

Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz.

Von O. VARGA in Debrecen.

Zu Grunde gelegt sei eine $2n-1$ -dimensionale Linienelementmannigfaltigkeit. Koordinaten eines Punktes seien $x^i (i=1, \dots, n)$, während die hindurchgehende Richtung durch das Verhältnis der Größen $x'^i (i=1, \dots, n)$ bestimmt ist. Ein so bestimmtes Linienelement soll abgekürzt mit (x, x') bezeichnet werden. Eine solche Mannigfaltigkeit bildet die Grundlage der Cartanschen Theorie der Finslerschen Räume¹⁾. Die affine Theorie einer solchen Mannigfaltigkeit ist zuerst in der Dissertation des Verfassers untersucht worden²⁾. Hier soll nun ein Hauptproblem dieser Theorie, das Äquivalenzproblem gelöst werden. Da die in Fußnote ²⁾ zitierte Abhandlung des Verf. nur einen kurzen Auszug aus dieser Theorie enthält, erwies es sich als notwendig die ganze Theorie von Grund auf zu entwickeln. Dementsprechend zerfällt die vorliegende Abhandlung in zwei Teile. Im ersten Teil wird die Theorie des affinen Zusammenhanges einer Linienelementmannigfaltigkeit und die Krümmungstheorie entwickelt. Als Anwendung werden spezielle affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten untersucht, von denen insbesondere die Mannigfaltigkeiten mit absolutem Parallelismus der Linienelemente und diejenigen, die die direkte affine Verallgemeinerung der Finslerschen Räume sind, ein Interesse verdienen. Im zweiten Teil wird das Äquivalenzproblem gelöst. Erst durch die Lösung dieses Problems ist der Aufbau einer solchen Geometrie völlig sicher gestellt, denn dadurch ist ja gleichzeitig die Frage nach einem, die Mannigfaltigkeit charakterisierenden, vollständigen Invariantensystem gelöst.

ERSTER ABSCHNITT.

§ 1. Der affine Zusammenhang.

Die Transformationen, bezüglich denen Invarianten aufgestellt, bzw. untersucht werden sollen, bestehen aus den umkehrbar eindeutigen — und hinreichend oft differenzierbaren — Transformationen

$$(1, 1a) \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n)$$

$$(1, 1b) \quad \bar{x}'^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} x'^k \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

¹⁾ CARTAN (1) S. 4—7., siehe das Schriftenverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

²⁾ O. VARGA (1).

Sämtliche Größen (Vektoren, Tensoren usw.) sind erst in Bezug auf ein Linienelement (x, x') definiert. Die Komponenten einer solchen Größe sind also Funktionen der x^i und x'^i , die in den x'^i von nullter Dimension positiv homogen sind. Wir werden aber auch solche Größen zulassen, die in den x'^i von irgendwelcher ganzzahliger Dimension homogen sind. In diesem Falle hängt die Größe nicht vom Linienelement (x, x') sondern vom Vektor (x, x') ab. Wir wollen aber der bequemerem Ausdruckweise halber auch in diesem Falle vom Linienelement (x, x') sprechen.

Um den affinen Zusammenhang definieren zu können, müssen wir Festsetzungen zum Vergleich von Vektoren in verschiedenen benachbarten Linienelementen treffen. Ist $\xi^i(x, x')$ ein differenzierbares Feld von kontravarianten Vektoren — wobei die ξ^i in den x'^i von nullter Dimension homogen sein sollen — und sind $\xi^i(x, x')$ und $\xi^i(x+dx, x'+dx')$ zwei benachbarte Feldvektoren, dann soll ihnen als „Differenz“ eine solche Größe zugeordnet werden die erstens *wieder ein Vektor* ist und zweitens *unabhängig von einem bestimmten Bezugssystem stets dieselbe Form besitzt*. Ein Operator, der diese Zuordnung leistet, soll als invariantes Differential bezeichnet werden. Ist $D\xi^i$ das invariante Differential so bedeuten unsere Forderungen

$$(1, 2) \quad D\xi^i = \bar{D}\xi^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} D\xi^k.$$

