

Schall- und Brechungsfronten an ebenen Kurven

Von HANS SACHS (Leoben) und G. KARÁNÉ (Leoben)

Abstract. In applied acoustic or optics the following problem is very important: Given a plane curve c , a sound resp. light point S and a time component L_0 . If every sonic or light ray is reflected or refracted on c in such a way, that holds $\overline{SP} + \overline{PY_1} = L_0$ (P is a point of c) resp. $\overline{SP} + \overline{PY_2} = L_0$, the set of points Y_1 resp. Y_2 define a curve $\tilde{c}_1$ resp. $\tilde{c}_2$, called the reflective curve (sonic wave front) resp. the refractive curve of c with respect to the centre S and the time component L_0 . At first we derive parametric representations of $\tilde{c}_1$ resp. $\tilde{c}_2$ in connection with the first and second central curve k_1 resp. k_2 . We show that k_2 is the counter-point curve of the point S with regard to the evolute c^* of c . We investigate the corresponding catacaustic h and give a geometrical construction of the contact point of h with the reflected ray, if the point S and the pedal curve with regard to the reflected rays are known. Furthermore we give a kinematical generation of the refractive curves $\tilde{c}_2$, using the second central curve k_2 and the catacaustic h . Finally we investigate – as an application – the special cases, if c is a straight line (in this case the curves $\tilde{c}_2$ are conchoids of NIKOMEDES) or a circle (in this case the curves $\tilde{c}_2$ are rather complicated, the catacaustic h is the evolute of a PASCAL limaçon).

Bei verschiedenen Anwendungen in der Akustik oder Optik ist das folgende Problem von großer Bedeutung: Gegeben ist eine *ebene Kurve* c , eine *Schall-* bzw. *Lichtquelle* S und eine *Zeitkomponente* L_0 . Jeder von S ausgehende Schall- bzw. Lichtstrahl wird dann an der Kurve c so reflektiert, daß der Winkel ω zwischen der Geraden SP und der Kurvennormalen n gleich dem Winkel zwischen n und dem reflektierten Strahl PY_1 bzw. dem gebrochenen Strahl PY_2 ist (vgl. Abbildung 1). Wird dann die konstante

Mathematics Subject Classification: 53A04, 78A99.

Key words and phrases: reflections and refractions with respect to plane curves, first and second central curve, refractive curves, catacaustic, pedal curve with regard to the reflected rays, refractive curves with respect to a straight line or a circle.

Länge L_0 von S aus so abgetragen, daß $\overline{SP} + \overline{PY_1} = L_0$ bzw. $\overline{SP} + \overline{PY_2} = L_0$ gilt, so wird damit eindeutig ein Punkt Y_1 bzw. Y_2 definiert. Ist im Punkt $P \in c$ die Krümmung κ der Kurve c negativ (vgl. Abbildung 1), dann liegt Y_1 auf dem negativen Ufer der Tangente t in P , während Y_2 auf dem positiven Ufer liegt (vgl. [4, 27f]), falls S auf dem negativen Ufer von t liegt. Liegt S auf dem positiven Ufer von t , dann ist die Situation gerade umgekehrt. Eine analoge Aussage gilt für $\kappa > 0$.

Abbildung 1.

Die Punkte Y_1 bzw. Y_2 bilden bei Veränderung des Punktes P (und so des Schallstrahls SP) eine Kurve $\tilde{c}_1$ bzw. $\tilde{c}_2$, die man als *Schallfront* (vgl. [8], [9]) bzw. *Brechungsfront* zur Länge L_0 bezüglich S und der Kurve c bezeichnet. Wird c um eine Achse a gedreht, auf der S liegt, so entsteht eine Drehfläche Ψ und durch Drehung von $\tilde{c}_1$ entsteht die zugehörige Schallfl  che $\tilde{\Psi}_1$, die in der Bauakustik eine wichtige Rolle spielt (vgl. [1], [2], [5]–[7], [11]).

Wir verwenden gemäß Abbildung 1 ein kartesisches Koordinatensystem $\{U; x, y\}$, in dem der Punkt S die Koordinaten $S(a, b)$ besitzt und die Ausgangskurve c durch die Parameterdarstellung

$$(1) \quad \vec{x} = \vec{x}(t) = \{x(t), y(t)\}$$

beschrieben wird. Wir benützen weiter den Tangenteneinheitsvektor $\vec{t}$ und den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$, der Kurve c , d.h.

