Publ. Math. Debrecen
46 / 1-2 (1995), 1–23

Zur Kugelgeometrie des einfach isotropen Raumes

Von F. MÉSZÁROS (Leoben) und H. SACHS (Leoben)

§0 Einleitung

In [4] lösten M. HUSTY und H. SACHS die Aufgabe, alle Kugeln des dreidimensionalen euklidischen Raumes zu bestimmen, die 4 vorgegebene Geraden $g_1, \ldots, g_4$ berühren; diese Aufgabe spielt eine wichtige Rolle in der Robotik. Die vorliegende Abhandlung ist der analogen Fragestellung im *einfach isotropen Raum* gewidmet.

Ein einfach isotroper Raum $I_3^{(1)}$ is hierbei ein dreidimensionaler affiner Raum A_3, der über eine *Absolutfigur* $\{\omega, f_1, f_2, F\}$ metrisiert wird, wobei ω die Fernebene von A_3, f_1, f_2 ein konjugiert-komplexes Geradenpaar in ω und F den Schnittpunkt dieser Geraden bezeichnet. Die Geometrie dieses Raumes — die sogenannte einfach isotrope Geometrie — wurde ausführlich in der Monographie [10] dargestellt, in der alle i.f. benötigten Begriffe nachgelesen werden können. Insbesondere legen wir allen Betrachtungen als *Fundamentalgruppe* die *sechsparametrige isotrope Bewegungsgruppe* $B_6^{(1)}$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= c_1 + x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ \bar{y} &= c_2 + x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ \bar{z} &= c_3 + c_4 x + c_5 y + x \end{aligned} \tag{0.1}$$

zugrunde (vgl. [10, 7]). Die *absoluten Geraden* f_1, f_2 werden hierbei in der Gestalt

$$x_0 = x_1^2 + x_2^2 = 0 \tag{0.2}$$

angesetzt, wobei $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ projektive Koordinaten bezeichnen. Geraden durch den *absoluten Punkt* $F(0:0:0:1)$ werden als *vollisotrope Geraden* bezeichnet. Die Sphären (Kugeln) des einfach isotropen Raumes

wurden in [6], [9] und [11] studiert; man vergleiche auch [10, 66f.]. Demnach zerfallen die Sphären in zwei Klassen, nämlich in *parabolische Sphären* mit der Darstellung

$$z - c = R[(x-u)^2 + (y-v)^2] \tag{0.3}$$

und in *zylindrische Sphären* mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0. \tag{0.4}$$

Die Flächen (0.4) sind *Drehzylinder* mit vollisotropen Erzeugenden und sollen i.f. nicht betrachtet werden. Die Flächen (0.3) sind — euklidisch betrachtet — *Drehparaboloide* mit der vollisotropen Drehachse $x = u$, $y = v$. Eine konstruktive Behandlung dieser Flächen findet sich in [5]. Die Größe R ist eine $B_6^{(1)}$-Invariante und wird als *Radius* der parabolischen Sphäre bezeichnet (vgl. [10, 68]). Bezüglich weiterer Resultate zur Geometrie der Sphären sei auf [9] verwiesen.

§1 Ein Berührproblem für Sphären des $I_3^{(1)}$

In Analogie zu [4] untersuchen wir im einfach isotropen Raum $I_3^{(1)}$ die Frage, ob zu vorgegebenen Geraden $g_1, \ldots, g_4$ parabolische Sphären σ existieren, dir $g_1, \ldots, g_4$ berühren. Da eine parapolische Sphäre σ keine vollisotropen Tangenten besitzt, sind $g_1, \ldots, g_4$ als *nichtisotrope Geraden* vorauszusetzen. Wir legen eine Gerade g in der vektoriellen Darstellung

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{e} \tag{1.1}$$

fest, wobei $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$ einen nichtisotropen *Einheitsvektor* bezeichnet, d.h.

$$e_1^2 + e_2^2 = 1, \quad e_3 \neq 0 \tag{1.2}$$

gilt und *im isotropen Sinn* $\vec{a}$ auf $\vec{e}$ *normal* steht, d.h.

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 = 0 \tag{1.3}$$

gilt, wenn $\vec{a}$ die Komponenten $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ besitzt. Werden die Komponeten von (1.1) in (0.3) eingesetzt, so ergibt sich nach kurzer Rechnung für λ die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda \left(u e_1 + v e_2 + \frac{e_3}{2R} \right) + \left[(a_1 - u)^2 + (a_2 - v)^2 + \frac{c - a_3}{R} \right] = 0, \tag{1.4}$$

deren Nullstellen die *Schnittpunkte* von g mit σ festlegen. Das Verschwinden der Diskriminante von (1.4) liefert als *Berührbedingung* von g mit σ

$$\left(ue_1 + ve_2 + \frac{e_3}{2R}\right)^2 = (a_1 - u)^2 + (a_2 - v)^2 + \frac{1}{R}(c - a_3). \tag{1.5}$$

Wir setzen i.f. voraus, daß 2 *windschiefe*, nichtisotrope *Geraden* g_1, g_2 gegeben seien. Die beiden Geraden bestimmen dann eine eindeutige vollisotrope Gemeinnormale n, die g_1 in A_1 und g_2 in A_2 schneiden möge. Legt man die z-Achse des zugrunde gelegten Koordinatensystems in die Gerade n und den *Koordinatenursprung* U in den Mittelpunkt der Strecke $\overline{A_1A_2}$, so gilt (vgl. Abbildung 1)

Abbildung 1.

$$A_1\left(0, 0, \tfrac{1}{2}d\right), \quad A_2\left(0, 0, -\tfrac{1}{2}d\right) \tag{1.6}$$

und man kann durch eine isotrope Bewegung (0.1) erreichen, daß die Einheitsvektoren von g_1 und g_2 die Komponenten

$$\vec{e}_1 = (\cos\varphi/2, -\sin\varphi/2, 0)$$
$$\vec{e}_2 = (\cos\varphi/2, \sin\varphi/2, 0) \tag{1.7a,b}$$

besitzen.

Die entsprechenden Berührbedingungen (1.5) vereinfachen sich dann zu

$$\frac{1}{R}\left(\frac{1}{2}d - c\right) = (u\sin\varphi/2 + v\cos\varphi/2)^2 \text{ bzw.}$$
$$-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{2}d + c\right) = (u\sin\varphi/2 - v\cos\varphi/2)^2. \tag{1.8a,b}$$

Werden die Gleichungen (1.8a,b) einmal addiert und einmal subtrahiert, so entstehen die wichtigen Beziehungen

$$-\frac{c}{R} = u^2\sin^2\varphi/2 + v^2\cos^2\varphi/2$$
$$\frac{d}{R} = 2uv\sin\varphi. \tag{1.9a,b}$$

Betrachtet man alle parabolischen Sphären σ von festem Radius R_0, die g_1 und g_2 berühren, so erkennt man, daß die *Achsen dieser Sphären* auf dem gleichseitigen hyperbolischen Zylinder ζ

$$xy = \frac{d}{2R_0\sin\varphi} =: k_0 \tag{1.10}$$

liegen, wobei wir $x = u$, $y = v$ gesetzt haben. Die asymptotischen Ebenen von ζ zind die Ebenen $x = 0$ und $y = 0$, d.h. die isotropen Ebenen durch die *isotropen Bisektoren* (vgl. [1, 51]) von g_1 und g_2. Diese isotropen Bisektoren s_1, s_2 von g_1 und g_2 können als isotrope Winkelsymmetralen der Geraden $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ definiert werden, die man erhält, wenn g_1 und g_2 parallel durch U verschoben werden.