In der Wahl des Operatores D besteht noch eine grosse Willkür. Die Festsetzungen sollen nun so getroffen werden, daß der Operator D entsprechenden Gesetzen genügt wie das gewöhnliche Differential. Dies kommt darauf hinaus, den Operator in der Form

$$(1, 3) \quad D\xi^i = d\xi^i + C_{kl}^i(x, x') \xi^k dx'^l + \Gamma_{kl}^i(x, x') \xi^k dx^l$$

festzulegen. Aus der Forderung:

$$D\xi^i(x, x') = D\xi^i(x, \lambda x')$$

können wir unmittelbar die beiden Folgerungen ziehen;

a) Die $C_{kl}^i(x, x')$ sind in den x'^i von (-1) -ter Dimension, die $\Gamma_{kl}^i(x, x')$ hingegen von nullter Dimension homogen.

b) Es bestehen die wichtigen Relationen

$$(1, 4) \quad C_{kl}^i(x, x') x'^l = 0.$$

Aus der Forderung (1, 2) ergibt sich folgendes Transformationsgesetz für die C_{kl}^i und Γ_{kl}^i beim Übergang (1, 1) zu Koordinaten $\bar{x}^a, \bar{x}'^a$:

$$(1, 5) \quad \bar{C}_{bc}^a = C_{kl}^i \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^c},$$

$$(1, 6) \quad \bar{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{kl}^i \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^c} + C_{kl}^i \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^d \partial \bar{x}^c} \frac{\partial \bar{x}^d}{\partial x^s} x'^s + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^b \partial \bar{x}^c} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}.$$

In der Geometrie der affinzusammenhängenden Punktmannigfaltigkeiten treten bekanntlich Größen, auf, die zu gleichen Zwecken eingeführt werden, wie hier die I_{ki}^i . Es ist nun wohl bekannt, daß man mit ihrer Hilfe von beliebigen differenzierbaren Tensoren ausgehenden, durch kovariantes Differenzieren, Differentialinvarianten beliebiger Ordnung erzeugen kann³⁾. Dies beruht einfach darauf, daß in dem Transformationsgesetz dieser Größen, der dem zweiten Posten auf der rechten Seiten von (1, 6) entsprechende Ausdruck in diesem Falle wegfällt und man so eine explizite Gleichung für die zweiten Ableitungen der Transformationsfunktionen von (1, 1a) erhält. Im vorliegenden Falle können daher Differentialinvarianten auf diese Weise nicht erzeugt werden. Es wird sich nun zeigen, daß der Grund hierfür der ist, daß die in (1, 3) eingehenden Größen dx'^i — wie aus (1, 1b) folgt — keinen vektoriellen Charakter besitzen. Wir wollen daher (1, 3) auf eine Form bringen, in der statt den Größen dx'^i solche auftreten, die sich wie Vektoren transformieren. Aus (1, 6) ergibt sich, daß die Größen

$$(1, 7) \quad G_j^i = \Gamma_{kj}^* x'^k$$

sich gemäß

$$(1, 8) \quad \bar{G}_b^a = G_k^i \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b} + \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^b \partial \bar{x}^d} \bar{x}'^d$$

transformieren. Hieraus folgt nun, daß sich die Größen

$$(1, 9) \quad \pi^i(d) = dx'^i + G_k^i dx^k$$

wie ein Vektor transformieren. Die G_j^i sind wegen (1, 7) und der früher festgestellten Homogenität nullter Dimension der I_{kj}^i von erster Dimension homogen in den x'^i und dies trifft auch für die Pfaffschen Formen (1, 9) zu. Wir führen nun mittels (1, 9) in dem Ausdruck (1, 3) des invarianten Differentials an Stelle der dx'^i die $\pi^i(d)$ ein, dies ergibt:

$$(1, 10) \quad D\xi^i = d\xi^i + C_{kj}^i \xi^k \pi^j(d) + \Gamma_{kj}^{*i} \xi^k dx^j.$$

In (1, 10) sind die Γ_{kj}^{*i} durch

$$(1, 11) \quad \Gamma_{kj}^{*i} = I_{kj}^i - C_{ks}^i G_j^s$$

bestimmt. Das Transformationsgesetz dieser Größen ist wegen (1, 5), (1, 6), (1, 8) und (1, 11) durch

$$(1, 12) \quad \bar{\Gamma}_{bc}^{*a} = \Gamma_{kj}^{*i} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^c} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^b \partial \bar{x}^c} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}$$

bestimmt. Die Gleichungen (1, 12) haben nun die gesuchte Form, aus der die zweiten Ableitungen der Transformationsfunktionen berechenbar sind. Wir müssen nun eine Festsetzung treffen, damit die Γ_{kj}^i eindeutig aus den

³⁾ Siehe z. B. O. VERLEN (1) insbes. S. 36—38.