$$(2) \quad \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \{\dot{x}, \dot{y}\}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \{-\dot{y}, \dot{x}\},$$

sowie den Einheitsvektor $\vec{v}$ der Richtung $\overrightarrow{SP}$, d.h. den Vektor

$$(3) \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \{x-a, y-b\}.$$

Für den Einheitsvektor $\vec{s}_1$ der Richtung $\overrightarrow{PY_1}$ gilt nach Abbildung 1 ersichtlich $\vec{s}_1 + (-\vec{v}) = 2 \cos \omega (-\vec{n})$, während sich für den Einheitsvektor $\vec{s}_2$ der Richtung $\overrightarrow{PY_2}$ die Beziehung $\vec{s}_2 + \vec{v} = 2 \cos \omega \vec{n}$ einstellt. Setzen wir für den ersten Fall $\varepsilon = 1$ und für den zweiten Fall $\varepsilon = -1$, dann erhält man

$$(4) \quad \vec{s} = \varepsilon (-2 \cos \omega \vec{n} + \vec{v}),$$

wobei $\vec{s} = \vec{s}_1$ für $\varepsilon = 1$ und $\vec{s} = \vec{s}_2$ für $\varepsilon = -1$ gesetzt wurde. Besitzt Y_i ($i = 1, 2$) die Koordinaten $Y_i(\xi_i, \eta_i)$ und wird $\overrightarrow{UY} = \vec{y}$ gesetzt, so gilt $\overrightarrow{PY}_i = \rho \vec{s}$, wobei man $\rho > 0$ aus der Beziehung $|\overrightarrow{SP}| + |\overrightarrow{PY}_i| = |\overrightarrow{SP}| + \rho = L_0$ zu $\rho = L_0 - |\overrightarrow{SP}|$ berechnet. Mit $|\overrightarrow{PY}_i| = (L_0 - |\overrightarrow{SP}|) \vec{s}$ ergibt sich damit

$$(5) \quad \vec{y}_i = \overrightarrow{UY}_i = \vec{x} + \left(L_0 - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right) \vec{s}.$$

Beachtet man noch, daß $\cos \omega$ gemäß (2) und (3) durch

$$(6) \quad \cos \omega = \vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} [(a-x)\dot{y} + (y-b)\dot{x}]$$

bestimmt ist, dann kann $\vec{s}$ gemäß (4) mittels (3) berechnet werden. Man erhält

$$(7) \quad \vec{s} = \varepsilon \left(\frac{2[(x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}]}{W_1^2 W_2} \{-\dot{y}, \dot{x}\} + \frac{1}{W_2} \{x-a, y-b\} \right),$$

wobei die beiden Abkürzungen

$$(8) \quad W_1 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad W_2 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

verwendet wurden. Hieraus gewinnt man nach einiger Rechnung als *Parameterdarstellung der Schallfront* ($\varepsilon = 1$) bzw. *Brechungsfront* ($\varepsilon = -1$)

$$(9) \quad \begin{aligned} \xi &= x(1 - \varepsilon) + \varepsilon a + \frac{2\dot{y}[(x - a)\dot{y} - (y - b)\dot{x}]}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \left(1 - \frac{L_0}{W}\right) + \frac{\varepsilon L_0(x - a)}{W_2} \\ \eta &= y(1 - \varepsilon) + \varepsilon b - \frac{2\varepsilon\dot{x}[(x - a)\dot{y} - (y - b)\dot{x}]}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \left(1 - \frac{L_0}{W_2}\right) + \frac{\varepsilon L_0(y - b)}{W_2}. \end{aligned}$$

Durch Absonderung von L_0 l   t sich (8) in der Gestalt

$$(10) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{\varepsilon a(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + (1 + \varepsilon)x\dot{y}^2 - 2\varepsilon y\dot{x}\dot{y} + 2\varepsilon b\dot{x}\dot{y} + (1 - \varepsilon)x\dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ &\quad + \varepsilon \frac{L_0}{W_2} \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(x - a) + 2\dot{x}\dot{y}(y - b)}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \eta &= \frac{\varepsilon b(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) + (1 + \varepsilon)y\dot{x}^2 - 2\varepsilon x\dot{x}\dot{y} + 2\varepsilon a\dot{x}\dot{y} + (1 - \varepsilon)y\dot{y}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ &\quad + \varepsilon \frac{L_0}{W_2} \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(b - y) + 2\dot{x}\dot{y}(x - a)}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{aligned}$$

schreiben. F  r $\varepsilon = 1$ gewinnt man aus (10) die Formel

$$(11) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{a(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + 2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x}) + 2b\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ &\quad + \frac{L_0}{W} \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(b - y) + 2\dot{x}\dot{y}(x - a)}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \eta_1 &= \frac{-b(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - 2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) + 2a\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ &\quad + \frac{L_0}{W} \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(b - y) + 2\dot{x}\dot{y}(x - a)}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \end{aligned}$$

die wir schon in [8] hergeleitet hatten. F  r $\varepsilon = -1$ erhält man die *Brech-*

nungsfront $\tilde{c}$ zu

$$(12) \quad \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{-a(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + 2\dot{x}(x\dot{x} + y\dot{y}) - 2b\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ &\quad - \frac{L_0}{W_2} \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(x - a) + 2\dot{x}\dot{y}(y - b)}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \eta_2 &= \frac{b(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + 2\dot{y}(x\dot{x} + y\dot{y}) - 2a\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ &\quad - \frac{L_0}{W_2} \frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(b - y) + 2\dot{x}\dot{y}(x - a)}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \end{aligned}$$