Die Drehachse a einer Sphäre σ ist, bezüglich der Ebenenstellung $z = 0$, $B_6^{(1)}$-invariant und ebenso der Schnittpunkt S von a mit σ, den wir als *Scheitelpunkt* der Sphäre bezeichnen. Nach (0.3) wird S durch

$$S(u, v, c) \tag{1.11}$$

festgelegt. Die Menge der Scheitelpunkte obiger einparametriger Kugelschar ist somit wegen (1.9a,b) durch

$$\begin{aligned} x &= u, \qquad y = \frac{k_0}{u} \\ z &= -R_0(u^2 \sin^2 \varphi/2 + \frac{k_0^2}{u^2} \cos^2 \varphi/2) \end{aligned} \tag{1.12}$$

gegeben. Dies ist eine Raumkurve 4. Ordnung, die sich als Schnitt des *hyperbolischen Zylinders* (1.10) mit dem *elliptischen Paraboloid*

$$z = -R_0(x^2 \sin^2 \varphi/2 + y^2 \cos^2 \varphi/2) \tag{1.13}$$

einstellt. Für $\sin^2 \varphi/2 = \cos^2 \varphi/2 = \frac{1}{2}$, d.h. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist (1.13) die parabolische Sphäre $z = -\frac{R_0}{2}(x^2 + y^2)$. Wir fassen zusammen im

Satz 1. *Sind g_1, g_2 zwei windschiefe Geraden mit dem Abstand d und dem Kreuzungswinkel φ, dann existiert eine einparametrige Schar von Sphären σ von festem Radius R_0, die g_1 und g_2 berühren. Die Achsen dieser Sphären liegen auf dem gleichseitigen hyperbolischen Zylinder ζ* (1.10)*, dessen Achse mit der Gemeinnormale n von g_1 und g_2 zusammenfällt und dessen asymptotische Ebenen die isotropen Ebenen durch die isotropen Bisektoren von g_1 und g_2 sind. Die Scheitelpunkte der Sphären σ liegen auf einer Raumkurve 4. Ordnung, die sich als Schnitt von ζ mit einem elliptischen Paraboloid* (1.13) *ergibt. Kreuzen sich g_1 und g_2 orthogonal, dann ist* (1.13) *eine Sphäre mit der Achse n vom Radius $-\frac{1}{2}$ R_0.*

Weiters folgert man leicht den

Satz 2. *Sind g_1, g_2, g_3 drei paarweise windschiefe Geraden allgemeiner Lage, dann existieren zu vorgegebenem Radius R_0 im algebraischen Sinn genau 4 parabolische Sphären, die g_1, g_2 und g_3 berühren.*

Beweis. Wir legen die Gerade g_3 durch den normierten Richtungsvektor $\vec{e}_3 = (e_{31}, e_{32}, e_{33})$ mit $(e_{31}, e_{32}) \neq (0, 0)$ und den Punkt $A_3(a_{31}, a_{32}, a_{33})$ fest. Dann ist nebst (1.9a,b) die Bedingung

$$\left(ue_{31} + ve_{32} + \frac{e_{33}}{2R_0}\right)^2 = (a_{31} - u)^2 + (a_{32} - v)^2 + \frac{1}{R_0}(c - a_{33}) \tag{1.14}$$

bei festem R_0 zu erfüllen. Wird (1.9a) in (1.14) eingesetzt, so entsteht die quadratische Gleichung

$$
\begin{aligned}
&u^2(e_{31}^2-\cos^2\varphi/2)+v^2(e_{32}^2-\sin^2\varphi/2)+2uve_{31}e_{32}+\\
&+2u\left(\frac{e_{31}e_{33}}{2R_0}+a_{31}\right)+2v\left(\frac{e_{32}e_{33}}{2R_0}+a_{32}\right)+\frac{e_{33}^2}{4R_0^2}+\\
&+\frac{a_{33}}{R_0}-a_{31}^2-a_{32}^2=0
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

in u und v, die einen Kegelschnitt k_1 in der $[uv]$-Ebene festlegt. k_1 schneidet den Kegelschnitt (1.9b) im algebraischen Sinn in 4 Punkten, die durch die gemeinsamen Nullstellen (u_i, v_i) $(i = 1, \ldots, 4)$ von (1.9b) und (1.15) festgelegt werden. Durch Einsetzen dieser Werte in (1.9a) können die noch fehlenden Werte c_i der gesuchten Berührsphären bestimmt werden. Damit liegen nach (0.3) die Berührsphären $\sigma_1, \ldots, \sigma_4$ eindeutig fest. □

Der Satz 2 weicht vom euklidischen Analogon ab, wo bekanntlich 8 Berührkugeln existieren (vgl. [4]). Allerdings existieren bei vorgegebenen Geraden g_1, g_2, g_3 in $I_3^{(1)}$ noch 4 zylindrische Berührsphären, deren Radius durch die Lage von g_1, g_2, g_3 aber schon mitbestimmt ist.

Gegeben seien nun 4 paarweise windschiefe, nichtisotrope Geraden g_1, g_2, g_3, g_4. Wir legen g_1 und g_2 in der Normaldarstellung fest, wie sie schon im Satz 1 verwendet wurde und beschreiben g_3 und g_4 durch ihre *normierten Richtungsvektoren* $\vec{e}_i(e_{i1}, e_{i2}, e_{i3})$ $(i = 3, 4)$ und ihre Aufpunkte $A_i(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$. Dabei setzen wir voraus, daß

$$
a_{i1}e_{i1}+a_{i2}e_{i2}=0 \quad (i=3,4) \tag{1.16}
$$

gilt. Um alle Sphären σ zu bestimmen, die $g_1, \ldots, g_4$ berühren, sind dann nach (1.5) und (1.9a,b) aus den *4 Gleichungen*

$$
\begin{aligned}
&(ue_{31}+ve_{32}+e_{33}\rho)^2=(a_{31}-u)^2+(a_{32}-v)^2+2\rho(c-a_{33})\\
&(ue_{41}+ve_{42}+e_{43}\rho)^2=(a_{41}-u)^2+(a_{42}-v)^2+2\rho(c-a_{43})\\
&u^2\sin^2\varphi/2+v^2\cos^2\varphi/2=-2c\rho\\
&uv\sin\varphi=d\rho
\end{aligned}
\tag{1.17a–d}
$$

die *4 Unbekannten* u, v, c und ρ zu bestimmen, wobei $\frac{1}{2R} =: \rho$ gesetzt wurde. Setzt man die aus (1.17c,d) fließenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\rho&=\frac{\sin\varphi}{d}uv\\
c&=-\frac{d}{2\sin\varphi}\left(\frac{u}{v}\sin^2\varphi/2+\frac{u}{v}\cos^2\varphi/2\right)
\end{aligned}
\tag{1.18a,b}
$$

in (1.17a,b) ein, so entstehen die Gleichungen — wenn abkürzend $q := \frac{\sin\varphi}{d}$ gesetzt wird —

$$\begin{aligned}(ue_{31}+ve_{32}+e_{33}quv)^2 &= u^2\cos^2\varphi/2+v^2\sin^2\varphi/2-\\ &-2a_{33}quv-2a_{31}u-2a_{32}v+a_{31}^2+a_{32}^2\\ (ue_{41}+ve_{42}+e_{43}quv)^2 &= u^2\cos^2\varphi/2+v^2\sin^2\varphi/2-\\ &-2a_{43}quv-2a_{41}u-2a_{42}v+a_{41}^2+a_{42}^2.\end{aligned} \tag{1.19a,b}$$

Für $e_{33}\neq 0$, $e_{34}\neq 0$ sind dies *zwei algebraische Kurven 4. Ordnung*, während für $e_{33}=e_{43}=0$ *zwei Kegelschnitte* vorliegen. Im *zweiten Fall* sind die Geraden g_3, g_4 zu der von g_1 und g_2 bestimmten Ebenenstellung parallel. Die beiden Kegelschnitte (1.19a,b) haben im algebraischen Sinn 4 Punkte $P(u_i,v_i)$ gemeinsam. Aus den gefundenen gemeinsamen Nullstellen (u_i,v_i) $(i=1,\ldots,4)$ kann man gemäß (1.18a,b) die noch ausstehenden Werte ρ_i und c_i berechnen, womit die 4 Berührkugeln $\sigma_1,\ldots,\sigma_4$ eindeutig festliegen.

