

Примитивные системы подмножеств конечного множества

Т. Я. БЕРКОВИЧ, Я. Г. БЕРКОВИЧ

Вводимые ниже обозначения используются на протяжении всей статьи.

Пусть s — натуральное число, $n = 2s + \varepsilon$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\mathfrak{M}$ — множество из n элементов. Два множества назовем инцидентными, если одно из них содержится в другом, и неинцидентными — в противном случае. Система Σ подмножеств множества $\mathfrak{M}$ называется примитивной, если любые два различных элемента этой системы неинцидентны. Система Σ называется максимальной примитивной системой, если она не является собственной подсистемой некоторой примитивной системы подмножеств множества $\mathfrak{M}$.

Далее рассматриваются только системы подмножеств множества $\mathfrak{M}$.

Приведем пример максимальной примитивной системы. Пусть $k \leq n$ — натуральное число, $\mathfrak{M}^k$ — множество всех k -элементных подмножеств множества $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}^k$ — максимальная примитивная система, содержащая C_n^k элементов, где C_n^k — число сочетаний из n по k .

Пусть $\mu(n)$ — максимум длин примитивных систем подмножеств множества $\mathfrak{M}$. Э. Шпернер [1] показал, что $\mu(n) = C_n^s$ и примитивная система длины $\mu(n)$ совпадает с $\mathfrak{M}^s$ или $\mathfrak{M}^{s+\varepsilon}$.

Цель этой заметки — доказать усиление теоремы Шпернера.

Введем дополнительные обозначения. Пусть $\Sigma_1 = \{A_1, \dots, A_t\}$, $\Sigma_2 = \{B_1, \dots, B_r\}$ — две конечные системы множеств (не обязательно предполагать, что эти множества конечные). Через $i(\Sigma_1, \Sigma_2)$ обозначим число пар инцидентностей $B_k \subseteq A_j$, где $A_j \in \Sigma_1$, $B_k \in \Sigma_2$. Вычислим число $i(\Sigma_1, \Sigma_2)$ двумя способами. Пусть A_j содержит точно α_j элементов системы Σ_2 , а B_k содержится точно в β_k элементах системы Σ_1 . Тогда, очевидно, имеем

$$(1) \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_t = i(\Sigma_1, \Sigma_2) = \beta_1 + \dots + \beta_r$$

Мы применим равенство (1) и случаю, когда

$$\Sigma_1 = \{A_1, \dots, A_t\} \subseteq \mathfrak{M}^k,$$

где натуральное число $k \in \{s+1, \dots, n\}$, а

$$\Sigma_2 = \{B_1, \dots, B_r\} = A_1^{k-1} \cup \dots \cup A_t^{k-1}$$

(здесь A_i^{k-1} — множество всех $(k-1)$ -элементных подмножеств множества A_i). В этих обозначениях справедлива такая

Теорема. Всегда $r \leq t$. Если $r = t$, то $\Sigma_1 = \mathfrak{M}^{s+1}$ и $\varepsilon = 1$, $k = s+1$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением (1). Так как $|A_J^{k-1}|=k$, то $\alpha_J=k$ для всех $J \in \overline{1, t}$. Поэтому равенство (1) в нашей ситуации принимает вид

$$(2) \quad tk = \beta_1 + \dots + \beta_r$$

Каждое множество $B_m \in \Sigma_2$ лежит ровно в $n-(k-1)=n-k+1$ элементах множества $\mathfrak{M}^k$. Поэтому все

$$\beta_m \leq n-k+1 \leq 2s+\varepsilon-(s+1)+1 = s+\varepsilon,$$

так что из (2) получается

$$(3) \quad t(s+1) \leq tk \leq r(s+\varepsilon)$$

откуда $r \geq t(s+1)/(s+\varepsilon) \geq t$, так как $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Пусть теперь $r=t$. Тогда (2) принимает вид

$$(4) \quad tk = \beta_1 + \dots + \beta_t$$

Каждое из t слагаемых справа в (4) не превосходит $s+\varepsilon \leq s+1 \leq k$; поэтому из (4) следует $\beta_J = k \leq s+\varepsilon$ для всех $J \in \overline{1, r}$, и окончательно $\varepsilon=1$, $k=s+1$, и, следовательно, все $\beta_J=s+1$. Покажем, что в этом случае $\Sigma_1 = \mathfrak{M}^{s+1}$, что и завершит доказательство.

