Publ. Math. Debrecen
79/3-4 (2011), 357–366
DOI: 10.5486/PMD.2011.5192

Équations de Fermat–Pell–Mahler simultanées

By YANN BUGEAUD (Strasbourg), CLAUDE LEVESQUE (Québec)
and MICHEL WALDSCHMIDT (Paris)

En hommage à Kálmán Győry, Attila Pethő, János Pintz et András Sárközy

Abstract. We give an upper bound for the number of solutions to simultaneous Fermat–Pell–Mahler equations.

Résumé. Nous majorons le nombre de solutions des équations de Fermat–Pell–Mahler simultanées.

1. Introduction

Soient a et b des entiers rationnels distincts et non nuls. Bennett, Cipu, Mignotte et Okazaki [2] ont établi que le système d'équations de Fermat–Pell simultanées

$$X^2 - aZ^2 = 1, \quad Y^2 - bZ^2 = 1, \tag{1}$$

où les inconnues (X, Y, Z) prennent des valeurs entières strictement positives, possède au maximum deux solutions. Ce résultat est optimal vu qu'il existe une infinité de paires (a, b) pour lesquelles (1) a exactement deux solutions.

Plus généralement, si a et b sont des entiers rationnels qui ne sont pas des carrés et si u et v sont des entiers rationnels non nuls vérifiant $av \neq bu$, alors Bennett [1] a démontré que le système d'équations de Fermat–Pell simultanées

$$X^2 - aZ^2 = u, \quad Y^2 - bZ^2 = v, \tag{2}$$

Mathematics Subject Classification: 11D59.
Key words and phrases: Diophantine equations, Fermat–Pell–Mahler equations, S-units, Schmidt subspace theorem.

en les inconnues entières strictement positives (X, Y, Z), possède au plus

$$c\, 2^{\min\{\omega(u),\omega(v)\}} \log(|u| + |v|)$$

solutions, où c est une constante absolue et $\omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers distincts de l'entier rationnel n. Il n'existe pas de borne supérieure uniforme pour le nombre de solutions: Masser et Rickert [6] ont démontré que, pour tout N, il existe deux entiers rationnels u et v tels que le système de deux équations de Fermat–Pell

$$X^2 - 2Z^2 = u, \quad Y^2 - 3Z^2 = v$$

possède au moins N solutions (x, y, z) en entiers positifs.

Dans la présente note, nous montrons que le nombre de solutions de (2) peut être majoré en fonction seulement du nombre total de facteurs premiers distincts du produit uv.

2. Énoncé du résultat principal

Soient b_1, b_2 des entiers rationnels, a_1, a_2, c_1, c_2 des entiers rationnels non nuls, $S = \{p_1, \dots, p_s\}$ un ensemble fini de nombres premiers. Nous posons $\Delta_1 = b_1^2 - 4a_1c_1$, $\Delta_2 = b_2^2 - 4a_2c_2$ et nous supposons que le produit $\Delta_1\Delta_2$ n'est pas un carré parfait. Nous nous intéressons aux équations de Fermat–Pell–Mahler

$$(a_1X^2 + b_1XZ + c_1Z^2)(a_2Y^2 + b_2YZ + c_2Z^2) = W, \tag{3}$$

où les inconnues (X, Y, Z, W) prennent des valeurs (x, y, z, w) qui sont dans $\mathbf{Z}_S^3 \times \mathbf{Z}_S^\times$ avec $xyz \neq 0$.

Ici, $\mathbf{Z}_S$ est l'anneau des S-entiers, c'est-à-dire l'anneau des nombres rationnels dont le dénominateur n'a pas d'autre facteur premier que ceux de S, tandis que $\mathbf{Z}_S^\times$ est le groupe des S-unités, qui est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}_S$, formé des nombres rationnels dont le numérateur et le dénominateur n'ont pas d'autre facteur premier que ceux de S.

Pour énoncer le résultat principal, nous introduisons une relation d'équivalence entre les solutions de (3): deux solutions (x, y, z, w) et (x', y', z', w') sont dites *S-équivalentes* s'il existe une S-unité u telle que

$$x' = ux,\ y' = uy,\ z' = uz,\ w' = u^4w.$$

Théorème 2.1. *Nous conservons les notations ci-dessus. L'ensemble des classes de S-équivalence de solutions $(x, y, z, w) \in \mathbf{Z}_S^3 \times \mathbf{Z}_S^\times$ de l'équation de Fermat–Pell–Mahler*

$$(a_1X^2 + b_1XZ + c_1Z^2)(a_2Y^2 + b_2YZ + c_2Z^2) = W,$$

avec $xyz \neq 0$, est fini, et cet ensemble possède au plus κ_1 éléments, où

$$\kappa_1 = 2 + 2^{962t} \quad \text{avec} \quad t = 4(\omega(a_1a_2p_1 \cdots p_s) + 1).$$

Nous déduisons immédiatement du Théorème 2.1 une nouvelle majoration du nombre de solutions du système d'équations de Fermat–Pell simultanées (2).