Γ_{kj}^{*i} und C_{ki}^j bestimmbar werden. Diese ist

$$(1, 4a) \quad C_{ki}^j x'^k = 0.$$

Es wird dann

$$(1, 13) \quad G_j^i = \Gamma_{kj}^{*i} x'^k.$$

Wir geben nun folgende:

Definition: Eine $(2n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit von Linienelementen (x, x') soll affinzusammenhängend heißen, wenn ersten Größen C_{ki}^j mit (tensoriellem) Transformationsgesetz (1, 5) gegeben sind, die (1, 4) und (1, 4a) genügen, zweitens Größen mit einem Transformationsgesetz (1, 12) und wenn schließlich eine Vektorübertragung (invariantes Differential) der Gestalt (1, 10) definiert ist, in der die Pfaffschen Formen $\pi^i(d)$ durch (1, 9) bestimmt sind.

Der so bestimmte affine Zusammenhang soll symmetrisch heißen, wenn es die Γ_{kj}^{*i} sind. Im allgemeinen Fall können wir, wie in der Theorie affinzusammenhängender Punktmannigfaltigkeiten, den Zusammenhang auch durch einen symmetrischen ersetzen der durch

$$(1, 14) \quad \Lambda_{kj}^i = \frac{1}{2} (\Gamma_{kj}^{*i} + \Gamma_{jk}^{*i})$$

bestimmt ist, müssen aber dann noch den durch

$$(1, 15) \quad \Omega_{kj}^i = \frac{1}{2} (\Gamma_{kj}^{*i} - \Gamma_{jk}^{*i})$$

bestimmten alternierenden Tensor hinzunehmen.

§ 2. Die Parallelübertragung und die kovariante Ableitungen.

Ein Vektor ξ^i des Linienelementes (x, x') heiße parallelübertragen, nach dem Linienelement $(x+dx, x'+dx')$ wenn

$$(2, 1) \quad D\xi^i = 0$$

gilt. Ist $\varrho(x, x')$ ein Skalar der homogen von 1-ter Dimension ist, so ist durch

$$(2, 2) \quad t^i = \frac{x'^i}{\varrho(x, x')}$$

ein Linienelement bestimmt. Für ein solches Linienelement können wir, eine nur vom Nachbarpunkt abhängige Parallelübertragung durch

$$(2, 3) \quad \pi^i(d) = 0$$

erklären. In den Komponenten t^i ist, wie unmittelbar zu sehen, diese Übertragung durch

$$(2, 4) \quad \frac{dt^i + G_k^i(x, t) dx^k}{t^i} = \frac{dt^h + G_k^h(x, t) dx^k}{t^h}$$

bestimmt. Die „Geraden Linien“ oder Bahnen der Mannigfaltigkeit sind diejenigen Kurven, deren Tangenten eine Mannigfaltigkeit von parallelen Linien-

elementen bilden. Bei Wahl eines geeigneten Parameters s sind die Bahnkurven durch

$$(2, 5) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + G_i^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^i}{ds} = 0$$

bestimmt, wobei der „affine“ Parameter bis auf Transformationen der Gestalt

$$s^* = as + b \quad (a, b \text{ Konstanten, } a > 0)$$

bestimmt ist.