Mittels Computer lassen sich aus (11) bzw. (12) die Schall- bzw. Brechungsfronten auch bei allgemeiner Lage des Punktes S rasch bestimmen. Liegt das Schall- bzw. Lichtzentrum S im Koordinatenursprung, dann vereinfacht sich (10) wegen $a = b = 0$ zu

$$(13) \quad \begin{aligned} \xi_i &= \frac{(1+\varepsilon)x\dot{y}^2 - 2\varepsilon y\dot{x}\dot{y} + (1-\varepsilon)x\dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \varepsilon \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + 2y\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \eta_i &= \frac{(1+\varepsilon)y\dot{x}^2 - 2\varepsilon x\dot{x}\dot{y} + (1-\varepsilon)y\dot{y}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \varepsilon \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{y(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) + 2x\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon = 1$ stellt sich die Formel (12) aus [8] ein, während sich für $\varepsilon = -1$ ergibt

$$(14) \quad \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{2\dot{x}(x\dot{x} + y\dot{y})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + 2y\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \eta_2 &= \frac{2\dot{y}(x\dot{x} + y\dot{y})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{y(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) + 2x\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \end{aligned}$$

Besonders einfach wird die Parameterdarstellung von $\tilde{c}_2$, wenn man c auf die Bogenlänge s als Parameter bezieht, d.h.

$$(15) \quad \dot{x} + \dot{y}^2 = 1$$

vorausgesetzt; man gewinnt dann aus (15) – wenn Striche Ableitungen nach der Bogenlänge bezeichnen –

$$(16) \quad \begin{aligned} \xi_2 &= 2x'(xx' + yy') - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} [x(x'^2 - y'^2) + 2yx'y'] \\ \eta_2 &= 2y'(xx' + yy') - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} [y(y'^2 - x'^2) + 2xx'y']. \end{aligned}$$

Den von L_0 freien Bestandteil in (13) bezeichnen wir als *Zentralkurve* k_i ($i = 1, 2$). Für $\varepsilon = 1$ stellt sich die Zentralkurve k_1 mit der Darstellung

$$(17) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \eta_1 &= -\frac{2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \end{aligned}$$

ein. Als Hauptergebnis wurde dann in [8] gezeigt:

Satz 1. *Die Zentralkurve k_1 ist die Gegenpunktkurve zur Ausgangskurve c bezüglich der Schallquelle S ; sie schneidet alle reflektierten Strahlen orthogonal. Die Schallfronten $\tilde{c}$ und die Parallelkurven zu k_1 im Abstand L_0 .*

Die *Gegenpunktkurve* k_1 (vgl. [4, 40]) entsteht hierbei durch Spiegelung von S an allen Tangenten t von c . Die Fußpunkte N_1 der Normalen von S auf die Tangente t bilden die *Fußpunktkurve* (vgl. Abbildung 2).

Die Zentralkurve k_2 besitzt die Parameterdarstellung

$$(18) \quad \xi_2 = \frac{2\dot{x}(x\dot{x} + y\dot{y})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad \eta_2 = \frac{2\dot{y}(x\dot{x} + y\dot{y})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

die sich bei natürlicher Parametrisierung von c zu

$$(19) \quad \begin{aligned} \xi_2 &= 2x'(xx' + yy') \\ \eta_2 &= 2y'(xx' + yy') \end{aligned}$$

vereinfacht. Legen wir von S die Normale auf die Kurvennormale n des Punktes P mit der Gleichung $\xi x' + \eta y' = xx' + yy'$, so schneidet diese die Gerade n in einem Punkt N_2 mit den Koordinaten

$$(20) \quad N_2 [x'(xx' + yy'), y'(xx' + yy')],$$

Abbildung 2.