Théorème 2.2. *Nous conservons les notations ci-dessus. Soient $p_1, \ldots, p_s$ des nombres premiers distincts. L'ensemble des $(2s + 3)$-uplets d'entiers rationnels $(x, y, z, m_1, \ldots, m_s, n_1, \ldots, n_s)$, avec $x, y, z > 0$ et $\operatorname{pgcd}(x, y, z, p_1 \cdots p_s) = 1$, vérifiant le système d'équations de Fermat–Pell–Mahler simultanées*

$$\begin{cases} a_1X^2 + b_1XZ + c_1Z^2 = \pm p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}, \\ a_2Y^2 + b_2YZ + c_2Z^2 = \pm p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}, \end{cases} \tag{4}$$

est fini, et cet ensemble possède au plus κ_1 éléments, où

$$\kappa_1 = 2 + 2^{3848(\omega(a_1a_2p_1\cdots p_s)+1)}.$$

Quand le produit des entiers strictement positifs a et b n'est pas un carré, le Théorème 2.2 améliore le résultat de Bennett cité dans l'introduction, en établissant la majoration

$$\kappa_2 = 2 + 2^{3848(s+1)}.$$

pour le nombre de solutions du système (2) d'équations de Fermat–Pell simultanées

$$X^2 - aZ^2 = u, \qquad Y^2 - bZ^2 = v,$$

qui ne dépend que de s, le nombre de facteurs premiers distincts du produit uv.

Nous donnons deux démonstrations du Théorème 2.1. Pour la première, nous utilisons le Théorème 4.1 ci-dessous qui se trouve dans [4]. Le lien que nous établissons ainsi entre les équations de Fermat–Pell–Mahler simultanées et les formes décomposables semble nouveau et nous paraît intéressant. La seconde démonstration n'est pas fondamentalement différente, puisqu'elle repose sur le Théorème 5.1 ci-dessous qui est l'outil principal de [4], mais elle fournit le résultat annoncé de façon beaucoup plus directe comme corollaire du Théorème 5.1 sur l'équation aux S-unités. Le théorème 1 de [4] est en effet une conséquence du Théorème 5.1, mais la déduction est assez élaborée.

3. Préliminaires – deux classes spéciales

Sous les hypothèses du Théorème 2.1, écrivons

$$a_1X^2 + b_1XZ + c_1Z^2 = a_1(X - \alpha_1 Z)(X - \alpha_1' Z)$$

et

$$a_2Y^2 + b_2YZ + c_2Z^2 \ = \ a_2(X - \alpha_2 Y)(X - \alpha_2' Y),$$

avec, pour $i = 1, 2$,

$$\alpha_i = -\frac{b_i}{2a_i} + \frac{1}{2a_i}\sqrt{\Delta_i}, \quad \alpha_i' = -\frac{b_i}{2a_i} - \frac{1}{2a_i}\sqrt{\Delta_i}.$$

Considérons le corps de nombres $K := \mathbf{Q}(\sqrt{\Delta_1}, \sqrt{\Delta_2})$. Soit S' l'ensemble des places de K formé des places archimédiennes, des places au-dessus des éléments de S et des places au-dessus des diviseurs premiers de a_1 et a_2. Le cardinal de S' est majoré par t. On désigne par $\mathcal{O}_{S'}^{\times}$ le groupe des S'-unités du corps K.

Nous considérons ici deux cas particuliers qu'il conviendra d'éliminer de la discussion générale, aussi bien pour la première preuve que pour la seconde. Ils conduisent à au plus deux classes de solutions que nous appellerons *dégénérées*. Pour établir le Théorème 2.1, il restera donc à montrer que les classes non-dégénérées sont en nombre fini majoré par $\kappa - 2$.