Im *ersten Fall* definieren (1.19a,b) zwei pseudoeuklidisch bizirkuläre Kurven 4. Ordnung, wenn man die $[uv]$-Ebene mit einer pseudoeuklidischen Metrik versieht, deren absolute Punkte die Punkte $I_1(0:1:0)$ und $I_2(0:0:1)$ sind (vgl. [8, 160f]). Um die gemeinsamen Lösungen (u,v) von (1.19a,b) zu bestimmen, schreiben wir diese Gleichungen in der Gestalt

$$\begin{aligned}&u^2[e_{33}^2q^2v^2+2e_{31}e_{33}qv+e_{31}^2-\cos^2\varphi/2]+\\ &+u[2qe_{32}e_{33}v^2+2v(e_{31}e_{32}+qa_{33})+2a_{31}]+\\ &+[v^2(e_{32}^2-\sin^2\varphi/2)+2a_{32}v-a_{31}^2-a_{32}^2]=0\\ &u^2[e_{43}^2q^2v^2+2e_{41}e_{43}qv+e_{41}^2-\cos^2\varphi/2]+\\ &+u[2qe_{42}e_{43}v^2+2v(e_{41}e_{42}+qa_{43})+2a_{41}]+\\ &+[v^2(e_{42}^2-\sin^2\varphi/2)+2a_{42}v-a_{41}^2-a_{42}^2]=0.\end{aligned} \tag{1.20a,b}$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned}p_2(v)&=e_{33}^2q^2v^2+2e_{31}e_{33}qv+e_{31}^2-\cos^2\varphi/2\\ q_2(v)&=2qe_{32}e_{33}v^2+2v(e_{31}e_{32}+qa_{33})+2a_{31}\\ r_2(v)&=v^2(e_{32}^2-\sin^2\varphi/2)+2a_{32}v-a_{31}^2-a_{32}^2\\ \tilde{p}_2(v)&=e_{43}^2q^2v^2+2e_{41}e_{43}qv+e_{41}^2-\cos^2\varphi/2\\ \tilde{q}_2(v)&=2qe_{42}e_{43}v^2+2v(e_{41}e_{42}+qa_{43})+2a_{41}\\ \tilde{r}_2(v)&=v^2(e_{42}^2-\sin^2\varphi/2)+2a_{42}v-a_{41}^2-a_{42}^2\end{aligned} \tag{1.21.a–f}$$

verbleibt somit die *Resultante* der Polynome (1.20a,b), d.h.

$$\begin{vmatrix} p_2 & q_2 & r_2 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & r_2 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 & \tilde{r}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 & \tilde{r}_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.22}$$

zu berechnen. Dies liefert ein *Polynom vom Grad 8* in v. Bildet man aus (1.20a,b) noch die *lineare Gleichung*

$$u(q_2\tilde{p}_2 - \tilde{q}_2 p_2) + (r_2\tilde{p}_2 - \tilde{r}_2 p_2) = 0, \tag{1.23}$$

so kann man hieraus die zugehörigen u-Werte eindeutig bestimmen. Zu den 8 Lösungen (u_i, v_i) $(i = 1, \ldots, 8)$ im algebraischen Sinn kann man schließlich nach (1.18a,b) die fehlenden Werte ρ_i und c_i *eindeutig* bestimmen, womit die Berührsphären $\sigma_1, \ldots, \sigma_8$ festliegen. Damit haben wir den

Satz 3. *Zu 4 paarweise windschiefen, nichtisotropen Geraden $g_1, \ldots, g_4$ allgemeiner Lage des einfach isotropen Raumes existieren im algebraischen Sinn 8 parabolische Sphären, die $g_1, \ldots, g_4$ berühren. Sind die Geraden $g_1, \ldots, g_4$ alle zu einer Ebene ε parallel, dann existieren im algebraischen Sinn 4 parabolische Berührsphären $\sigma_1, \ldots, \sigma_4$. Im ersten Fall gewinnt man die Achsen der Sphären $\sigma_1, \ldots, \sigma_8$ indem man die Nullstellen v_i $(i = 1, \ldots, 8)$ des Polynoms 8. Grades* (1.22) *bestimmt und die zugehören u-Werte gemäß* (1.23) *berechnet. Im zweiten Fall $(e_{33} = e_{43} = 0)$ sind die 4 Achsen die vollisotropen Geraden durch die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte* (1.19a,b).

Wir betrachten nun die zweiparametrige Menge Σ von Sphären, die zwei windschiefe Geraden g_1, g_2 berühren und bestimmen die *Hüllfläche dieser Sphärenschar*. Hierzu ist aus (0.3) unter Verwendung von (1.9a,b) die Gleichung

$$F \equiv z + R(u^2 \sin^2\varphi/2 + v^2 \cos^2\varphi/2) - R(x-u)^2 - R(y-v)^2 = 0 \tag{1.24}$$

mit

$$R = \frac{d}{2uv\sin\varphi} \tag{1.25}$$

zu bilden; hier und i.f. wird stets $u \neq 0$, $v \neq 0$ vorausgesetzt. Die Gleichung (1.24) kann auch in der Gestalt

$$F \equiv z - R(u^2\cos^2\varphi/2 + v^2\sin^2\varphi/2 + x^2 + y^2 - 2ux - 2vy) = 0 \tag{1.26}$$

geschrieben werden. Weiter berechnen wir aus (1.25) unmittelbar

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -\frac{R}{u}, \quad \frac{\partial R}{\partial v} = -\frac{R}{v}. \tag{1.27a,b}$$

Zur Bestimmung der Hüllfläche berechnen wir unter Beachtung von (1.27a,b) aus (1.24)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &\equiv u^2\sin^2\varphi/2 - v^2\cos^2\varphi/2 + (x-u)^2 + \\ &\quad + (y-v)^2 + 2u(x-u) = 0\\ \frac{\partial F}{\partial v} &\equiv v^2\cos^2\varphi/2 - u^2\sin^2\varphi/2 + (x-v)^2 + \\ &\quad + (y-u)^2 + 2v(y-v) = 0.\end{aligned} \tag{1.28a,b}$$

Werden die Gleichungen (1.28a,b) einmal addiert und einmal subtrahiert, so entstehen die wichtigen *Hilfsformeln*

$$\begin{aligned}ux + vy &= x^2 + y^2\\ ux - vy &= u^2\cos^2\varphi/2 - v^2\sin^2\varphi/2.\end{aligned} \tag{1.29a,b}$$