Das invariante Differential (1, 10) kann auf Grund von (1, 9) auch in der Form

$$(2, 6) \quad D\xi^i = \xi^i_{;k} \pi^k(d) + \xi^i_{/k} dx^k$$

dargestellt werden. Hieraus folgt wie in der Finslerschen Geometrie⁴⁾

$$(2, 7) \quad \xi^i_{/k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^r} G_k^r + \Gamma_{sk}^{*i} \xi^s,$$

$$(2, 8) \quad \xi^i_{;k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + C_{sk}^i \xi^s.$$

Es ist auf der Hand liegend wie der D Operator für beliebige Tensoren zu erklären ist. Man erhält dann, durch eine (2, 6) entsprechende Zerlegung, zwei kovariante Ableitungen, die (2, 7) und (2, 8) auf beliebige Tensoren verallgemeinern und formal mit den entsprechenden Ableitungen der Finslerschen Theorie übereinstimmen. Vertauscht man in (2, 7) k und s , so ist der so entstehende Ausdruck gleichfalls eine — natürlich von (2, 2) verschiedene — kovariante Ableitung, wie aus dem Tensorcharakter der durch (1, 15) definierten $\mathcal{Q}_k^i$ folgt. Durch entsprechende Indexvertauschung kann man auch aus der kovarianten Ableitung eines beliebigen Tensors eine neue, ebenfalls kovariante Ableitung herleiten. Schließlich folgt aus den Transformationsgleichungen eines Tensors oder auch aus (2, 8), daß die Ableitung eines beliebigen Tensors nach den x^i eine Größe ergibt, die sich wie ein Tensor transformiert, sie ist allerdings von (-1) -ter Dimension homogen in dem x^i , hängt also vom Vektor (x, x') ab.

§ 3. Torsions- und Krümmungstensoren.

Bedeutet d und δ miteinander vertauschbare Differentiationssymbole und D bzw. $\mathcal{A}$ die zu ihnen gehörigen invarianten Differentiale so ist durch $\mathcal{A}dx^i - D\delta x^i$, in jedem Raumpunkt ein Vektor definiert. Die Berechnung dieses Ausdrucks ergibt wegen (1, 10):

$$(3, 1) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}dx^i - D\delta x^i &= C_{ks}^i (dx^k \pi(\delta)^s - \delta x^k \pi(d)^s) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\Gamma_{ks}^{*i} - \Gamma_{sk}^{*i}) (dx^k \delta x^s - \delta x^k dx^s). \end{aligned}$$

⁴⁾ CARTAN (1) S. 17–48.

Die auf der linken Seite von (3, 1) auftretenden Bilinearformen sind zwei völlig willkürlich wählbare kontravariante Tensoren 2-ter Stufe, die bezw. von (-1) -ter und nullter Dimension homogen in den x'^i sind. Daher sind

$$(3, 2) \quad C_{ks}^i, \frac{1}{2} (\Gamma_{ks}^{*i} - \Gamma_{sk}^{*i}) = Q_{ks}^i$$

zwei Tensoren (was übrigens schon bei (1, 5) und (1, 13) festgestellt wurde), die als die Torsionstensoren der Mannigfaltigkeit bezeichnet werden sollen. Im Falle eines symmetrischen Zusammenhanges ist C_{kl}^i der einzige Torsionstensor.

Zu den Krümmungstensoren gelangt man, wenn man unter Beibehaltung der obigen Voraussetzungen einem beliebigen differenzierbaren Vektorfeld den durch $\mathcal{A}D\xi^i - D\mathcal{A}\xi^i$ bestimmten Vektor zuordnet. Eine Rechnung, bei der (1, 9) und (1, 10) zu benützen ist, gibt für diesen Vektor den Ausdruck

$$(3, 3) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}D\xi^i - D\mathcal{A}\xi^i = & \left\{ \frac{1}{2} \Sigma_{krs}^i (\pi^s(\delta) \pi^r(d) - \pi^s(d) \pi^r(\delta)) \right. \\ & + \Pi_{krs}^i (dx^s \pi^r(\delta) - \delta x^s \pi^r(d)) \\ & \left. + \frac{1}{2} P_{krs}^i (\delta x^s dx^r - dx^s \delta x^r) \right\} \xi^k. \end{aligned}$$