d.h. man erhält einen Punkt G_2 der Zentralkurve k_2 , indem man den Punkt S an der Geraden n spiegelt (vgl. Abbildung 2). Somit ist die Kurve k_2 die *Gegenpunktkurve der Evolute* c^* von c bezüglich S . Der Gegenpunkt G_1 von k_1 und der Punkt G_2 liegen zentrisch symmetrisch zum Punkt P . Betrachten wir den aus (16) gebildeten Vektor $\vec{v} = \{v_1, v_2\}$ mit

$$(21) \quad \begin{aligned} v_1 &:= x(x'^2 - y'^2) + 2yx'y' \\ v_2 &:= y(y'^2 - x'^2) + 2xx'y', \end{aligned}$$

so kann man diesen wegen (15) vereinfachen zu

$$(22) \quad v_1 = x - 2y'\Delta_1 \quad v_2 = y + 2x'\Delta_1$$

mit $\Delta_1 := xy' - yx'$. Hieraus folgt $v_1^2 + v_2^2 = x^2 + y^2 = W_2^2$. Damit ist gezeigt, daß der in (16) auftretende Vektor $\vec{v}^* = \{v_1^*, v_2^*\}$ mit

$$(23) \quad \begin{aligned} v_1^* &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} [x(x'^2 - y'^2) + 2yx'y'] \\ v_2^* &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} [y(y'^2 - x'^2) + 2xx'y'] \end{aligned}$$

ein Einheitsvektor auf den gespiegelten Strahlen ist. Demnach gewinnt man die zu L_0 gehörige Brechungsfront, indem man von k_2 aus auf allen gespiegelten Strahlen den Abstand L_0 abträgt. Die Kurve $\tilde{c}_2$ ist somit eine *äquidistante Kurve* im Abstand L_0 zu k_2 . Wir fassen zusammen im

Satz 2. Die Zentralkurve k_2 für eine Brechung an einer Kurve c bezüglich eines Zentrums S ist die Gegenpunktkurve von S bezüglich der Evolute c^* von c . Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ von S bezüglich c sind die äquidistanten Kurven im Abstand L_0 zu k_2 auf den gespiegelten Strahlen.

Für viele Überlegungen ist auch die *Fußpunktkurve* f von S bezüglich der reflektierten Strahlen $g = SY$ bzw. die *Katakaustik* h dieser Strahlen von Interesse (vgl. [14, 180]). Man erhält einen Punkt L von f , wenn man von S die Normale n_1 auf g legt und diese mit g schneidet (vgl. Abbildung 3). Mittels (22) findet man die Gleichung von g zu

$$(24) \quad \xi v_2 - \eta v_1 = xv_2 - yv_1$$

und damit ergibt sich $L \left[\frac{(xv_2 - yv_1)v_2}{v_1^2 + v_2^2}, -\frac{(xv_2 - yv_1)v_1}{v_1^2 + v_2^2} \right]$. Wegen $v_1^2 + v_2^2 = x^2 + y^2$ stellt sich mit der Abkürzung $\Delta_2 = xx' + yy'$ schließlich für f ein

$$(24) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{2\Delta_1\Delta_2(y + 2x'\Delta_1)}{x^2 + y^2} \\ \eta &= -\frac{2\Delta_1\Delta_2(x - 2y'\Delta_1)}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Die Hüllkurve h der Geradenschar $\{g\}$ ist die *Katakaustik* bezüglich S . Zur Bestimmung des H  llpunktes H auf g setzen wir mit den Bezeichnungen der Abbildung 3 die Gerade g in der Gestalt

$$(26) \quad g \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha = l$$

an, wobei $l = \overline{SL}$ und der Winkel α Funktionen des Parameters s auf c sind. H wird dann als Schnittpunkt von g mit der zu g orthogonalen Geraden g'

$$(27) \quad \frac{\partial g}{\partial s} \equiv -x \sin \alpha + y \cos \alpha = \frac{l'}{\alpha'}$$

erhalten. Eine einfache Rechnung ergibt für den H  llpunkt

$$(28) \quad H \left[\frac{l\alpha' \cos \alpha - l' \sin \alpha}{\alpha'}, \frac{l\alpha' \sin \alpha + l' \cos \alpha}{\alpha'} \right].$$

Abbildung 3.

Der Fußpunkt L besitzt bei dieser Koordinatisierung die Koordinaten $L(l \cos \alpha, l \sin \alpha)$. Hieraus ergibt sich für den Tangentenvektor $\vec{t}_f$ der Fußpunktkurve f

$$(29) \quad \{l' \cos \alpha - l\alpha' \sin \alpha, l' \sin \alpha + l\alpha' \cos \alpha\}$$

und man erhält für den Schnittpunkt T der Normalen von S auf $\vec{t}_f$ mit g nach einfacher Rechnung

$$(30) \quad T \left[\frac{(l' \sin \alpha + l\alpha' \cos \alpha)}{\alpha'}, \frac{-l' \cos \alpha + l\alpha' \sin \alpha}{\alpha'} \right].$$

Ersichtlich liegen H und T symmetrisch zum Punkt L . Damit ergibt sich der

Satz 3. *Der Hüllpunkt H der Katakaustik h auf g wird erhalten, indem man vom Zentrum S die Normale auf die Tangente t_f der Fußpunktkurve f in L zeichnet, diese mit g im Punkt T zum Schnitt bringt, und den Punkt T an L spiegelt. Die Fußpunktkurve f wird durch (25) festgelegt.*