Wird (1.29b) in (1.29a) eingesetzt, so entsteht, für $u \neq 0$ nachdem mit $u^2 + v^2 \neq 0$ gekürzt wurde, die quadratische Gleichung

$$y^2 - 2vy\sin^2\varphi/2 + (v^2\sin^2\varphi/2 - u^2\cos^2\varphi/2)\sin^2\varphi/2 = 0 \tag{1.30}$$

mit den beiden Lösungen

$$y_{1,2} = v\sin^2\varphi/2 \pm u\sin\varphi/2\cos\varphi/2. \tag{1.31a,b}$$

Aus (1.31a,b) folgt sofort

$$x_{1,2} = u\cos^2\varphi/2 \pm v\sin\varphi/2\cos\varphi/2. \tag{1.32a,b}$$

Werden die Gleichungen (1.31a) und (1.32a) in (1.26) eingesetzt, so erhält man wegen $z = R(u^2\cos^2\varphi/2 + v^2\sin^2\varphi/2 - ux - vy)$ die Gleichung $z = -\frac{d}{2}$. Analog liefert (1.31b) bzw. (1.32b) die Gleichung $z = \frac{d}{2}$. Somit besteht die *Hüllfläche* aus den beiden Geraden

$$g_1 \ldots \begin{cases} x = \cos\varphi/2(u\cos\varphi/2 - v\sin\varphi/2)\\ y = -\sin\varphi/2(u\cos\varphi/2 - v\sin\varphi/2)\\ z = \dfrac{d}{2}\end{cases} \tag{1.33a}$$

und

$$g_2 \ldots \begin{cases} x = \cos\varphi/2(u\cos\varphi/2 + v\sin\varphi/2)\\ y = \sin\varphi/2(u\cos\varphi/2 + v\sin\varphi/2)\\ z = -\dfrac{d}{2}\end{cases}, \tag{1.33b}$$

aus denen die Punkte $A_1(0,0,d/2)$ und $A_2(0,0,-d/2)$ herausgeschnitten sind. Für festes u und v wird gemäß (1.9a,b) eine eindeutig bestimmte Berührsphäre von g_1 und g_2 festgelegt, wobei die Koordinaten in (1.33a,b) die *Berührpunkte* $B_1 \in g_1$ und $B_2 \in g_2$ festlegen. Führt man auf g_1 und g_2 die isotropen Abstände $\lambda := \overline{A_1B_1}$ und $\mu := \overline{A_2B_2}$ ein, so folgt aus (1.33a,b)

$$\begin{aligned} \lambda &= u\cos\varphi/2 - v\sin\varphi/2 \\ \mu &= u\cos\varphi/2 + v\sin\varphi/2 \end{aligned} \tag{1.34a,b}$$

und die entsprechenden Berührpunkte werden nun durch

$$\begin{aligned} B_1 &\left(\lambda\cos\varphi/2, -\lambda\sin\varphi/2, \tfrac{1}{2}d\right) \\ B_2 &\left(\mu\cos\varphi/2, \mu\sin\varphi/2, -\tfrac{1}{2}d\right) \end{aligned} \tag{1.35a,b}$$

mit $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ festgelegt. Umgekehrt tritt jede Gerade des von g_1 und g_2 aufgespannten hyperbolischen Strahlnetzes — ausgenommen n — als *Berührsehne* $B_1B_2 = e$ genau einer parabolischen Sphäre der Schar Σ auf. Die *Mittelpunkte* $M(\xi,\eta,0)$ dieser Berührsehnen sind durch

$$\xi = \frac{1}{2}(\mu+\lambda)\cos\varphi/2, \quad \eta = \frac{1}{2}(\mu-\lambda)\sin\varphi/2, \quad \zeta = 0 \tag{1.36}$$

bzw.

$$\xi = u\cos^2\varphi/2, \quad \eta = v\sin^2\varphi/2, \quad \zeta = 0 \tag{1.37}$$

gegeben, wobei die aus (1.34a,b) fließenden Formeln

$$u = \frac{1}{2\cos\varphi/2}(\mu+\lambda), \quad v = \frac{1}{2\sin\varphi/2}(\mu-\lambda) \tag{1.38a,b}$$

benützt wurden. Wird eine einparametrige Kugelschar aus Σ gewählt, dann legen die Formeln (1.36) bzw. (1.37) die *Sehnenmittenkurve* dieser Schar fest. Wir vermerken den

Satz 4. *Die zweiparametrige Schar Σ aller parabolischen Sphären, die zwei windschiefe nichtisotrope Geraden g_1, g_2 berühren, besitzt als Hüllfläche genau die Geraden g_1, g_2, wobei in der Normaldarstellung die Berührpunkte $B_1 \in g_1$ und $B_2 \in g_2$ durch die Formeln* (1.33a,b) *bzw.* (1.35a,b) *beschrieben werden. Jede Gerade des von g_1 und g_2 erzeugten hyperbolischen Strahlnetzes — ausgenommen die vollisotrope Treffgerade von g_1, g_2 — tritt als Berührsehne genau einer Sphäre der Schar Σ auf; der Sehnenmittelpunkt wird durch* (1.36) *bzw.* (1.37) *fesgelegt.*

Wir betrachten nun die Menge aller Sphären $\sigma \in \Sigma$, die g_1 in einem festen Punkt B_1 berühren. Wegen $\lambda = \lambda_0 = \text{konst}.$ sind gemäß (1.38a,b)

und (1.9a) die Scheitelpunkte $S(x,y,z)$ dieser Sphären gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2\cos\varphi/2}(\mu+\lambda_0) \\ y &= \frac{1}{2\sin\varphi/2}(\mu-\lambda_0) \\ z &= -\frac{d}{4}\left[\frac{\mu+\lambda_0}{\mu-\lambda_0}\operatorname{tg}^2\varphi/2+\frac{\mu-\lambda_0}{\mu+\lambda_0}\operatorname{ctg}^2\varphi/2\right]. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Alle Punkte S liegen ersichtlich in der *isotropen Ebene*

$$\eta\ldots x\cos\varphi/2-y\sin\varphi/2=\lambda_0, \tag{1.40}$$

die zu g_1 orthogonal ist. Weiter folgt aus (1.39), daß diese Kurve auf der *Fläche 3. Ordnung*

$$xyz+\frac{d}{4}(x^2\operatorname{tg}\varphi/2+y^2\operatorname{ctg}\varphi/2)=0 \tag{1.41}$$

liegt, die ersichtlich mit g_1 und g_2 *isotrop-invariant* verknüpft ist. Die Fläche (1.41) ist ein *gerades Konoid 3. Ordnung* (vgl. [3,276]) mit der vollisotropen Gemeinnormalen von g_1 und g_2 als Konoidachse. Die Kurve (1.39) ist somit eine *ebene algebraische Kurve 3. Ordnung*. Sie schneidet g_1 bzw. g_2 in dem Punkt B_1 bzw. in dem Punkt R_1, den man als Schnittpunkt von η mit g_2 erhält. B_1 gehört zum Parameter $\mu=\lambda_0\cos\varphi$, während R_1 zum Parameter $\mu=\frac{\lambda_0}{\cos\varphi}$ gehört; R_1 existiert nur für $\varphi\neq\pi/2$ (vgl. Abbildung 2, die einen Grundriß der geometrischen Situation zeigt). Die Kurve (1.39) schneidet die Fernebene ω im doppelt zu zählenden absoluten Punkt F und im Punkt $(0:\sin\varphi/2:\cos\varphi/2:0)$.

Nach (1.9b) gilt

$$R=\frac{d}{\mu^2-\lambda_0^2}\ , \tag{1.42}$$

sodaß bei festem R_0 genau 2 Berührsphären σ_1, σ_2 der Schar Σ zum Linienelement (B_1,g_1) gehören. Da aus (1.42) sofort

$$\mu_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda_0^2+\frac{d}{R_0}} \tag{1.43}$$

folgt, liegen die Berührungspunkte $B_2^{(1)}$ und $B_2^{(2)}$ dieser Sphären auf g_2 symmetrisch zu $A_2=g_2n$. Bei vorgegebener Achse $a_1\subset\eta$ erhält man wie in Abbildung 2 gezeichnet sofort jene *Parallelkreise* c_1 und $\bar{c}_1$ der parabolischen Sphäre σ_1, die g_1 bzw. g_2 berühren. Mittels $B_2^{(2)}$ findet man die Achse a_2 der entsprechenden Sphäre σ_2, die ebenfalls den Radius

Abbildung 2.