Предположим, что $\Sigma_1 \neq \mathfrak{M}^{s+1}$. Тогда в $\mathfrak{M}^{s+1} - \Sigma_1$ имеется элемент M . Пусть для определенности $D = M \cap A_1$ таково, что

$$|D| = \max \{|M \cap A_i| \mid i \in \overline{1, t}\}.$$

Так как $|D| \leq s$, то $D \subseteq D_1 \in A_1^s$. Пусть $M_1, \dots, M_{s+1}$ — все те элементы множества $\mathfrak{M}^{s+1}$, которые содержат D_1 . Покажем, что

$$M_1, \dots, M_{s+1} \in \Sigma_1.$$

Предположим, что это не так. Очевидно, $D_1 = B_J$ для некоторого $J \in \overline{1, t-1}, r$. Тогда по предположению $\beta_J < s+1$, что противоречит доказанному выше равенству $\beta_J = s+1$ для всех J . Итак, $M_1, \dots, M_{s+1} \in \Sigma_1$.

Предположим, что $|D| < s$. Возьмем $x \in M - D$. Тогда $|D \cup \{x\}| \leq s$. Так как $M_1 \cup \dots \cup M_{s+1} = \mathfrak{M}$, то существует $i \in \overline{1, s+1}$ такое, что $D \cup \{x\} \subset M_i$. Но тогда

$$|D| = |M \cap A_1| < |D \cup \{x\}| \leq |M \cap M_i|.$$

По доказанному выше $M_i \in \Sigma_1$, так что последнее неравенство противоречит выбору D . Итак, $|D|=s$.

Тогда $M \in \{M_1, \dots, M_{s+1}\} \subseteq \Sigma_1$, что противоречит предположению об M . Итак, $\Sigma_1 \supseteq \mathfrak{M}^{s+1}$. Так как $\mathfrak{M}^{s+1}$ — максимальная примитивная система, то $\Sigma_1 = \mathfrak{M}^{s+1}$, и теорема доказана.

Из теоремы в качестве простого следствия выведем сформулированную в начале заметки теорему Шпернера.

Введем дополнительные обозначения. Если Σ — система подмножеств множества $\mathfrak{M}$, то положим $\Sigma' = \{\mathfrak{M} - A \mid A \in \Sigma\}$. Пусть, далее, $m(\Sigma) =$

$= \max \{|A| \mid A \in \Sigma\}$. Очевидно,

$$(5) \quad m(\Sigma) + m(\Sigma') \cong |\mathfrak{M}| = n$$

при этом в (5) стоит знак равенства тогда и только тогда, когда $\Sigma = \mathfrak{M}^{m(\Sigma)}$ (так что $\Sigma' = \mathfrak{M}^{m(\Sigma')}$).

Следствие (Шпернер [1]). Если Σ — примитивная система длины $\mu(n)$, то $\Sigma = \mathfrak{M}^s$ или $\mathfrak{M}^{s+1}$.

Доказательство. Очевидно, $|\Sigma| = |\Sigma'|$. Поэтому в случае необходимости Σ можно заменить на Σ' . Если $m(\Sigma) \leq s$, $m(\Sigma') \leq s$, то из (5) следует, что $m(\Sigma) = m(\Sigma')$ и $\Sigma = \mathfrak{M}^s$. Поэтому можем считать, не уменьшая общности, что $m(\Sigma) > s$. Для упрощения обозначений положим $m(\Sigma) = k$.

Пусть

$$\Sigma_k = \{A \in \Sigma \mid |A| = k\}, \quad \Sigma_0 = \bigcup_{A \in \Sigma_k} A^{k-1},$$

$$\Sigma_{00} = (\Sigma - \Sigma_k) \cup \Sigma_0.$$

Так как система Σ примитивна, то, благодаря определению k , примитивной будет также и система Σ_{00} . По условию $|\Sigma_{00}| \leq |\Sigma|$. По теореме $|\Sigma_0| \cong |\Sigma_k|$. Поэтому $|\Sigma_{00}| \cong |\Sigma|$, так что $|\Sigma_{00}| = |\Sigma|$. Но тогда $|\Sigma_k| = |\Sigma_0|$, так что по теореме $\Sigma_k = \mathfrak{M}^{s+1}$. Так как $\Sigma \supseteq \Sigma_k = \mathfrak{M}^{s+1}$ и $\mathfrak{M}^{s+1}$ — максимальная примитивная система, окончательно получаем $\Sigma = \mathfrak{M}^{s+1}$, что и требовалось доказать.

Пусть $\mu_1(n) = \mu(n)$, и предположим, что уже определены числа $\mu_1(n), \dots, \mu_i(n)$. Тогда полагаем $\mu_{i+1}(n) = \max \{|\Sigma| \mid \Sigma \text{ — максимальная примитивная система длины, меньшей } \mu_i(n)\}$.

Задача вычисления чисел $\mu_i(n)$ и характеристики максимальных примитивных систем длины $\mu_i(n)$ имеет важное значение для комбинаторики в связи с широкой применимостью теорем типа Шпернера.

Оценим $\mu_2(n)$. Пусть $A_1 \in \mathfrak{M}^{s+1}$. Образует систему Σ , содержащую A_1 и все те элементы множества $\mathfrak{M}^s$, которые не содержатся во множестве A_1^s . Тогда $|\Sigma| = C_n^s - s = \mu_1(n) - s$. Итак, $\mu_2(n) \cong C_n^s - s = \mu_1(n) - s$.