Erheblich umfangreicher ist die analytische Bestimmung der Katakaustik h . Wir beachten dazu, daß h die Evolute der Gegenpunktkurve k_1 ist und

daher nach [10, 65] mittels

$$(31) \quad \begin{aligned} X &= \xi_1 - \dot{\eta}_1 \frac{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2}{\dot{\xi}_1 \ddot{\eta}_1 - \dot{\eta}_1 \ddot{\xi}_1} \\ Y &= \eta_1 + \dot{\xi}_1 \frac{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2}{\dot{\xi}_1 \ddot{\eta}_1 - \dot{\eta}_1 \ddot{\xi}_1} \end{aligned}$$

berechnet wird, wobei nach (17) $\xi_1 = 2y'\Delta_1$, $\eta_1 = -2x'\Delta_1$ gilt. Mit den schon benutzten Abkürzungen $\Delta_1 = xy' - yx'$, $\Delta_2 = xx' + yy'$ sowie den bekannten Formeln $x'' = -\kappa y'$, $y'' = \kappa x'$, $x''' = -\kappa^2 x' - \kappa' y'$, $y''' = -\kappa^2 y' + \kappa' x'$ – wobei κ die Krümmung der Kurve c bezeichnet – leitet man zunächst die folgenden Formeln ab:

$$(32) \quad \begin{aligned} \Delta_1' &= \kappa \Delta_2, \quad \Delta_2' = 1 - \kappa \Delta_1, \\ \Delta_1'' &= \kappa' \Delta_2 + \kappa - \kappa^2 \Delta_1, \quad \Delta_2'' = -\kappa' \Delta_1 - \kappa^2 \Delta_2, \\ \Delta_1^2 + \Delta_2^2 &= x^2 + y^2, \quad (\Delta_1 \Delta_2)' = \kappa(\Delta_2^2 - \Delta_1^2) + \Delta_1. \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich $\frac{1}{4}(\xi_1'^2 + \eta_1'^2) = \Delta_1^2(x''^2 + y''^2) + \Delta_1'^2 = \kappa^2(x^2 + y^2)$. Wir vermerken

$$(33) \quad \xi_1'^2 + \eta_1'^2 = 4\kappa^2(x^2 + y^2).$$

Weiter findet man $\frac{1}{4}(\xi_1' \eta_1'' - \eta_1' \xi_1'') = \kappa^3 \Delta_1^2 - \kappa \Delta_1 \Delta_1'' + \kappa' \Delta_1 \Delta_1' + 2\kappa \Delta_1'^2 = \kappa^2[2(x^2 + y^2) - \Delta_1]$, also

$$(34) \quad \xi_1' \eta_1'' - \eta_1' \xi_1'' = 4\kappa^2[2\kappa(x^2 + y^2) - \Delta_1]$$

und weiter

$$(35) \quad \frac{\xi_1'^2 + \eta_1'^2}{\xi_1' \eta_1'' - \eta_1' \xi_1''} = \frac{x^2 + y^2}{2\kappa(x^2 + y^2) - \Delta_1}.$$

Durch Einsetzen von (35) in (31) erhält man schließlich nach einer Vereinfachung

$$(36) \quad \begin{aligned} X &= \frac{2\kappa x(x^2 + y^2) - 2y'\Delta_1^2}{2\kappa(x^2 + y^2) - \Delta_1} \\ Y &= \frac{2\kappa y(x^2 + y^2) + 2x'\Delta_1^2}{2\kappa(x^2 + y^2) - \Delta_1} \end{aligned}$$

mit $\kappa = x'y'' - y'x''$. Ist die Kurve c auf einen allgemeinen Parameter t bezogen, so lautet (36) wegen $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ausführlich

$$(37) \quad \begin{aligned} X &= \frac{2x(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})(x^2 + y^2) - 2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{2(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})(x^2 + y^2) - (x\dot{y} - y\dot{x})(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \\ Y &= \frac{2y(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})(x^2 + y^2) + 2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{2(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})(x^2 + y^2) - (x\dot{y} - y\dot{x})(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}. \end{aligned}$$

Für praktische Auswertungen muß auch die Fupunktkurve f auf eine allgemeine Parametrisierung von c umgerechnet werden. Man erhält

$$(38) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{2(x\dot{y} - y\dot{x})(x\dot{x} + y\dot{y})[y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x})]}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2(x^2 + y^2)} \\ \eta &= -\frac{2(x\dot{y} - y\dot{x})(x\dot{x} + y\dot{y})[x(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x})]}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2(x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit die folgende kinematische Erzeugung der Brechungsfronten im

Satz 4. Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ einer Kurve c bezüglich eines Zentrums S können als Bahnkurven der Punkte P einer Geraden g erzeugt werden, von der ein Punkt G_2 auf der Zentralkurve k_2 (18) läuft, während g beständig die Katakaustik h (37) berührt; dabei gilt $L_0 = \overline{G_2P}$.