La première classe dégénérée est celle d'une solution qui vérifierait

$$a_1(x - \alpha_1 z)\sqrt{\Delta_2} - a_2(y - \alpha_2 z)\sqrt{\Delta_1} = 0. \tag{5}$$

Cette condition s'écrit encore

$$\left(a_1 x + \frac{b_1}{2} z\right)\sqrt{\Delta_2} - \left(a_2 y + \frac{b_2}{2} z\right)\sqrt{\Delta_1} = 0.$$

Nous allons utiliser l'hypothèse que $\sqrt{\Delta_1\Delta_2}$ est un nombre irrationnel. Comme $a_1a_2xyz \neq 0$, on a $b_1 \neq 0$ et $b_2 \neq 0$, d'où

$$z = -2\frac{a_1 x}{b_1} = -2\frac{a_2 y}{b_2},$$

de sorte que

$$a_1 b_2 x = a_2 b_1 y.$$

Posons

$$x_0 = b_1 a_2, \ y_0 = a_1 b_2, \ z_0 = -2a_1 a_2,$$

$$w_0 = (a_1 x_0^2 + b_1 x_0 z_0 + c_1 z_0^2)(a_2 y_0^2 + b_2 y_0 z_0 + c_2 z_0^2).$$

Il en résulte qu'il existe un nombre rationnel non nul d tel que

$$x = dx_0,\ y = dy_0,\ z = dz_0,\ w = d^4 w_0.$$

Alors (3) impose que $w = d^4 w_0 \in \mathbf{Z}_S^\times$, ce qui montre qu'il y a au plus une classe d'équivalence de solutions satisfaisant (5). C'est la première classe dégénérée éventuelle de solutions.

Supposons ensuite que

$$a_1(x - \alpha_1 z)\sqrt{\Delta_2} + a_2(y - \alpha_2' z)\sqrt{\Delta_1} = 0. \tag{6}$$

Cette condition s'écrit encore

$$\left(a_1 x + \frac{b_1}{2} z\right)\sqrt{\Delta_2} + \left(a_2 y + \frac{b_2}{2} z\right)\sqrt{\Delta_1} = 0.$$

Il s'avère que des calculs similaires à ceux de la première classe dégénérée montrent qu'il y a au plus une classe d'équivalence de solutions satisfaisant (6). C'est la deuxième classe dégénérée éventuelle de solutions.

4. Lien avec les formes décomposables

Le théorème 2 de Bérczes et Győry [3] concernant les équations en S-entiers pour les formes décomposables comporte une hypothèse restrictive (une des formes doit avoir des coefficients linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$) qui n'est pas satisfaite ici, mais leur théorème 3 s'applique: une fois établie la finitude du nombre de classes d'équivalence dans notre Théorème 2.1, il fournit une borne pour le nombre de classes de solutions à peine plus élevée que la nôtre: $2^{4104(t+1)}$. Ici nous utiliserons un raffinement, dû à Evertse et Győry [5], d'un énoncé antérieur de [4] (voir leur théorème 1). Pour $n \geq 1$, on pose

$$e(n) = \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1) - 2,$$

de sorte que $e(n) \leq n^3$. En particulier $e(3) = 26$.

Théorème 4.1. *Soient K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K ayant s éléments, contenant les places archimédiennes. Soit $F = \ell_1 \cdots \ell_r$ une forme décomposable de degré r, où $\ell_1, \ldots, \ell_r$ sont des formes linéaires en n variables à coefficients algébriques dans une extension de K, telle que*

$$\{\mathbf{x} \in K^n; \ell_1(\mathbf{x}) = \cdots = \ell_r(\mathbf{x}) = 0\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Notons $\mathcal{O}_S^\times$ le groupe des S-unités de K. On considère l'ensemble des solutions $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}_S^n$ de l'équation

$$F(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}_S^\times$$

vérifiant la condition de non-dégénérescence suivante: pour tout sous-ensemble propre non vide I de $\{1, \dots, r\}$, il existe des nombres algébriques $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ tels que

$$\gamma_1 \ell_1 + \cdots + \gamma_r \ell_r = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \gamma_i \ell_i(\mathbf{x}) \neq 0.$$

Alors cet ensemble est réunion d'au plus $(2^{33} r^2)^{e(n)s}$ classes $\{u\mathbf{x}; u \in \mathcal{O}_S^\times\}$ modulo $\mathcal{O}_S^\times$.