In (3, 3) wurde dabei gesetzt:

$$(3, 4) \quad \Sigma_{krs}^i = \frac{\partial C_{kr}^i}{\partial x'^s} - \frac{\partial C_{ks}^i}{\partial x'^r} + C_{ps}^i C_{kr}^p - C_{pr}^i C_{ks}^p,$$

$$(3, 5) \quad \Pi_{krs}^i = \frac{\partial \Gamma_{ks}^{*i}}{\partial x'^r} - C_{kr/s}^i + C_{kp}^i \frac{\partial \Gamma_{ks}^{*p}}{\partial x'^p} G_r^p,$$

$$(3, 6) \quad \begin{aligned} P_{krs}^i = & \frac{\partial \Gamma_{kr}^{*i}}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_{ks}^{*i}}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{kr}^{*i}}{\partial x'^p} G_s^p + \frac{\partial \Gamma_{ks}^{*i}}{\partial x'^p} G_r^p \\ & + C_{kp}^i \left(\frac{\partial G_r^p}{\partial x^s} - \frac{\partial G_s^p}{\partial x^r} - G_{rm}^p G_s^m + G_{sm}^p G_r^m \right) \\ & + \Gamma_{kr}^{*p} \Gamma_{ps}^{*i} - \Gamma_{ks}^{*p} \Gamma_{pr}^{*i}. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite von (3, 6) wurde noch zur Abkürzung

$$(3, 7) \quad G_{kr}^i = \frac{\partial G_k^i}{\partial x'^r}$$

gesetzt. Da die bilinearen Formen auf der rechten Seite von (3, 3) willkürlich wählbare kontravariante Tensoren 2-ter Stufe sind und ξ^i ein willkürliches Vektorfeld ist, folgt unter Beachtung der Homogenität der C_{kl}^i und Γ_{kl}^{*i} , daß (3, 4), (3, 5), (3, 6) drei einfach kontra und dreifach kovariante Tensoren sind, die bezw. von (-2) -ter, (-1) -ter und nullter Dimension homogen in den x'^i sind. Diese drei Tensoren sollen als die Krümmungstensoren der affin-zusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeit bezeichnet werden. Es ist

unmittelbar zu sehen, daß man diese Tensoren auch durch folgende Wahl der Differentiale d, δ und der zugehörigen Pfaffschen Formen $\pi(d), \pi(\delta)$ erhält:

- (a) $dx^i = 0, \delta x^i = 0,$
- (b) $\delta x^i = 0, \pi^i(d) = 0.$
- (c) $\pi^i(d) = 0, \pi^i(\delta) = 0.$

Wir bilden noch die drei Tensoren, die man aus (3, 4), (3, 5), (3, 6) durch Überschieben mit x'^i erhält. Beachtet man (1, 4a) so ergibt sich

$$(3, 8) \quad \Sigma_{*rs}^i \equiv \Sigma_{krs}^i x'^k = C_{rs}^i - C_{sr}^i.$$

Aus

$$x'^k_{/h} = 0$$

folgt

$$(3, 9) \quad C_{kr/h}^i x'^k = 0$$

und daher

$$(3, 10) \quad \Pi_{*rs}^i \equiv \Pi_{krs}^i x'^k = \frac{\partial I_{ks}^{*i}}{\partial x'^r} x'^k.$$

Beachten wir, daß wegen (1, 13) und (3, 7)

$$(3, 11) \quad G_{sr}^i = \frac{\partial I_{ms}^{*i}}{\partial x'^r} x'^m + I_{rs}^{*i}$$

ist, so folgt aus (3, 6)

$$(3, 12) \quad P_{*rs}^i \equiv P_{krs}^i x'^k = \frac{\partial G_r^i}{\partial x^s} - \frac{\partial G_s^i}{\partial x^r} - G_{rp}^i G_s^p + G_{sp}^i G_r^p.$$

Unter Verwendung des Tensors (3, 12) erhält man wegen (3, 6) einen weiteren Tensor

$$(3, 13) \quad T_{krs}^i \equiv P_{krs}^i - C_{kp}^i P_{*rs}^p = \frac{\partial I_{kr}^{*i}}{\partial x^s} - \frac{\partial I_{ks}^{*i}}{\partial x^r} - \\ - \frac{\partial I_{kr}^{*i}}{\partial x'^p} G_s^p + \frac{\partial I_{ks}^{*i}}{\partial x'^p} G_r^p + I_{kr}^{*p} I_{ps}^{*i} - I_{ks}^{*p} I_{pr}^{*i}$$

der als Hauptkrümmungstensor der affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeit bezeichnet werden soll. In der Theorie der Finslerschen Räume ist das invariante Differential in einer, zu (1, 10) völlig analogen Weise definiert. Die C_{kl}^i und I_{kl}^{*i} sind dort aber in den beiden unteren Zeigern symmetrisch⁵⁾. Aus (3, 2) und (3, 8) folgt hieraus sofort der

