

О реализации скрещенных алгебр* в групповых алгебрах над конечными полями

К. БУЗАШИ—З. АБД ЭЛ МОНЕИМ (Дебрецен)

Рассматриваются группы G , содержащие бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. Пусть K — поле с некоторым ограничением на характеристику. В работе [1] было показано, что групповая алгебра KG разлагается в прямую сумму полных матричных колец над так называемыми алгебрами типа E над полем K : скрещенными произведениями некоторого тела F , содержащего в своем центре поле K , либо с бесконечной циклической группой (a) , либо с бесконечной группой диэдра $\mathcal{D}$. Было показано, что изучение конечнопорожденных KG -модулей сводится к изучению таких алгебр типа E над полем K . В работе [2] были описаны все алгебры типа E над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, а в работе [3] — алгебры типа E над произвольным конечным полем K по отношению к любому конечному расширению F поля K .

Естественно поставить вопрос, все ли алгебры типа E над данным полем K требуются при разложении конечнопорожденных KG -модулей на неразложимые прямые слагаемые. В работе [4] было показано, что все вещественные алгебры типа E реализуются в групповых алгебрах групп рассматриваемого класса над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел, то есть для любой фиксированной вещественной алгебры типа E существует такая группа G рассматриваемого класса, вещественная групповая алгебра которой содержит минимальный идеал, который как $\mathbf{R}$ -алгебра изоморфен данной алгебре типа E .

В настоящей работе доказывается, что каждая алгебра типа E над конечным полем K по отношению к любому конечному его расширению F реализуется в групповых алгебрах над полем K .

Для однозначности выпишем все алгебры типа E над полем K по отношению к полю F (см. [3]):

Лемма 1. Пусть K — конечное поле порядка $|K|=p^m$, $p \neq 2$, F — расширение конечной степени $(F: K)=n$ поля K . Если n — нечетное число, то все алгебры типа E над полем K по отношению к полю F задаются соотношениями:

$$E_i = \{F, a\}; \quad a\lambda = \lambda^{p^i} a \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

* Исследования финансирована Венгерским национальным Фондом Научных Исследований кредита № 1813.

где E_0 — групповая алгебра бесконечной циклической группы (a) над полем F , а E_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) — скрещенные групповые алгебры группы (a) над F ,

$$A_1 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda a; \quad b\lambda = \lambda b; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

$$A_2 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda a; \quad b\lambda = b\lambda; \quad b^{-1}ab = \xi a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

$$A_3 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda a; \quad b\lambda = \lambda b; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = \xi,$$

где $\lambda \in F$, ξ — фиксированный квадратный невычет в поле F . A_1 — групповая алгебра бесконечной группы диэдра $\mathcal{D}$ над полем F , а A_2, A_3 — скрещенные групповые алгебры группы $\mathcal{D}$ над F .

Если $n=2k$, то кроме алгебр E_i ($i=0, 1, \dots, n-1$), A_1, A_2 , и A_3 имеются еще три типа алгебр типа E над полем K . Они являются скрещенными групповыми алгебрами группы $\mathcal{D}$ над полем F и задаются соотношениями:

$$A_4 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda a; \quad b\lambda = \lambda^{p^{km}}b; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

$$A_5 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda^{p^{km}}a; \quad b\lambda = \lambda b; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

$$A_6 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda^{p^{km}}a; \quad b\lambda = \lambda^{p^{km}}b; \quad b^{-1}ab = \xi a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

где $\lambda \in F$, ξ — фиксированный квадратный невычет в поле F .

В дальнейшем K и F будут означать поля, заданные в лемме 1, F^* — мультипликативную группу поля F .

Лемма 2. Поле F изоморфно идеалу KF^*e групповой алгебры KF^* , порожденного идемпотентом

$$(1) \quad e = \frac{1}{|F^*|} \sum_{c \in F^*} \chi_{F|K}(c^{-1}) c \in KF^*.$$

Доказательство очевидно, так как отображение $c \rightarrow ce$ ($c \in F$) реализует искомый изоморфизм.

Лемма 3. Пусть H -произвольная группа и

$$H_1 = F^* \times H$$

прямое произведение группы F^* и группы H . Тогда групповая алгебра FH как K -алгебра изоморфна идеалу групповой алгебры KH_1 , порожденному идемпотентом (1).

Доказательство. Согласно лемме 2, идеал KF^*e изоморфен полю F . Тогда каждый элемент x групповой алгебры KH_1 представляется в виде

$$x = \sum_j \lambda'_j h_j \quad (\lambda'_j \in KF^*e, h_j \in H).$$

Отображение

$$\sum_j \lambda'_j h_j \rightarrow \sum_j \lambda_j h_j,$$

где $\lambda_j \in F$ — образ элемента $\lambda'_j \in KF^*e$ при изоморфизме $KF^*e \cong F$, очевидно, является K — изоморфизмом K — алгебр KH_1 и FH . Лемма доказана.

Теорема 1. Для алгебр E_0 и A_1 существуют такие группы G_0 и G_1 , что алгебры E_0 и A_1 соответственно K — изоморфны некоторым идеалам групповых алгебр соответственно KG_0 и KG_1 .