Première démonstration du Théorème 2.1. Sous les hypothèses du Théorème 2.1, introduisons quatre formes linéaires $\ell_i = \ell_i(X, Y, Z)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ en trois variables X, Y, Z à coefficients dans le corps de nombres K:

$$\ell_1 = a_1(X - \alpha_1 Z), \quad \ell_1' = X - \alpha_1' Z, \quad \ell_2 = a_2(Y - \alpha_2 Z), \quad \ell_2' = Y - \alpha_2' Z,$$

de sorte que l'équation (3) s'écrive

$$\ell_1 \ell_1' \ell_2 \ell_2' = W.$$

Le membre de gauche $\ell_1 \ell_1' \ell_2 \ell_2'$ est une forme homogène décomposable F, à laquelle nous pouvons appliquer le Théorème 4.1 avec $r = 4$ et $n = 3$. Il reste à vérifier que les solutions qui ne sont pas dans une des deux classes dégénérées (x, y, z, w) de (3) avec $xyz \neq 0$ satisfont l'hypothèse de non-dégénérescence[1] du Théorème 4.1: cela signifie que pour chacune de ces solutions (x, y, z, w) et pour chaque sous-ensemble non vide I de $\{1, 2, 3, 4\}$ distinct de $\{1, 2, 3, 4\}$, il existe des éléments γ_1, γ_1', γ_2, γ_2' de K tels que la forme linéaire

$$\gamma_1 \ell_1 + \gamma_1' \ell_1' + \gamma_2 \ell_2 + \gamma_2' \ell_2'$$

soit nulle, mais que

$$\sum_{i \in I} \gamma_i \ell_i(x, y, z) \neq 0.$$

[1]Cela ne signifie pas que notre définition de classes dégénérées coïncide avec la notion de solutions (F, S) dégénérée dans la terminologie de [4]. En effet, l'hypothèse du Théorème 4.1 est plus forte que celle du théorème 1 de [4]. Le corollaire du théorème 1 de [4] précise que toute solution dégénérée au sens plus vaste de [4] produit une infinité de classes de solutions, donc les solutions éventuelles de nos deux classes dégénérées introduites au §3 ne le sont pas au sens de [4]. Cette remarque permet d'ailleurs de raffiner la borne de la conclusion de notre Théorème 2.1 en remplaçant κ par $\kappa - 2$.

Considérons l'espace vectoriel sur K des $(\gamma_1, \gamma_1', \gamma_2, \gamma_2') \in K^4$ tels que nous ayons $\gamma_1\ell_1 + \gamma_1'\ell_1' + \gamma_2\ell_2 + \gamma_2'\ell_2' = 0$. Cette condition s'écrit

$$a_1\gamma_1 + \gamma_1' = 0, \quad a_2\gamma_2 + \gamma_2' = 0, \quad a_1\gamma_1\alpha_1 + \gamma_1'\alpha_1' + a_2\gamma_2\alpha_2 + \gamma_2'\alpha_2' = 0.$$

Il en résulte que l'espace en question est de dimension 1, engendré par

$$\big(\sqrt{\Delta_2},\ -a_1\sqrt{\Delta_2},\ -\sqrt{\Delta_1},\ a_2\sqrt{\Delta_1}\,\big).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que pour toute solution (x, y, z, w) n'appartenant pas à une des deux classes dégénérées de (3) introduites au §3, aucune somme de deux éléments parmi

$$\sqrt{\Delta_2}\ell_1(x,y,z),\ -a_1\sqrt{\Delta_2}\ell_1'(x,y,z),\ -\sqrt{\Delta_1}\ell_2(x,y,z),\ a_2\sqrt{\Delta_1}\ell_2'(x,y,z)$$

ne s'annule. Posons

$$\lambda_1 := a_1\sqrt{\Delta_2}(x - \alpha_1 z), \qquad \lambda_1' := -a_1\sqrt{\Delta_2}(x - \alpha_1' z),$$

$$\lambda_2 := -a_2\sqrt{\Delta_1}(y - \alpha_2 z), \qquad \lambda_2' := a_2\sqrt{\Delta_1}(y - \alpha_2' z).$$

On a donc $\lambda_1 + \lambda_1' + \lambda_2 + \lambda_2' = 0$. Vérifions qu'aucune somme de deux termes parmi $\lambda_1, \lambda_1', \lambda_2, \lambda_2'$ n'est nulle. Que $\lambda_1 + \lambda_1'$ et $\lambda_2 + \lambda_2'$ ne soient pas nuls est banal. Si $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, ce qui équivaut à $\lambda_1' + \lambda_2' = 0$, la relation (5) est vérifiée, et dans ce cas la solution considérée appartient à une classe dégénérée, tandis que si $\lambda_1 + \lambda_2' = 0$, ce qui équivaut à $\lambda_1' + \lambda_2 = 0$, c'est la relation (6) qui est vérifiée, et de nouveau la solution considérée est dans une classe dégénérée. □

5. Le théorème du sous-espace

L'outil principal de notre seconde preuve (ainsi que des preuves d'Evertse dans [4]) est la conséquence suivante d'une version quantitative du théorème du sous-espace de Schmidt.