Satz 1. *Unter den affinzusammenhängenden Räumen von Linienelementen bilden diejenigen die affine Verallgemeinerung der Finslerschen Räume für die*

$$(3, 14) \quad \Omega_{ks}^i = 0, \Sigma_{*ks}^i = 0$$

gilt.

⁵⁾ Vgl. E. CARTAN [1] S. 5 und S. 10—11.

Auch das Verschwinden der P_{*rs}^i hat eine einfache geometrische Bedeutung. Stellen wir die Bedingung für die unbeschränkte Integrabilität der Differentialgleichungen (2, 3) der Parallelverschiebung eines Linienelementes auf, so ist diese wegen (1, 9)

$$\delta dx'^i - d\delta x'^i = P_{*ks}^i (dx^k \delta x^s - \delta x^k dx^s) \equiv 0.$$

Daraus folgt der

Satz 2. *Diejenigen affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen, für die es einen absoluten (vom Wege unabhängigen) Parallelismus der Linienelemente gibt, sind durch*

$$(3, 15) \quad P_{*ks}^i = 0$$

gekennzeichnet⁶⁾.

ZWEITER ABSCHNITT.

§ 4. Das Äquivalenzproblem.

Sind zwei verschiedene affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten d. h. zwei Systeme $C_{kl}^i(x, x')$, $I_{kl}^{*i}(x, x')$ und $\bar{C}_{bc}^a(\bar{x}, \bar{x}')$, $\bar{I}_{bc}^{*a}$ von der im § 2 beschriebenen Art in Koordinaten (x, x') bzw. $(\bar{x}, \bar{x}')$ gegeben, dann bedeutet die Äquivalenz der Mannigfaltigkeiten die Existenz einer Transformation

$$(4, 1a) \quad x^i = x^i(\bar{x}).$$

$$(4, 1b) \quad x'^i = p_a^i \bar{x}'^a; \quad p_a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a},$$

durch die die Größen $\bar{C}_{bc}^a$, $\bar{I}_{bc}^{*a}$ gemäss (1, 5) und (1, 12) in C_{kl}^i bzw. I_{kl}^{*i} übergehen. Diese Frage wollen wir mit Hilfe eines für Punktmannigfaltigkeiten zu gleichen Zwecken verwendeten Satzes von O. VEULEN und J. M. THOMAS über ein gemischtes Differentialgleichungssystem lösen⁷⁾. Der Satz enthält ein Kriterium über die Lösbarkeit des Systems

$$(4, 2) \quad \frac{\partial Z^\alpha}{\partial u^q} = \psi^\alpha(u, Z) \quad (\alpha = 1, \dots, N) \\ (\varrho = 1, \dots, m)$$

$$(4, 3) \quad F_\sigma^{(1)}(Z, u) = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, r).$$

Bildet man erstens die Integrabilitätsbedingungen von (4, 2) unter Verwendung dieser Gleichungen selbst und wird ferner (4, 3) nach u^q abgeleitet, und ersetzt man in diesen Gleichungen die Ableitungen $\partial Z^\alpha / \partial u^q$ vermöge (4, 2), so erhält man eine Reihe von Relationen

$$(4, 4) \quad F_\mu^{(1)}(Z, u) = 0 \quad (\mu = 1, \dots, s).$$

⁶⁾ Da wegen (2, 5) für unsere Räume die Theorie der allgemeinen affinen Bahnen mit dem Parameter $G_i^i \frac{dx^i}{ds}$ gilt, folgt dieser Satz auch aus L. BERWALD [1] S. 761.

⁷⁾ J. M. THOMAS—O. VEULEN [1] S. 288. und O. VEULEN [1] S. 73—76.