R_0 besitzt. Hiermit gewinnt man die Parallelkreise c_2 und $\bar{c}_2$ von σ_2, die g_1 bzw. g_2 berühren. Durch die Achse und zwei Parallelkreise ist aber eine parabolische Sphäre *eindeutig* bestimmt.

Wir schneiden nun die Gerade (1.40) mit einer der gleichseitigen Hyperbeln h (1.10). Die Schnittpunkte S_1, S_2 werden dann durch die quadratische Gleichung

$$y^2 + \frac{\lambda_0}{\sin\varphi/2}y - \frac{d}{4R\sin^2\varphi/2} = 0 \tag{1.44}$$

festgelegt. Für die Nullstellen y_1, y_2 von (1.44) gilt bekanntlich nach VIETA $y_1+y_2 = -\frac{\lambda_0}{\sin\varphi/2}$ und aus (1.40) folgt entsprechend $x_1+x_2 = \frac{\lambda_0}{\cos\varphi/2}$. Der Mittelpunkt H der Strecke $\overline{S_1S_2}$ besitzt demnach die *von R unabhängigen Koordinaten*

$$x_h = \frac{\lambda_0}{2\cos\varphi/2}, \quad y_h = -\frac{\lambda_0}{2\sin\varphi/2}. \tag{1.45}$$

Wie aus (1.39) ersichtlich, gehört H zum Parameterwert $u = 0$, sodaß sich für den zu H gehörigen Sphärenradius R_h gemäß (1.42)

$$R_h = -\frac{d}{\lambda_0^2} \tag{1.46}$$

einstellt. Wir bezeichnen die zu $\lambda = 0$ gehörige Sphäre σ_H als *1. Hauptsphäre*. Bezeichnen wir die Achsen von σ_1 und σ_2 mit a_1 und a_2, so berechnet man aus (1.38a,b) unter Beachtung von (1.43) unmittelbar

$$a_1 \left[\frac{1}{2\cos\varphi/2}(\mu+\lambda_0), \frac{1}{2\sin\varphi/2}(\mu-\lambda_0)\right],$$
$$a_2 \left[\frac{1}{2\cos\varphi/2}(-\mu+\lambda_0), -\frac{1}{2\sin\varphi/2}(\mu+\lambda_0)\right]$$

und findet daraus

$$\overrightarrow{a_1H} = \left(-\frac{\mu}{2\cos\varphi/2}, -\frac{\mu}{2\sin\varphi/2}\right) = \overrightarrow{Ha_2}, \text{ sowie } |\overrightarrow{a_1H}| = |\overrightarrow{Ha_2}| = \left|\frac{\mu}{\sin\varphi}\right|.$$

Die Achsen a_1, a_2 der Sphären σ_1, σ_2 liegen daher *symmetrisch* zur Achse a_H der 1. Hauptsphäre (vgl. Abbildung 2).

Legt man durch B_1 eine beliebige Gerade g in η mit der Darstellung

$$\vec{x} = \left(\lambda_0\cos\varphi/2, -\lambda_0\sin\varphi/2, \frac{1}{2}d\right) + t(\sin\varphi/2, \cos\varphi/2, v_3), \quad (v_3 \neq 0) \tag{1.47}$$

so schneidet g die Kurve 3. Ordnung (1.39) nebst B_1 in zwei weiteren Punkten M_1, M_2, die als Scheitelpunkte von 2 Sphären $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ auftreten. Wir bezeichnen σ_1 und σ_2 als *assoziierte Sphären*. Die Bestimmung der Schnittpunkte von (1.47) mit (1.39) liefert nebst $t = 0$ die quadratische Gleichung

$$t^2 + \left(2\lambda_0 \operatorname{ctg}\varphi + \frac{d}{v_3\sin^2\varphi}\right)t - \lambda_0^2 = 0 \tag{1.48}$$

aus der nach VIETA für das Produkt Nullstellen

$$t_1 t_2 = -\lambda_0^2 \tag{1.49}$$

folgt. Somit gilt für die Abstände $\overline{B_1M_1}$ und $\overline{B_1M_2}$ wegen (1.46) die wichtige Beziehung

$$|\overline{B_1M_1}| \cdot |\overline{B_1M_2}| = \left|\frac{d}{R_h}\right|. \tag{1.50}$$

Zu den Punkten $B_1 \in g_1$ und für $\varphi \neq \pi/2$ zu $R_1 \in g_2$ gehören zwei ausgezeichnete Sphären σ_{2H}, σ_{3H}, die wir als *2. und 3. Hauptsphäre* bezeichnen. Sie besitzen die Eigenschaft, daß die Parallelebene zur $[xy]$-Ebene durch B_1 bzw. R_1 jeweils Tangentialebene von σ_{2H} bzw. σ_{3H} ist. Nach (1.42) berechnet man ihre Radien R_2 bzw. R_3 zu

$$R_2 = -\frac{d}{\lambda_0^2 \sin^2 \varphi}\ , \quad R_3 = \frac{d}{\lambda_0^2} \operatorname{ctg}^2 \varphi \tag{1.51a,b}$$

und folgert daraus die interessanten Beziehungen

$$\frac{R_2}{R_3} = -\frac{1}{\cos^2 \varphi}\ , \quad R_2 + R_3 = -\frac{d}{\lambda_0^2} = R_h. \tag{1.52a,b}$$

Die Beziehung (1.52a) ist unabhängig von λ_0; sie zeigt, daß die Radien der 2. und 3. Hauptsphäre stets entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Wir vermerken einige Ergebnisse im

Satz 5. *Die Scheitelpunkte aller Sphären, die eine Gerade g_1 in einem Punkt B_1 und eine zu g_1 windschiefe Gerade g_2 berühren, liegen auf einer ebenen algebraischen Kurve 3. Ordnung k_3* (1.39) *in der isotropen Normalebene η auf g_1 durch B_1. Die Achse a_H der 1. Hauptsphäre σ_H liegt symmetrisch zu den Erzeugenden, die η aus allen hyperbolischen Zylindern ζ* (1.10) *herausschneidet. Je 2 Sphären aus Σ zum Linienelement (B_1, g_1) von gleichem Radius besitzen Achsen a_1, a_2, die von a_H entgegengesetzt gleiche Abstände besitzen. Die Kurve k_3 schneidet g_1 und g_2 in den Scheitelpunkten der 2. und 3. Hauptsphäre σ_{2H}, bzw. σ_{3H}, falls $\varphi \neq \pi/2$ gilt. Für alle Paare von assoziierten Sphären aus Σ zum Linienelement (B_1, g_1) ist das Produkt der Abstände der entsprechenden Sphärenscheitel vom Punkt B_1 konstant.*

§2 Geometrische Ergänzungen

Betrachtet man im dreidimensionalen euklidischen Raum die Mittelpunkte aller Kugeln, die zwei windschiefe Geraden g_1, g_2 berühren, dann liegen diese Punkte auf einem *orthogonalen hyperbolischen Paraboloid* Φ_{12} (vgl. [4]). Zu einem vorgegebenen hyperbolischen Paraboloid Φ_{12} ist jedoch g_1, g_2 nicht eindeutig bestimmt, es gibt vielmehr eine einparametrige Schar von Geradenpaaren (g_1, g_2), die Φ_{12} als *Abstandsfläche* erzeugen.