Théorème 5.1 (Evertse)**.** *Soient K un corps de nombres, $\delta_1, \dots, \delta_\ell$ des éléments non nuls de K et S un ensemble fini de places de K de cardinal s. Alors les solutions $(x_1, \dots, x_\ell) \in (\mathcal{O}_S^\times)^\ell$ de l'équation*

$$\delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 + \cdots + \delta_\ell X_\ell = 1,$$

pour lesquelles aucune sous-somme stricte

$$\sum_{i \in I} \delta_i x_i \qquad (\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, \ell\})$$

ne s'annule, sont en nombre fini majoré par $(2^{33}(\ell+1)^2)^{\ell^3 s}$.

Démonstration. Il s'agit du théorème 3 de [4], plus précisément, de l'énoncé qui découle de la démonstration de ce théorème , voir la page 571 de [4]. □

Deuxième démonstration du Théorème 2.1. Considérons une solution $(x, y, z, w) \in \mathbf{Z}_S^3 \times \mathbf{Z}_S^\times$ de (3) vérifiant $xyz \neq 0$. Posons alors

$$\beta_1 = x - \alpha_1 z, \qquad \beta_1' = x - \alpha_1' z,$$
$$\beta_2 = y - \alpha_2 z, \qquad \beta_2' = y - \alpha_2' z,$$

de sorte que

$$a_1 a_2 \beta_1 \beta_1' \beta_2 \beta_2' = w.$$

Les deux nombres

$$a_1 \beta_1 \beta_1' = a_1 x^2 + b_1 xz + c_1 z^2 \quad \text{et} \quad a_2 \beta_2 \beta_2' = a_2 y^2 + b_2 yz + c_2 z^2$$

sont des entiers rationnels, leur produit est une S-unité w (qui est donc aussi un entier rationnel). Il en résulte que les deux nombres rationnels $\beta_1\beta_1'$ et $\beta_2\beta_2'$ ont leur numérateur et leur dénominateur composés uniquement d'éléments de S et de diviseurs premiers de a_1 et a_2. Comme $a_1\beta_1$, $a_1\beta_1'$, $a_2\beta_2$, $a_2\beta_2'$ sont des entiers algébriques, on en déduit que β_1, β_1', β_2, β_2' appartiennent au groupe $\mathcal{O}_{S'}^\times$.

Éliminant x, y, z entre les quatre dernières équations, nous obtenons

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 & -\alpha_1' & -\beta_1' \\ 0 & 1 & -\alpha_2 & -\beta_2 \\ 0 & 1 & -\alpha_2' & -\beta_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 - \alpha_1' & \beta_1 - \beta_1' \\ 0 & 1 & -\alpha_2 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - \alpha_2' & \beta_2 - \beta_2' \end{vmatrix},$$

de sorte que

$$(\alpha_2 - \alpha_2')\beta_1 - (\alpha_1 - \alpha_1')\beta_2 - (\alpha_2 - \alpha_2')\beta_1' + (\alpha_1 - \alpha_1')\beta_2' = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sqrt{\Delta_2}}{a_2}\beta_1 - \frac{\sqrt{\Delta_1}}{a_1}\beta_2 - \frac{\sqrt{\Delta_2}}{a_2}\beta_1' + \frac{\sqrt{\Delta_1}}{a_1}\beta_2' = 0. \tag{7}$$

Il est clair qu'aucun des quatre termes du membre de gauche de (7) ne s'annule, vu que $\Delta_1\Delta_2\beta_1\beta_1'\beta_2\beta_2' \neq 0$.