Von (4, 4) kommt man nun durch ein entsprechendes Verfahren zu einer neuen Gleichungskette usw. Sei

$$(4, 5) \quad F_{\lambda}^{(N)}(Z, u) = 0 \quad (\lambda = 1, \dots, t)$$

die N -te so erhaltene Gleichungskette. Das Kriterium lautet nun folgendermaßen: Die Gleichungen (4, 2) und (4, 3) sind dann und nur dann lösbar, wenn eine Zahl N von der Art existiert, daß die aus den N ersten Gleichungsketten bestehenden Gleichungen verträglich sind und jede ihrer Lösungen $Z^0(u)$ die $N+1$ -te Gleichungskette identisch befriedigt.

Die für die Äquivalenz der beiden Mannigfaltigkeiten notwendigen und hinreichenden Bedingungen (1, 5), (1, 12) können wegen (4, 1b) auch so dargestellt werden:

$$(4, 7) \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} = p_a^i,$$

$$(4, 7) \quad \frac{\partial p_b^i}{\partial \bar{x}^e} = p_e^i \bar{I}_{bc}^{se} - I_{kl}^{si} p_b^k p_c^l,$$

$$(4, 8) \quad \bar{C}_{bc}^e p_e^i = C_{kl}^i p_b^k p_c^l.$$

Dies ist zunächst ein gemischtes Differentialgleichungssystem für die Funktionen x^i, p_a^i . Da aber in diesen Gleichungen als unabhängige Variable auch die $\bar{x}^a$ auftreten, ergänzen wir es zu einem System, indem noch Ableitungen nach $\bar{x}^a$ auftreten und nehmen als weitere zu bestimmende Funktionen die x'^i hinzu. Wegen (4, 1) und (1, 13) erhält man dann

$$(4, 9) \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} = 0,$$

$$(4, 10) \quad \frac{\partial p_b^i}{\partial \bar{x}^e} = 0,$$

$$(4, 11) \quad \frac{\partial x'^i}{\partial \bar{x}^b} = p_a^i \bar{G}_b^a - G_s^i p_b^s,$$

$$(4, 12) \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}'^b} = p_b^i.$$

Unser gemischtes System besteht also aus den Differentialgleichungen (4, 6), (4, 7), (4, 9)–(4, 12) und den skalaren Relationen (4, 8). An Stelle der Z^a des Hilfssatzes kommen also die x^i, p_b^i, x'^i und die u^e sind durch $\bar{x}^a, \bar{x}'^a$ zu ersetzen. Wir bilden nun die den (4, 4) entsprechenden Relationen. Die Integrabilitätsbedingungen von (4, 11) geben wegen (4, 7) und (1, 15) die Gleichungen

$$(4, 13) \quad p_a^i \bar{\Omega}_{bc}^a = \Omega_{kl}^i p_b^k p_c^l.$$

Aus (4, 7) erhält man zwei verschiedene Reihen von Integrabilitätsbedingungen.

Die erste

$$\frac{\partial^2 p_b^i}{\partial \bar{x}^e \partial \bar{x}'^d} = \frac{\partial^2 p_b^i}{\partial \bar{x}'^d \partial \bar{x}^e}$$

gibt wegen (4, 7) und (4, 10) die Gleichungen

$$(4, 14) \quad p_a^i \frac{\partial \Gamma_{bc}^{*a}}{\partial \bar{x}'^d} = \frac{\partial \Gamma_{kl}^{*i}}{\partial x'^s} p_b^k p_c^l p_d^s.$$

Die zweite

$$\frac{\partial^2 p_b^i}{\partial \bar{x}^e \partial \bar{x}'^d} = \frac{\partial^2 p_b^i}{\partial \bar{x}'^d \partial \bar{x}^e}.$$

führt wegen (4, 7), (4, 14), (3, 13) unter Beachtung der schiefen Symmetrie der $\bar{\Omega}_{bc}^a$ bzw. Ω_{kl}^i zu den Relationen

$$(4, 15) \quad p_e^i \bar{T}_{bcd}^e = T_{kl}^i p_b^k p_c^l p_d^s.$$

Die übrigen Integrabilitätsbedingungen sind entweder trivialerweise erfüllt oder lassen sich auf (4, 14) und (4, 15) zurückführen. Entsprechend unserem Hilfssatz müssen noch die skalaren Relationen (4, 8) nach den $\bar{x}^a$ bzw. $\bar{x}'^a$ differenziert werden und die partiellen Differentialgleichungen des zur Diskussion stehenden Systems selbst benützt werden. Wir werden die so entstehenden Gleichungen gleich zu der zweiten $F_\mu^{(2)}$ entsprechenden Gleichungskette hinzunehmen, die sich aus (4, 14) und (4, 15) durch genau denselben Prozeß herleiten lassen.