Wir betrachten als *erste Anwendung* den Fall einer Geraden c , die wir durch $\{x = c_0, y = t\}$ beschreiben, wobei wir das Zentrum S in den Koordinatenursprung legen. Die Schallfronten $\tilde{c}_1$ haben wir schon in [8] bestimmt. Als Gegenpunktkurve k_2 stellt sich die Gerade $\xi_2 = 0$, d.h. die y -Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems ein, während k_1 zum Punkt $K_1(2c_0, 0)$ degeneriert, der gleichzeitig die Katakaustik ist. Mittels (14) erhält man nach kurzer Rechnung für die Brechungsfronten die Parameterdarstellung

$$(39) \quad \begin{cases} \xi_2 = \frac{L_0 c_0}{\sqrt{c_0^2 + t^2}} \\ \eta_2 = 2t - \frac{L_0 t}{\sqrt{c_0^2 + t^2}}, \end{cases}$$

Abbildung 4.

woraus unschwer die algebraische Kurvengleichung

$$(40) \quad \xi_2^2[(\xi_2^2 + \eta_2^2) - 4c_0\xi_2 + 4c_0^2] = L_0^2(\xi - 2c_0)^2$$

fließt. Dies sind die *Konchoiden der Geraden* k_2 bezüglich des Punktes K_2 (vgl. [3, 231], [13, 114]).

Die Abbildung 4 zeigt die geometrische Situation, wo die Kurven $\tilde{c}_2$ als Bahnkurven einer *einfach geschränkten Winkelschleife* erzeugt werden (vgl. [13, 112]).

Die Fupunktkurve f ist der Kreis über dem Durchmesser $\overline{SK_1}$. Wir vermerken den

Satz 5. *Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ einer Geraden c bezüglich eines Zentrums S lassen sich als Bahnkurven einer einfach geschränkten Winkelschleife erzeugen, deren Leitgerade k_2 eine Parallele zu c durch S ist und deren Lagerpunkt K_1 durch Spiegelung von S an c entsteht. Diese Brechungsfronten sind Konchoiden des Nikomedes.*

Als *zweite Anwendung* betrachten wir den Fall eines Kreises c , den wir in der Gestalt

$$(41) \quad \begin{aligned} x &= a + r \cos t \\ y &= r \sin t \end{aligned}$$

parametrisieren, während wir das Zentrum S in den Koordinatenursprung legen. Die Schallfronten bezüglich S wurden schon in [8] betrachtet. Bestimmen wir hier zunächst die Gegenpunktkurve k_2 und die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$! Mit $\dot{x} = -r \sin t, \dot{y} = r \cos t$ findet man zunächst für die Gegenpunktkurve k_2 nach (18) die Parameterdarstellung

$$(42) \quad \begin{aligned} \xi_2 &= 2a \sin^2 t \\ \eta_2 &= -2a \sin t \cos t \end{aligned}$$

und damit die algebraische Gleichung

$$(43) \quad (\xi_2 - a)^2 + \eta_2^2 = a^2.$$

Dies ist ein zum Ausgangskreis c *konzentrischer Kreis vom Radius a* , d.h. ein Kreis k_2 , der das Zentrum S enthält (vgl. Abbildung 5). Für die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ erhält man nach (14) wegen $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2$, $x^2 + y^2 = a^2 + 2ar \cos t + r^2$, $\dot{x}^2 - \dot{y}^2 = -r^2 \cos 2t$ nach einiger Rechnung die Parameterdarstellung

$$(44) \quad \begin{cases} \xi_2 = 2a \sin^2 t + \frac{L_0(a \cos 2t + r \cos t)}{\sqrt{r^2 + a(a + 2r \cos t)}} \\ \eta_2 = -a \sin 2t + \frac{L_0(a \sin 2t + r \sin t)}{\sqrt{r^2 + a(a + 2r \cos t)}}. \end{cases}$$

Nach Anwendung der Schiebung $\{\tilde{\xi} = \xi_2 - a, \tilde{\eta} = \eta_2\}$ läßt sich (44) in der einheitlicheren Gestalt

$$(45) \quad \begin{cases} \tilde{\xi} = -a \cos 2t + \frac{L_0(a \cos 2t + r \cos t)}{\sqrt{r^2 + a(a + 2r \cos t)}} \\ \tilde{\eta} = -a \sin 2t + \frac{L_0(a \sin 2t + r \sin t)}{\sqrt{r^2 + a(a + 2r \cos t)}}. \end{cases}$$

Abbildung 5.