Il est aussi facile de voir que

$$\frac{\sqrt{\Delta_2}}{a_2}\beta_1 - \frac{\sqrt{\Delta_2}}{a_2}\beta_1' \neq 0,$$

car $\beta_1 - \beta_1' = -z\sqrt{\Delta_1}/a_1 \neq 0$. Ceci implique trivialement que nous avons aussi

$$-\frac{\sqrt{\Delta_1}}{a_1}\beta_2 + \frac{\sqrt{\Delta_1}}{a_1}\beta_2' \neq 0.$$

Dans le cas où

$$\frac{\sqrt{\Delta_2}}{a_2}\beta_1 - \frac{\sqrt{\Delta_1}}{a_1}\beta_2 = 0,$$

la condition (5) est vérifiée, alors que dans le cas où

$$\frac{\sqrt{\Delta_2}}{a_2}\beta_1 + \frac{\sqrt{\Delta_1}}{a_1}\beta_2' = 0,$$

c'est la condition (6) qui est vérifiée.

Comme nous ne considérons que les solutions qui ne sont pas dans les classes dégénérées introduites au §3, nous pouvons supposer qu'aucune sous-somme stricte de termes du membre de gauche de (7) ne s'annule.

Nous déduisons donc de (7) l'égalité

$$\frac{\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta_2}}\frac{a_2}{a_1}\frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta_2}}\frac{a_2}{a_1}\frac{\beta_2'}{\beta_1} + \frac{\beta_1'}{\beta_1} = 1.$$

Une application du Théorème 5.1 avec $\ell = 3$ nous permet alors de conclure qu'il existe un sous-ensemble fini E de G^3, ne dépendant pas de la solution (x, y, z, w) considérée, ayant au plus $\kappa - 2$ éléments et contenant un élément $(\delta_2, \delta_2', \delta_1')$ tel que

$$\beta_2 = \beta_1\delta_2, \quad \beta_2' = \beta_1\delta_2', \quad \beta_1' = \beta_1\delta_1'.$$

Posons

$$z_0 = \frac{a_1}{\sqrt{\Delta_1}}(\delta_1' - 1) = \frac{a_2}{\sqrt{\Delta_2}}(\delta_2' - \delta_2),$$

$$x_0 = \frac{a_1}{\sqrt{\Delta_1}}(\alpha_1\delta_1' - \alpha_1') = \alpha_1 z_0 + 1, \quad y_0 = \frac{a_2}{\sqrt{\Delta_2}}(\alpha_2\delta_2' - \alpha_2'\delta_2) = \alpha_2 z_0 + \delta_2,$$

$$u_0 = a_1x_0^2 + b_1x_0z_0 + c_1z_0^2, \quad v_0 = a_2y_0^2 + b_2y_0z_0 + c_2z_0^2,$$

et remarquons que

$$z = z_0\beta_1,\ x = x_0\beta_1,\ y = y_0\beta_1,\ u = u_0\beta_1^2,\ v = v_0\beta_1^2.$$

Le théorème 2.1 en résulte. □

Remarque 5.1. Chacune de nos deux preuves permet de traiter la situation plus générale où les coefficients a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 de l'équation de Fermat–Pell–Mahler (3) sont dans un corps de nombres, et où les inconnues x, y, z, w sont aussi dans ce corps de nombres.

References

[1] M. A. Bennett, On the number of solutions of simultaneous Pell equations, *J. Reine Angew. Math.* **498** (1998), 173–199.

[2] M. A. Bennett, M. Cipu, M. Mignotte and R. Okazaki, On the number of solutions of simultaneous Pell equations, II, *Acta Arith.* **122** (2006), 407–417.

[3] A. Bérczes and K. Győry, On the number of solutions of decomposable polynomial equations, *Acta Arith.* **101** (2002), 171–187.

[4] J.-H. Evertse, The number of solutions of decomposable form equations, *Invent. Math.* **122** (1995), 559–601.

[5] J.-H. Evertse and K. Győry, The number of families of solutions of decomposable form equations, *Acta Arith.* **80** (1997), 367–394.

[6] D. W. Masser and J. H. Rickert, Simultaneous Pell equations, *J. Number Theory* **61** (1996), 52–66.

YANN BUGEAUD
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
MATHÉMATIQUES
7, RUE RENÉ DESCARTES
67084 STRASBOURG CEDEX
FRANCE

E-mail: bugeaud@math.unistra.fr
URL: http://www-irma.u-strasbg.fr/∼bugeaud/

CLAUDE LEVESQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE STATISTIQUE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC (QUÉBEC)
CANADA G1V 0A6

E-mail: Claude.Levesque@mat.ulaval.ca

MICHEL WALDSCHMIDT
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS 6)
4 PLACE JUSSIEU
F – 75252 PARIS CEDEX 05
FRANCE

E-mail: miw@math.jussieu.fr
URL: http://www.math.jussieu.fr/∼miw/

(Received March 11, 2011; revised June 3, 2011)