Доказательство. Пусть

$$G_0 = (c) \times (a); \quad G_1 = (c) \times \mathcal{D},$$

где $F^* = (c)$, (a) — бесконечная циклическая группа, а $\mathcal{D}$ — бесконечная группа диэдра.

Пусть идемпотент e задан формулой (1). Согласно лемме 3, групповая алгебра $E_0 = F(a)$ как K — алгебра K — изоморфна идеалу KG_0e групповой алгебры KG_0 . Используя ту же лемму 3, заключаем, что групповая алгебра $A_1 = F\mathcal{D}$ как K — алгебра изоморфна идеалу KG_1e групповой алгебры KG_1 . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть дана алгебра E_i ($i=1, \dots, n-1$) и группа

$$G_i = (c) \cdot (a); \quad a^{-1}ca = c^{p^m},$$

где $(c) = F^*$ и (a) — бесконечная циклическая группа. Тогда идеал KG_ie групповой алгебры KG_i , порожденный идемпотентом e , заданным формулой (1), как K — алгебра K — изоморфен алгебре E_i .

Доказательство. Согласно лемме 2, $\varphi: KF^*e \rightarrow F$ — изоморфизм. Для любого фиксированного i ($i=1, \dots, n-1$) каждый элемент идеала KG_ie запишется в виде

$$\sum_j \alpha_j a^j \quad (\alpha_j \in KF^*e).$$

Тогда отображение

$$\psi: \sum_j \alpha_j a^j \rightarrow \sum_j \varphi(\alpha_j) a^j$$

является K — изоморфизмом K — алгебр KG_ie и E_i . Действительно, отображение ψ взаимно однозначно отображает KG_ie на всю алгебру E_i . Очевидно, оно выдерживает сложение и умножение на элементы поля F . Покажем, что в алгебре KG_ie выполняются соотношения алгебры E_i . Так как

$$\psi(ae) = a; \quad \psi(e) = 1; \quad \psi(ce) \in F,$$

то

$$(ae)^{-1}(ce)(ae) = (a^{-1}ca)e = c^{p^{im}}e = (ce)^{p^{im}}.$$

Отсюда легко получается, что ψ выдерживает умножение, значит является изоморфизмом. Теорема доказана.

Теорема 3. Для алгебры A_2 (соответственно A_3) существует такая группа G_2 (соответственно G_3), что алгебра A_2 (A_3) как K — алгебра K — изоморфна некоторому идеалу групповой алгебры KG_2 (KG_3).

Доказательство. Пусть $H = F^* \cdot x(a)$ — прямое произведение группы $F^* = (c)$ и бесконечной циклической группы (a) . Рассмотрим группы

$$G_2 = H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}c^{-1}; \quad bc = cb,$$

$$G_3 = H \cdot (b); \quad b^{2s} = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad bc = cb; \quad b^2 = c^{-1}; \quad s = p^{n \cdot m} - 1,$$

и идемпотент e , заданный формулой (1). Так как, с точностью до изоморфизма, алгебры A_2 и A_3 не зависят от выбора элемента ξ , то мы предполагаем, что $ce = \xi^{-1}e$ в этих алгебрах.

Сначала покажем, что идеал KG_2e как K — алгебра K — изоморфен алгебре A_2 . Согласно лемме 2, $\varphi: KF^*e \cong F$. Элементы идеала KG_2e представляются в виде

$$\sum_j \alpha_j a^j b^{\delta_j} \quad (\alpha_j \in KF^*e; \delta_j = 0, 1).$$

Рассмотрим отображение

$$(2) \quad \psi: \sum_j \alpha_j a^j b^{\delta_j} \rightarrow \sum_j \alpha'_j a^j b^{\delta_j},$$

где $\alpha'_j = \varphi(\alpha_j) \in F$. Очевидно, ψ взаимно однозначно отображает идеал KG_2e на всю алгебру A_2 . Ясно, что ψ выдерживает сложение и умножение на элементы из поля K . Покажем, что в алгебре KG_2e выполняются те же соотношения, что и в алгебре A_2 , и из этого будет следовать, что ψ выдерживает умножение. Так как

$$\psi(e) = 1; \quad \psi(ae) = a; \quad \psi(be) = b; \quad \psi(ce) = \xi^{-1},$$

то имеем

$$(be)^2 = b^2e = e,$$

$$(be)^{-1}(ae)(be) = (b^{-1}ab)e = a^{-1}c^{-1}e = a^{-1}\xi e = (\xi e)(ae)^{-1}.$$

Значит ψ — K — изоморфизм K — алгебр KG_2e и A_2 .