Die entsprechende Fragestellung wollen wir jetzt im einfach isotropen Raum behandeln, wobei an die Stelle von Φ_{12} die Fläche der Scheitel aller Berührsphären von g_1 und g_2 tritt. Diese Fläche, die i.f. als *Scheitelfläche*

Ψ_{12} bezeichnet wird, gewinnt man aus (1.9a,b) mittels $x = u$, $y = v$ in der Form

$$F \equiv xyz + \frac{d}{4}(x^2 \operatorname{tg}\varphi/2 + y^2 \operatorname{ctg}\varphi/2) = 0. \tag{2.1}$$

Es handelt sich um das schon in (1.41) betrachtete gerade Konoid 3. Ordnung mit der Geraden n als *doppelter Leitgeraden*. Bildet man aus (2.1) die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} F_x &\equiv yz + \frac{d}{2}x \operatorname{tg}\varphi/2 = 0 \\ F_y &\equiv xz + \frac{d}{2}y \operatorname{ctg}\varphi/2 = 0 \\ F_z &\equiv xy = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

so erkennt man, daß der Koordinatenursprung $U(0,0,0)$ der *einzige singuläre Punkt* von Ψ_{12} ist, d.h. *geometrische Bedeutung* besitzt. Wird Ψ_{12} mit einer Ebene $y = kx$ geschnitten, so stellt sich für $k \neq 0$ nebst der doppelt zu zählenden Leitgeraden n die Flächenerzeugende

$$y = kx, \quad z = -\frac{d}{4k}(\operatorname{tg}\varphi/2 + k^2 \operatorname{ctg}\varphi/2) \tag{2.3}$$

ein, während die Ebene $y = 0$ die Fläche Ψ_{12} nur nach der doppelten Leitgeraden n und der Ferngeraden $x_0 = x_2 = 0$ schneidet. Analoges gilt für die Ebenen $x = ky$, wobei die Ebene $x = 0$ die Fläche nur nach der doppelten Leitgeraden n und der Ferngeraden $x_0 = x_1 = 0$ schneidet. Demnach besitzen die Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ *geometrische Bedeutung*. Falls also ein anderes Geradenpaar (g_3, g_4) ebenfalls die Scheitelfläche Ψ_{12} erzeugt, dann müssen die Geraden g_3 und g_4 die doppelte Leitgerade n von Ψ_{12} in zu U symmetrisch gelegenen Punkten schneiden und zur Richtebene $z = 0$ von Ψ_{12} parallel sein. Weiters müssen g_3 und g_4 mit der Ebene $y = 0$ entgegengesetzt gleiche Winkel einschließen. Werden diese Winkel mit $\pm\frac{1}{2}\psi$ bezeichnet und die Abstände der Geraden g_3, g_4 von U mit $\pm\frac{1}{2}h$ angenommen, dann erhält man analog zu (1.9a,b) zwei Gleichungen, die als Scheitelfläche die algebraische Fläche

$$xyz + \frac{h}{4}(x^2 \operatorname{tg}\psi/2 + y^2 \operatorname{ctg}\psi/2) = 0 \tag{2.4}$$

liefern. Sollen (2.1) und (2.4) für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ übereinstimmen, so liefert dies die beiden Bedingungen

$$d \operatorname{tg}\varphi/2 = h \operatorname{tg}\psi/2, \quad d \operatorname{ctg}\varphi/2 = h \operatorname{ctg}\psi/2, \tag{2.5a,b}$$

aus denen wegen $d > 0$, $h > 0$ sofort $d = h$ und $\varphi = \psi$ folgt. Damit gilt $g_1 \equiv g_3$, $g_2 \equiv g_4$. Wir vermerken den

Satz 6. *Zwei windschiefe nichtisotrope Geraden g_1, g_2 des einfach isotropen Raumes und die Scheitelfläche Ψ_{12} aller parabolischen Berührsphären von g_1 und g_2 bestimmen sich gegenseitig eindeutig.*

Wir betrachten nochmals alle parabolischen Sphären von festem Radius R_0, die zwei windschiefe, nichtisotrope Geraden berühren. Mittels (1.9b) erhält man aus (1.37) für die Sehnenmittenkurve die Darstellung

$$\xi = u\cos^2\varphi/2, \quad \eta = \frac{d}{4uR_0}\operatorname{tg}\varphi/2, \quad \zeta = 0. \tag{2.6}$$

Dies ist eine gleichseitige Hyperbel mit der Gleichung

$$\xi\eta = \frac{d}{8R_0}\sin\varphi \tag{2.7}$$

und den isotropen Bisektoren als Asymptoten. Bezeichnen B_1 und B_2 die entsprechenden Berührungspunkte mit g_1 bzw. g_2, dann erzeugen die Verbindungsgeraden $e = B_1B_2$ eine Regelfläche Λ, die sich durch die Beziehung

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{d}{R_0} \tag{2.8}$$

charakterisieren läßt. Die Gleichung (2.8) beschreibt eine (2–2)-Korrespondenz zwischen g_1 und g_2, sodaß die Regelfläche Λ nach dem Chasleschen Korrespondenzprinzip (vgl. [7, 48]) eine *Regelfläche 4. Ordnung* ist. Sie besitzt die Geraden g_1 und g_2 als doppelte Leitgeraden und die Hyperbel (2.7) als Leithyperbel. Nach [7, 261] ist Λ somit eine Regelfläche 4. Ordnung von 7. Sturmscher Art; die Ferngerade $x_0 = x_3 = 0$ ist Doppelerzeugende der Fläche. Unter Benützung der Leitgeraden g_1 und des Richtungsvektors $\overrightarrow{B_1B_2}$ auf den Erzeugenden e von Λ kann man die Regelfläche in der Gestalt

$$\begin{aligned} x &= \lambda\cos\varphi/2 + t(\mu-\lambda)\cos\varphi/2 \\ y &= -\lambda\sin\varphi/2 + t(\mu+\lambda)\sin\varphi/2 \\ z &= \frac{1}{2}d - td \end{aligned} \tag{2.9}$$

parametrisieren, wobei λ und t die Flächenparameter sind und die Nebenbedingung (2.8) gilt. Durch Elimination von λ, μ und t aus (2.9) und (2.8) erhält man nach einiger Rechnung die *Flächengleichung*

$$\begin{aligned} \frac{1}{8R_0d}(d^2-4z^2)^2\sin^2\varphi = \\ = 4dz(x^2\sin^2\varphi/2 + y^2\cos^2\varphi/2) + xy(d^2+4z^2)\sin\varphi. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Wie aus (2.10) ersichtlich, schneidet Λ die Fernebene ω nach der Doppelgeraden $x_0 = x_3 = 0$ und dem Fernkegelschnitt $x_0 = x_3^2 \sin\varphi - 2x_1x_2R_0d{=}0$. Die 4 Torsallinien von Λ werden durch $\left\{\lambda{=}0, \mu{=}\pm\sqrt{\frac{d}{R_0}}\right\}$ und $\left\{\lambda = \pm\sqrt{\frac{d}{R_0}}, \mu = 0\right\}$ festgelegt. Wir vermerken den

Satz 7. *Die Verbindungsgeraden der Berührpunkte aller Sphären von festem Radius R_0 mit zwei nichtisotropen windschiefen Geraden g_1, g_2 erzeugen eine Regelfläche 4. Ordnung Λ, 7. Sturmscher Art mit den Geraden g_1 und g_2 als doppelten Leitgeraden und der Ferngeraden der durch g_1 und g_2 bestimmten Ebenenstellung als Doppelerzeugender. Die Regelfläche Λ kann als Menge der Treffgeraden von g_1, g_2 und der Sehnenmittenhyperbel* (2.7) *erzeugt werden.*