schreiben. Zur Bestimmung der Ordnung dieser Kurven bilden wir aus (45) $\zeta = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta}$ unter Beachtung von $2ar \cos t = ar(e^{it} + e^{-it})$ und erhalten

$$(46) \quad \zeta = -ae^{2it} + L_0 \frac{ae^{2it} + re^{it}}{\sqrt{a^2 + r^2 + ar(e^{it} + e^{-it})}}.$$

Setzt man in (46) $e^{it} =: u$, dann lautet diese Gleichung in *Minimalkoordinaten*

$$(47) \quad \begin{aligned} \zeta &= -au^2 + L_0 \frac{au^2 + ru}{\sqrt{a^2 + r^2 + ar(u + u^{-1})}} \\ \bar{\zeta} &= -au^{-2} + L_0 \frac{au^{-2} + ru^{-1}}{\sqrt{a^2 + r^2 + ar(u^{-1} + u)}} \end{aligned}$$

und durch Einsetzen in eine Geradengleichung $\bar{A}\zeta + A\bar{\zeta} + \gamma = 0$ ($\gamma \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C}$) erhält man nach einiger Rechnung ein Polynom von Grad 9 in u mit dem höchsten Glied $\bar{A}^2 a^2 (a^2 + r^2 + ar - L_0)$, d.h. für $a \neq 0$ und $a^2 + r^2 + ar \neq L_0$ sind die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ *algebraische Kurven 9. Ordnung*.

Eine Vereinfachung ergibt sich im Sonderfall $a = r$, d.h. wenn S auf dem Kreis c liegt. Wegen $2a^2 + a^2(e^{it} + e^{-it}) = a^2(e^{\frac{1}{2}it} + e^{-\frac{1}{2}it})^2$ folgt dann aus (46) $\zeta = -ae^{2it} + L_0 e^{\frac{3}{2}it}$ bzw. mit $\frac{1}{2}t = u$

$$(48) \quad \zeta = -ae^{4iu} + L_0 e^{3iu}.$$

Dies sind Radlinien 2. Stufe der Charakteristik $\omega_1 : \omega_2 = 4 : 3$, d.h. algebraische Kurven 8. Ordnung (vgl. [13, 151]). Eine Parameterdarstellung von (48) lautet

$$(49) \quad \begin{aligned} \xi_2 &= -a \cos 4u + L_0 \cos 3u \\ \eta_2 &= -a \sin 4u + L_0 \sin 3u. \end{aligned}$$

Wir bestimmen abschließend mittels (37) eine Parameterdarstellung der Katakaustik h . Nach längerer Rechnung stellt sich ein

$$(50) \quad \begin{aligned} X &= \frac{2[a(a^2 + r^2) + a^2 r(3 \cos t - \cos^3 t)]}{2a^2 + r^2 + 3ar \cos t} \\ Y &= \frac{2a^2 r \sin^3 t}{2a^2 + r^2 + 3ar \cos t}. \end{aligned}$$

Nach Anwendung der Schiebung $\{\bar{X} = X - 2a, \bar{Y} = Y\}$ läßt sich (50) in der einfacheren Gestalt

$$(51) \quad \begin{aligned} \bar{X} &= -\frac{2a^2(a + r \cos^3 t)}{2a^2 + r^2 + 3ar \cos t} \\ \bar{Y} &= \frac{2a^2 r \sin^3 t}{2a^2 + r^2 + 3ar \cos t} \end{aligned}$$

schreiben. Wie in [12, 101] mit synthetischen Methoden gezeigt wurde, sind die Kurven (51) *Evoluten von PASCAL-Schnecken*. Geht man in der Tat von einer PASCAL-Schnecke σ mit der Parametrisierung

$$(52) \quad \begin{aligned} x &= 2(a + b \cos \varphi) \cos \varphi \\ y &= 2(a + b \cos \varphi) \sin \varphi \end{aligned}$$

aus, so erhält man gemäß (31) nach einiger Rechnung die Evolute von σ in der Gestalt

$$(53) \quad \begin{aligned} X &= \frac{2[b(a^2 + b^2) + ab^2(3 \cos \varphi - \cos^3 \varphi)]}{2b^2 + a^2 + 3ab \cos \varphi} \\ Y &= \frac{2b^2 a \sin^3 \varphi}{2b^2 + a^2 + 3ab \cos \varphi} \end{aligned}$$

und diese Parameterdarstellung stimmt mit (50)   berein, wenn man $t = \varphi$, $b = a$ und $a = r$ setzt. Die Evolute (50) gehört somit zu einer PASCAL-Schnecke, deren *konchoidaler Leitkreis* mit dem Kreis k_2 übereinstimmt, während die Konchoidenstrecke genau $2r$ beträgt. Wir fassen einiges zusammen im