Покажем теперь, что K — алгебры KG_3e и A_3 также K — изоморфны и их изоморфизм осуществляется отображением (2). Очевидно, для этого достаточно показать, что в алгебре KG_3e выполняются соотношения алгебры A . Так как $ce = \xi^{-1}e$, $b^2 = c^{-1}$, то

$$(be)^2 = b^2e = c^{-1}e = \xi e,$$

$$(be)^{-1}(ae)(be) = (b^{-1}ab)e = a^{-1}e = (ae)^{-1}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть дана алгебра A_4 (см. лемму 1), группа

$$H = (a) \times F^*$$

прямое произведение группы $F^* = (c)$ а бесконечной циклической подгруппой (a) , и задано полупрямое произведение

$$G_4 = H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^{-1}cb = c^{p^{km}},$$

где $n=2k$. Тогда идеал групповой алгебры KG_4 , порожденный идемпотентом $e=e_1+e_2$,

$$(3) \quad \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{|F^*|} \sum_{c \in F^*} \chi_{F|K}(c^{-1}) \cdot c, \\ e_2 &= \frac{1}{|F^*|} \sum_{c \in F^*} \chi_{F|K}(c^{-1}) \cdot c^{km}, \end{aligned}$$

как K — алгебра K — изоморфен алгебре A_4 .

Доказательство. Пусть элемент ξ выбран так в A_4 , что $ce_1 = \xi^{-1}e_1$. Так как $b^{-1}e_1b = e_2$, $b^{-1}e_2b = e_1$, то идеал KF^*e является полем, изоморфным полю F .

Тогда мы можем пользоваться отображением, заданным формулой (2). Покажем, что ψ определяет K — изоморфизм K — алгебр KG_4e и A_4 . Для этого достаточно показать, что соотношения, определяющие A_4 , выполняются также в алгебре KG_4e . Так как

$$\psi(ae) = a; \quad \psi(be) = b; \quad \psi(ce) = \xi^{-1} \in F,$$

то

$$\begin{aligned} (ae)(ce) &= (ce)(ae) \\ (be)^{-1}(ce)(be) &= (b^{-1}cb)e = c^{p^{km}}e = (ce)^{p^{km}}, \\ (be)^{-1}(ae)(be) &= (b^{-1}ab)e = a^{-1}e = (ae)^{-1}, \\ (be)^2 &= b^2e = e. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 5. Для алгебры A_i ($i=5, 6$) существует такая группа G_i , что A_i как K — алгебра K — изоморфна некоторому идеалу групповой алгебры KG_i .

Доказательство. Пусть

$$H = (c) \cdot (a); \quad a^{-1}ca = c^{p^{km}}$$

полупрямое произведение группы $F^* = (c)$ с бесконечной циклической группой (a) . Задасм группы

$$\begin{aligned} G_5 &= H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad bc = cb; \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \\ G_6 &= H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}cb = c^{p^{km}}; \quad b^{-1}ab = c^{-1}a^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим идемпотент $e=e_1+e_2$, где идемпотенты e_1 и e_2 заданы формулами (3). Так как $a^{-1}e_1a = e_2$, $a^{-1}e_2a = e_1$, а в идеале KG_6e также $b^{-1}e_1b = e_2$, $b^{-1}e_2b = e_1$, то идеал $K(c)e$ является полем, изоморфным полю F . Поэтому можем пользоваться отображением ψ , заданным формулой (2), для установления K — изоморфизмов

$$KG_5e \rightarrow A_5 \quad \text{и} \quad KG_6e \rightarrow A_6.$$

Так как в обоих случаях

$$\psi(ae) = a; \quad \psi(be) = b; \quad \psi(e) = 1; \quad \psi(ce) = \xi^{-1},$$

то, в случае идеала KG_5e имеем

$$\begin{aligned}(ae)^{-1}(ce)(ae) &= (a^{-1}ca)e = c^{p^{km}}e = (ce)^{p^{km}}, \\ (be)(ce) &= (ce)(be), \\ (be)^{-1}(ae)(be) &= (b^{-1}ab)e = a^{-1}e = (ae)^{-1}, \\ (be)^2 &= b^2e = e,\end{aligned}$$

а в случае идеала KG_6e :

$$\begin{aligned}(ae)^{-1}(ce)(ae) &= c^{p^{km}}e = (ce)^{p^{km}}, \\ (be)^{-1}(ce)(be) &= c^{p^{km}}e = (ce)^{p^{km}}, \\ (be)^{-1}(ae)(be) &= c^{-1}a^{-1}e = (\xi e)(ae)^{-1}, \\ (be)^2 &= e,\end{aligned}$$

так как в случае $e = e_1 + e_2$ имеет место равенство $c^{-1}e = \xi e$. Отсюда в обоих случаях следует K — изоморфизм соответствующих K — алгебр. Теорема доказана.

Литература

- [1] С. Д. Берман—К. Бузаши, О модулях над групповыми алгебрами групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Studia Sci. Math. Hungarica*, **16** (1981), 455—470.
- [2] С. Д. Берман—К. Бузаши, Описание всех конечномерных вещественных представлений групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **31** (1984), 133—144.
- [3] К. Бузаши—Т. Краус, Описание скрещенных групповых алгебр над конечными полями. *Acta Sci. Math.* (Появляется).
- [4] К. Бузаши, О вещественных групповых алгебрах групп с бесконечной циклической подгруппой конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **32** (1985), 267—276.
- [5] Ч. Кертис—И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. *Изд. Наука*, 1969.
- [6] A. A. ALBERT, Structure of algebras. *Amer. Math. Soc.*, 1939.

(Поступило 25. III. 1986 г.)