Wir betrachten nochmals alle parabolischen Sphären σ, die 3 paarweise windschiefe, nichtisotrope Geraden g_1, g_2, g_3 berühren. Als *Sehnenmittenkurve* dieser Sphärenschar erhält man aus (1.19a) mittels (1.37) in der Ebene $\zeta = 0$ die Kurve

$$\begin{aligned}&\frac{4}{\sin^2\varphi}(\xi e_{31} sin^2\varphi/2 + \eta e_{32} cos^2\varphi/2 + q e_{33}\xi\eta)^2 = \\ &= \xi^2\sin^2\varphi/2 + \eta^2\cos^2\varphi/2 - 2a_{33}q\xi\eta - 2a_{31}\xi\sin^2\varphi/2 - \\ &- 2a_{32}\eta\cos^2\varphi/2 + \frac{1}{4}(a_{31}^2 + a_{32}^2)\sin^2\varphi.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Die Gleichung (2.11) stellt für $e_{33} \neq 0$ eine *pseudoeuklidisch bizirkuläre Kurve 4. Ordnung* dar. Für $e_{33} = 0$ ist (2.11) ein *Kegelschnitt* mit der Gleichung

$$\begin{aligned}&\xi^2(\sin^2\varphi/2 - e_{31}^2\,\mathrm{tg}^2\varphi/2) - 2\xi\eta(a_{33}q + e_{31}e_{32}) + \\ &+\eta^2(\cos^2\varphi/2 - e_{32}^2\,\mathrm{ctg}^2\varphi/2) - 2a_{31}\xi\sin^2\varphi/2 - \\ &-2a_{32}\eta\cos^2\varphi/2 + \frac{1}{4}\left(a_{31}^2 + a_{32}^2\right)\sin^2\varphi = 0.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Um den Typus von (2.12) zu bestimmen, berechnen wir die Diskriminante Δ jener quadratischen Gleichung, die die Fernpunkte von (2.12) festlegt. Man findet zunächst $\Delta = (a_{33}q + e_{31}e_{32})^2 - (\sin^2\varphi/2 - e_{31}^2\,\mathrm{tg}^2\varphi/2)\cdot$ $\cdot(\cos^2\varphi/2 - e_{32}^2\,\mathrm{ctg}^2\varphi/2)$ und diese Gleichung läßt sich unter Beachtung von $e_{31}^2 + e_{32}^2 = 1$ umformen zu

$$\Delta = (a_{33}q + e_{31}e_{32})^2 + (e_{31}^2 - \cos^2\varphi/2)^2. \tag{2.13}$$

Diese Gleichung zeigt, daß $\Delta > 0$ gilt, falls nicht $e_{31} = \pm\cos\varphi/2$, $e_{32} = \pm\sin\varphi/2$ und entsprechend $a_{33} = \mp\frac{1}{2}d$ gilt. Dann fällt aber g_3 mit g_1 bzw.

g_2 zusammen, was nicht zulässig ist. Somit ist (2.12) stets eine *Hyperbel*; diese ist nur für $\varphi = \pi/2$ gleichseitig.

Bestimmen wir noch jene Regelfläche Λ, die von den Verbindungsgeraden $e := B_1B_2$ der Berührungspunkte $B_1 \in g_1$ und $B_2 \in g_2$ obiger Sphärenschar erzeugt wird! Werden die Gleichungen (1.38a,b) in (1.19a) eingesetzt, so entsteht nach einiger Rechnung die Bedingung

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sin\varphi}\big[2\lambda(e_{31}\sin\varphi/2 - e_{32}\cos\varphi/2)+\\
&+2\mu(e_{31}\sin\varphi/2 + e_{32}\cos\varphi/2) + qe_{33}(\mu^2-\lambda^2)\big]^2 =\\
&=\mu^2(\sin\varphi - 2qa_{33}) + \lambda^2(\sin\varphi + 2qa_{33}) -\\
&-4\mu(a_{31}\sin\varphi/2 + a_{32}\cos\varphi/2) - 4\lambda(a_{31}\sin\varphi/2 - a_{32}\cos\varphi/2)+\\
&+2(a_{31}^2 + a_{32}^2)\sin\varphi = 0.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Die Gleichung (2.14) ist für $e_{33} \neq 0$ eine (4-4)-Korrespondenz zwischen den Trägergeraden g_1 und g_2, sodaß die erzeugte Regelfläche Λ nach dem Chasleschen Korrespondenzprinzip die Ordnung 8 besitzt. Für $e_{33} = 0$ liefert (2.14) nur eine (2-2)-Korrespondenz und Λ besitzt die Ordnung 4. Λ kann in diesem Fall als Menge aller Geraden erzeugt werden, die g_1, g_2 und die Hyperbel (2.12) schneiden. Somit ist Λ eine Regelfläche 4. Grades von 7. Sturmscher Art (vgl. [7, 261]) mit den Geraden g_1 und g_2 als *doppelten Leitgeraden* und der Ferngeraden der durch g_1 und g_2 festgelegten Ebenenstellung als *Doppelerzeugender*. Wir vermerken

Satz 8. *Sind g_1, g_2, g_3 drei paarweise windschiefe, nichtisotrope Geraden allgemeiner Lage, dann bilden die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte der einbeschriebenen Sphären 3 Regelflächen 8. Grades. Die zu je 2 Geraden gehörige Sehnenmittenkurve ist eine pseudoeuklidisch bizirkuläre Kurve in jener Ebene, die durch die entsprechenden Bisektoren aufgespannt wird.*

Satz 9. *Sind g_1, g_2, g_3 drei paarweise windschiefe, nichtisotrope Geraden, die zu einer Ebene parallel sind, dann bilden die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte der einbeschriebenen Sphären 3 Regelflächen 4. Grades, 7. Sturmscher Art. Die zu je 2 Geraden gehörige Sehnenmittenkurve ist eine Hyperbel in jener Ebene, die durch die entsprechenden Bisektoren aufgespannt wird. Die erzeugte Regelfläche kann als Menge der Treffgeraden der Geraden g_i, g_j $(i \neq j)$ und der zugehörigen Sehnenmittenhyperbel erzeugt werden.*

Der folgende Satz zeigt, wie man zu mehr als 4 paarweise windschiefen Geraden in einem Sonderfall 2 reelle parabolische Berührsphären finden kann.

Satz 10. *Sind $\{f_1, f_2, \dots\}$ paarweise windschiefe Erzeugenden auf einem einschaligen Drehhyperboloid Ψ mit vollisotroper Drehachse a und ist g eine beliebige Gerade mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *g ist zu keiner Erzeugenden des Asymptotenkegels von Ψ parallel.*

(b) *g ist nicht zu a parallel.*

(c) *Ist der wahre Umriß von Ψ für die Blickrichtung g eine Hyperbel u^n, so liegt die projizierende Gerade g^n im Inneren von u^n, aber nicht auf den Scheiteltangenten von u^n.*

(d) *Ist der wahre Umriß von Ψ für die Blickrichtung g eine Ellipse u^n, so liegt die projizierende Gerade g^n im Äußeren von u^n, aber nicht auf einer Scheiteltangente von u^n.*

Dann existieren genau 2 reelle parabolische Berührsphären σ_1, σ_2 von $\{f_1, f_2, \dots, g\}$.