Staz 6. Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ eines Kreises c vom Radius r bezüglich eines Zentrums $S \notin c$ sind algebraische Kurven 9. Ordnung mit der Darstellung (44). Die Gegenpunktkurve k_2 ist ein zu c konzentrischer Kreis, der das Zentrum S enthält. Die Katakaustik h ist die Evolute (50) einer PASCAL-Schnecke σ , die man durch Konchoidenbewegung längs k_2 erzeugen kann, wobei der Schleifpunkt in S liegt, k_2 der konchoidale Leitkreis ist und die Konchoidenstrecke $2r$ beträgt. Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ lassen sich als Bahnkurven der Punkte P einer Geraden g erzeugen, von der ein Punkt G_2 auf dem Kreis k_2 läuft, während g beständig die Evolute h der PASCAL-Schnecke σ berührt.

Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich im Sonderfall $a = r$. In diesem Fall vereinfacht sich (50) zu

$$(54) \quad \begin{aligned} X &= a + \frac{2a}{3} \cos u - \frac{a}{3} \cos 2u \\ Y &= \frac{2a}{3} \sin u - \frac{a}{3} \sin 2u \end{aligned}$$

und diese Kurve ist eine KARDIOIDE (vgl. [14, 262]), ebenso auch die Ausgangskurve σ . Nach Anwendung der Schiebung $\{X = x + a, Y = y\}$ lautet (54) in impliziter Form

$$(55) \quad 27(x^2 + y^2)^2 - 18a^2(x^2 + y^2) + 8a^3x - a^4 = 0.$$

Wir fassen zusammen im

Satz 7. Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ eines Kreises c , der das Zentrum S enthält, sind Radlinien 2. Stufe mit der Darstellung (48) bzw. (49), d.h. algebraische Kurven 8. Ordnung. Die Gegenpunktkurve k_2 stimmt mit c überein. Die Brechungsfronten $\tilde{c}_2$ lassen sich als Bahnkurven der Punkte P einer Geraden g erzeugen, von der ein Punkt G_2 auf c läuft, während g beständig eine KARDIOIDE h berührt; diese ist die Evolute einer Kardioide σ , die sich als Kreiskonchoide von c bezüglich S zum Abstand $2a$ erzeugen läßt.

Die Abbildung 5 zeigt die im Satz 7 beschriebene Erzeugung der Kurven $\tilde{c}_2$.

Literaturverzeichnis

- [1] L. BERANEK, Musik, *McGraw Hill, New York – London*, 1962.
- [2] L. CREMER und H. A. MÜLLER, Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik, Band I und II, *S. Hirzel Verlag Stuttgart*, 1978.
- [3] K. FLADT, Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, *Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt*, 1962.
- [4] M. HUSTY, A. KARGER, H. SACHS und W. STEINHILPER, Kinematik und Robotik, *Springer-Verlag, Heidelberg*, 1997.
- [5] G. KARÁNÉ, Bauakustische Prüfung in neuen Wohngebäuden, herausgegeben von ÉTK, *Budapest*, 1967.
- [6] G. KARÁNÉ, Raumakustische Prüfung im Bauwesen angewandter geometrischer Oberflächen unter Anwendung der Anaglyphenmethode, Dissertation an der TU-Budapest, 1986.
- [7] G. KARÁNÉ, Raumakustische Prüfungen in der Baukunst angewandter geometrischer Oberflächen, *Periodica Politechnica Architecture* **35** (1991), 1–2.
- [8] H. SACHS und F. MÉSZÁROS, Schallfronten an ebenen Kurven I, *Math. Pannonica* **8/2** (1997), 187–200.
- [9] H. SACHS und G. KARÁNÉ, Schallfronten an ebenen Kurven II, *Math. Pannonica* **9/1** (1998), 17–31.
- [10] K. STRUBECKER, Differentialgeometrie I, Sammlung Götschen, *Band 1113/1113a, Berlin*, 1964.
- [11] T. TARNÓCZY, Teremakusztika I és II, *Akadémiai Kiadó, Budapest*, 1986.
- [12] H. WIELEITNER, Spezielle ebene Kurven, *Götschens Verlagshandlung, Leipzig*, 1908.
- [13] W. WUNDERLICH, Ebene Kinematik, *BI-Hochschultaschenbücher, 447/447a, Mannheim/Wien/Zürich*, 1970.
- [14] C. ZWIKKER, Advanced plane geometry, *North-Holland Publ. Comp., Amsterdam*, 1950.

HANS SACHS
MONTANUNIVERSITÄT LEOBEN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND ANGEWANDTE GEOMETRIE
A-8700 LEOBEN, AUSTRIA

G. KARÁNÉ
MONTANUNIVERSITÄT LEOBEN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND ANGEWANDTE GEOMETRIE
A-8700 LEOBEN, AUSTRIA

(Received February 24, 1998)