_{i_0}$ so auswählen, daß b und R -fremd, $f(N) = c \cdot N$ und $b + N > |f(b) - c \cdot b|$ sein sollen. Dann gilt wegen $b + N \in T_{i_0}$ $b + N | f(b + N) = f(b) - cb + c(b + N)$, woraus $b + N | f(b) - c \cdot b$ folgt, was aber nur im Falle $f(b) = c \cdot b$ gelten kann. ■

BEWEIS DER FOLGERUNG 3. Das vorliegende R -System soll $\{R_0, R_1, \dots\}$ sein. Weil g eine R -additive Permutation ist, bilden die Mengen $H_i = g(R_i)$ ($i = 0, 1, \dots$) bei einer passenden Indexzuordnung ein R' -System $\{R'_0, R'_1, \dots\}$. Wir nehmen den Index i_1 so an, daß für jedes $i \geq i_1$ aus $g^{-1}(R'_i) = R_j$ die Relation $j \geq i_0$ folgen soll. (Dabei bezeichnet g^{-1} die Inversfunktion von g .) Dann ist mit $N = g(n)$ die Funktion $F(N) = f(g^{-1}(N))$ eine ganzwertige, R' -additive und die Bedingung $N | F(N)$ ($\forall N \in T'_{i_1}$) erfüllende Funktion. Laut der Folgerung 2 haben wir — wegen $g^{-1}(T'_{i_1}) \subset T'_{i_0}$ — erhalten, daß die Relation $f(r) = c \cdot g(r)$ ($r \in R$) unendlich(viel)mal gilt.

Es sei nun b eine beliebige Zahl aus T_{i_0} . Wir können also $M \in T_{i_0}$ so auswählen, daß b und M R -fremd, $f(M) = c \cdot g(M)$ und $g(b + M) > |f(b) - c \cdot g(b)|$ sein sollen, deshalb folgt $f(b) = c \cdot g(b)$ wie oben. ■

Bemerkung. Laut der Folgerung 2 können statt „Theorem 2“ bzw. statt „Corollary 1“ in [4] die Folgenden stehen:

Theorem 2. Let $F, g_1, \dots, g_s$ be integervalue R -additive functions, $0 < M_1 < M_2 < \dots < M_s$ be fixed integers. Assume that the relation

$$\sum_{i=1}^s g_i(n + M_i) \equiv F(n) \pmod{n}$$

holds for every positive integer n .

Then

$$\sum_{i=1}^s g_i(n + M_i) = F(n) + cn$$

identically, with a suitable integer c .

Corollary 1. Let f be an integervalued R -additive function, $M \equiv 0$ be a fixed integer. Assume that

$$f(n+M) \equiv f(M) \pmod{n}$$

is satisfied for every $n \in \mathbb{N}$.

Then $f(n) = cn$ for every $n \in \mathbb{N}_0$.

Hiermit möchte der Autor den Professoren ZOLTÁN DARÓCZY und IMRE KÁTAI für ihre Hilfe bei der Abfassung dieser Arbeit den besten Dank sagen.

Literatur

- [1] N. G. DE BRUIJN, On number systems, *Nieuw. Arch. Wisk.* (3) **IV**, (1956), 15—17.
- [2] J. FEHÉR and I. KÁTAI, Some remarks on q -additive and additive functions, *Proc. of the Conf. in Number Theory held in Budapest* (1981).
- [3] J. FEHÉR, On a generalization of q -additive functions, *Annales Univ. Budapest* (Im Druck).
- [4] J. FEHÉR, Characterization of integervalued R -additive functions, *Publ. Math. (Debrecen)* (Im Druck).
- [5] J. FEHÉR, Characterization of generalized q -additive functions, *Annales Univ. Budapest* (Im Druck).
- [6] A. O. GELFOND, Sur les nombres, ont des propriétés additives et multiplicatives données, *Acta Arithm.* **13** (1968), 259—265.

(Eingegangen am 8 Oktober 1984)