Beweis. Jede Ψ einbeschriebene parabolische Sphäre σ berührt $\{f_1, f_2, \dots, \}$. Es bleibt daher noch zu zeigen, daß 2 reelle Sphären σ_1, σ_2 dieser Art existieren, die zusätzlich g berühren. Durch Einführung von (eventuell) zwei Seitenrissen kann g projizierend gemacht werden, wobei wegen (a) der Normalumriß von Ψ gemäß [2, 228f] eine Hyperbel u^n oder eine Ellipse u^n ist. Wegen (b) ist u^n nicht kreisförmig. Ist u^n eine *Hyperbel*, dann ist gemäß (c) die projizierende Gerade g^n ein Innenpunkt der Hyperbel u^n, d.h. liegt in dem Bereich, wo der Hyperbelmittelpunkt liegt. Da der Umriß σ^n der Ψ einbeschriebenen Sphäre eine Parabel ist, deren Achse mit der Nebenachse von u^n zusammenfällt und die u^n doppelt berührt, bleibt zu zeigen, daß es durch jeden Innenpunkt g^n von u^n genau 2 Parabeln dieser Art gibt. Zum Beweis kann u^n in der Gestalt

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.15}$$

und σ^n in der Form

$$y = Rx^2 + d \tag{2.16}$$

vorgegeben werden. Als *Berührbedingung* von u^n und σ^n erhält man dann nach kurzer Rechnung

$$a^2R + d = \frac{b^2}{4a^2}, \tag{2.17}$$

während die y-Koordinate der symmetrisch zur y-Achse gelegenen Berührungspunkte

Abbildung 3.

B_1, B_2 durch

$$y = \frac{b^2}{2a^2R} \tag{2.18}$$

festgelegt werden (vgl. Abbildung 3).

Soll σ^n einen vorgegebenen Punkt $P(x_0, y_0)$ enthalten, dann gilt nach (2.16) $y_0 = Rx_0^2 + d$ und hiermit folgt aus (2.17) die quadratische Gleichung

$$2a^2(a^2 - x_0^2)R^2 + 2a^2y_0R - \frac{1}{2}b^2 = 0 \tag{2.19}$$

in R, die für $x_0 \neq \pm a$ die beiden Lösungen

$$R_{1,2} = \frac{-ay_0 \pm \sqrt{a^2y_0^2 - b^2x_0^2 + a^2b^2}}{2a(a^2 - x_0^2)} \tag{2.20}$$

besitzt; nach Voraussetzung (c) gilt ja $x_0 \neq \pm a$. Ersichtlich gilt für die Diskriminante Δ dieser quadratischen Gleichung $\Delta = a^2y_0^2 - b^2x_0^2 + a^2b^2 > 0$ genau dann, wenn P im Innenbereich der Hyperbel u^n liegt, denn für den Hyperbelmittelpunkt $M(0, 0)$ gilt nämlich $\Delta > 0$. Somit existieren

2 reelle Parabeln durch P, da aus den beiden Werten R_1, R_2 in (2.20) gemäß (2.17) die ausstehenden Werte d_1, d_2 eindeutig bestimmt werden können. Mittels VIETA findet man für die Radien R_1, R_2 aus (2.19) unmittelbar

$$R_1 + R_2 = \frac{y_0}{x_0^2 - a^2}, \quad R_1 R_2 = \frac{b^2}{4a^2(x_0^2 - a^2)} \tag{2.21}$$

und berechnet hiermit aus (2.18) für die entsprechenden y-Werte y_1, y_2

$$y_1 + y_2 = 2y_0, \quad y_1 y_2 = \frac{b^2}{a^2}(x_0^2 - a^2). \tag{2.22a,b}$$

Hiermit stellt sich schließlich

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{a}\sqrt{a^2y_0^2 - b^2x_0^2 + a^2b^2} \\ y_2 &= y_0 - \frac{1}{a}\sqrt{a^2y_0^2 - b^2x_0^2 + a^2b^2} \end{aligned} \tag{2.23a,b}$$

ein, wobei auf die Angabe der symmetrischen Lösung verzichtet wurde. Ist u^n eine *Ellipse*, die man o. B. d. A. in der Gestalt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.24}$$

ansetzen kann, dann gewinnt man aus (2.24) und (2.16) in Analogie zu den Formeln (2.17), (2.18), (2.19) und (2.20)

$$a^2R + d = -\frac{b^2}{4a^2R}\ , \tag{2.25}$$

$$y = -\frac{b^2}{2a^2R}\ , \tag{2.26}$$

$$2a^2(a^2 - x_0^2)R^2 + 2a^2y_0R + \frac{1}{2}b^2 = 0, \tag{2.27}$$

$$R_{1,2} = \frac{-ay_0 \pm \sqrt{a^2y_0^2 + b^2x_0^2 - a^2b^2}}{2a(a^2 - x_0^2)}. \tag{2.28}$$

Nach Voraussetzung (d) gilt $x_0 \neq \pm a$ und für die Diskriminante $\Delta = a^2y_0^2 + b^2x_0^2 - a^2b^2$ gilt $\Delta > 0$, wenn $P(x_0, y_0)$ im Außenbereich der Ellipse (2.24) liegt; für den Ellipsenmittelpunkt $M(0,0)$ gilt nämlich $\Delta < 0$. Somit besitzt (2.28) 2 reelle Lösungen R_1, R_2, die über (2.25) zwei reelle doppelt berührende Parabeln σ_1^n, σ_2^n der Umrißellipse u^n bestimmen. Die zu (2.23a,b) analogen Formeln lauten schließlich

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{a}\sqrt{a^2y_0^2 + b^2x^2 - a^2b^2}$$
$$y_2 = y_0 - \frac{1}{a}\sqrt{a^2y_0^2 + b^2x^2 - a^2b^2}\,. \tag{2.29a,b}$$

Die Abbildung 3 zeigt für die Annahme $a = 3$, $b = 4$ im Fall einer Hyperbel u^n die beiden Parabeln σ_1^n und σ_2^n durch den Punkt $P(2,5;2)$. □

Literaturverzeichnis

[1] O. Bottema and B. Roth, Theoretical Kinematics, *North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, New York, Oxford*, 1979.

[2] H. Brauner, Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie, *Springer–Verlag, Wien–New York*, 1985.

[3] K. Fladt und A. Baur, Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven, *Vieweg–Verlag, Braunschweig*, 1975.

[4] M. Husty und H. Sachs, Abstadsprobleme zu windschiefen Geraden I, *Sitz.–Ber. der Österr. Akad. Wiss., Wien* (1994, im Druck).

[5] W. Kickinger, Konstruktive Behandlung des Drehparaboloids, *Informationsblätter für Darstellende Geometrie, Univ. Innsbruck* **2** (1983), 9–16.

[6] J. Lang, Zu den linearen Sphärenmannigfaltigkeiten im einfach isotropen Raum, *Berichte der Math.–Stat. Sektion, Forschungszentrum Graz, Ber* **218** (1984), 1–30.

[7] E. Müller und J. Krames, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. 3: Kon-

struktive Behandlung der Regelflächen, F. Deuticke, *Leipzig und Wien*, 1931.
[8] P. K. Raschewski, Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis, *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften*, *Berlin*, 1959.
[9] H. Sachs, Zur Geometrie der Sphären im einfach isotropen Raum, *Sitz.–Ber. Akad. Wiss. Wien* **186** (1977), 241–261.
[10] H. Sachs, Isotrope Geometrie des Raumes, *Vieweg–Verlag*, *Braunschweig/Wiesbaden*, 1990.
[11] H. Wünsch, Die kugeltreuen Transformationen des isotropen Raumes, Dissertation, *TU Karlsruhe*, 1936, pp. 1–216.

F. Mészáros
Montanuniversität Leoben
Institut für Mathematik
A–8700 Leoben
Austria

H. Sachs
Montanuniversität Leoben
Institut für Mathematik
A–8700 Leoben
Austria

(Eingegangen am 21. Dezember 1993.)