Положим для системы

$$\Sigma: m(\Sigma) = \max \{|A| \mid A \in \Sigma\},$$

$$d(\Sigma) = \min \{|A| \mid A \in \Sigma\}.$$

Далее отметим, что для биномиальных коэффициентов справедливы такие неравенства

$$(6) \quad s > 1 \Rightarrow C_{2s+1}^{s+1} - C_{2s+1}^{s+2} > s$$

$$(7) \quad s > 2 \Rightarrow C_{2s}^s - C_{2s}^{s+1} > s$$

Следствие 2. Пусть Σ — максимальная примитивная система с $|\Sigma| = \mu_2(n)$, $n > 4$. Тогда $\Sigma \neq \mathfrak{M}^k$ для всех натуральных k и справедливо одно из

утверждений:

- (i) $\Sigma \subset \mathfrak{M}^{s-1} \cup \mathfrak{M}^s$, $\varepsilon = 0$.
- (ii) $\Sigma \subset \mathfrak{M}^s \cup \mathfrak{M}^{s+1}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$.
- (iii) $\Sigma \subset \mathfrak{M}^{s+1} \cup \mathfrak{M}^{s+2}$, $\varepsilon = 1$.

Доказательство. По предположению и теореме Шпернера по крайней мере одно из чисел $m = m(\Sigma)$ и $d = d(\Sigma)$ отлично от $s + \varepsilon$. Заменяя, если нужно, Σ на Σ' , можем, не уменьшая общности, считать, что $m > s$ и $m = \max \{m(\Sigma), m(\Sigma')\}$. Положим $\Sigma_m = \{A \in \Sigma \mid |A| = m\}$, $\Sigma_0 = \bigcup_{A \in \Sigma_m} A^{m-1}$, $\Sigma_{00} = (\Sigma - \Sigma_m) \cup \Sigma_0$. Отметим, что Σ_{00} — максимальная примитивная система.

Предположим, что $m > s + 1 + \varepsilon$. Тогда по теореме Шпернера $|\Sigma_0| > |\Sigma_m|$, так что $\mu_2(n) = |\Sigma| < |\Sigma_{00}| < \mu_1(n)$ (последнее неравенство — по теореме Шпернера), а это противоречит определению чисел $\mu_1(n)$; $\mu_2(n)$. Итак, $m \leq s + 1 + \varepsilon$. По предположению, $m \geq s + 1$. По той же причине $m - d \leq 1$.

Пусть $m = s + 2$. Тогда по сказанному $\varepsilon = 1$, и из неравенства (6) следует $m \neq d$ (очевидно, в этом случае $s > 1$). Это дает случай (iii). Случай (i) двойствен только что рассмотренному.

Пусть $m = s + 1$. Если $d = m$, то по теореме Шпернера $\varepsilon = 0$, и неравенство (7) приводит к противоречию. Итак, $d = s$, и мы получаем случай (ii). Следствие доказано.

В общем случае, если Σ — максимальная примитивная система длины $\mu_{i+1}(n)$, то $m(\Sigma) \leq d(\Sigma) + i$.

Следствие 2 не решает задачи характеристики максимальных примитивных систем длины $\mu_2(n)$. Неясно, для каких n могут реализовываться случаи (i) и (ii) этого следствия.

Отметим такое свойство примитивной системы Σ_1 . Оказывается, Σ_1 можно дополнить до максимальной примитивной системы $\Sigma \subset \Sigma_1 \cup \mathfrak{M}^{d(\Sigma)} \cup \mathfrak{M}^{m(\Sigma)}$ (но, в общем случае, ни одно из двух последних слагаемых справа отбросить нельзя). Далее, если Σ — максимальная примитивная система, то $\bigcup_{A \in \Sigma} A^{d(\Sigma)} = \mathfrak{M}^{d(\Sigma)}$. Для этой же Σ , если $\Sigma_m = \{A \in \Sigma \mid |A| = m\}$, то, как уже отмечалось, $(\Sigma - \Sigma_m) \cup (\bigcup_{A \in \Sigma_m} A^{m(\Sigma)-1})$ — максимальная примитивная система.

Другое доказательство теоремы Шпернера имеется в книге [2]. Там же приведена обширная библиография, посвященная этой тематике.

Литература

- [1] SPERNER, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* **27** (1928), 544—548.
- [2] М. Айгнер, Комбинаторная теория, Москва, Мир, 1982.

344 006. РОСТОВ-ИА-ДОНУ, ЭНГЕЛЬСА 111. кв. 18
БЕРКОВИЧ ТАТЬЯНА ЯКОВЛЕВНА, БЕРКОВИЧ ЯКОВ ГИЛЬЕВИЧ

Поступило: 11. IV. 1986 г.)