Die Differentiation nach $\bar{x}^a$ liefert so, wenn man die Definition der kovarianten Ableitung von § 2 beachtet:

$$(4, 16) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_e^i \bar{\Omega}_{bc/d}^e = \Omega_{kl/s}^i p_b^k p_c^l p_d^s \\ p_e^i \bar{C}_{bc/d}^e = C_{kl/s}^i p_b^k p_c^l p_d^s \\ p_e^i \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}_{bc}^{*e}}{\partial \bar{x}'^d} \right)_{/f} = \left(\frac{\partial \Gamma_{kl}^{*i}}{\partial x'^s} \right)_{/m} p_b^k p_c^l p_d^s p_f^m \\ p_e^i \bar{T}_{bcd/f}^e = T_{kl/s/m}^i p_b^k p_c^l p_d^s p_f^m. \end{array} \right.$$

Die Differentiation nach $\bar{x}'^d$ gibt

$$(4, 17) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_e^i \frac{\partial \bar{\Omega}_{bc}^e}{\partial \bar{x}'^d} = \frac{\partial \Omega_{kl}^i}{\partial x'^s} p_b^k p_c^l p_d^s \\ p_e^i \frac{\partial \bar{C}_{bc}^e}{\partial \bar{x}'^d} = \frac{\partial C_{kl}^i}{\partial x'^s} p_b^k p_c^l p_d^s \\ p_e^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}'^f} \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}_{bc}^{*e}}{\partial \bar{x}'^d} \right) = \frac{\partial}{\partial x'^m} \left(\frac{\partial \Gamma_{kl}^{*i}}{\partial x'^s} \right) p_b^k p_c^l p_d^s p_f^m \\ p_e^i \frac{\partial \bar{T}_{bcd}^e}{\partial \bar{x}'^f} = \frac{\partial T_{kl/s}^i}{\partial x'^m} p_b^k p_c^l p_d^s p_f^m \end{array} \right.$$

(4, 16)—(4, 17) ist dann mit $F_\mu^{(2)} = 0$ äquivalent. Man erkennt unschwer, daß

man die m -te Gleichungskette durch $(m-2)$ -maliges kovariantes Ableiten der (4, 16) bzw. $(m-2)$ -maliges gewöhnliches Ableiten der (4, 17) nach den $\bar{x}'^a$ erhält. Die sich so ergebenden Größen, die immer Koeffizienten von Formen in den p_a^i sind, sind wegen des invarianten Charakters der Operationen stets Tensoren. Wir können hiernach das Äquivalenzproblem so formulieren:

Satz 3. *Zwei affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen sind dann und nur dann äquivalent, wenn es eine Zahl N von der Art gibt, daß die N ersten aus (4, 16) und (4, 17) durch kovariante Ableitung bzw. gewöhnliche Ableitung nach $\bar{x}'^a$ folgenden Gleichungsketten ein verträgliches Gleichungssystem für die x^i, p^i, x'^i als Funktion der $\bar{x}^a, \bar{x}'^a$ bilden und daß jede Lösung dieses Systems die $N+1$ -te Gleichungskette identisch befriedigt.*

Daraus folgt leicht der

Satz 4. *Der Hauptkrümmungstensor T_{kim}^i die beiden Torsionstensoren C_{ks}^i, Ω_{ks}^i der Tensor $\frac{\partial I_{ks}^{*i}}{\partial x'^m}$ und die daraus durch eine endliche Anzahl gewöhnlicher Ableitungen nach den x'^i bzw. kovariante Ableitungen nach den x^i hervorgehenden Tensoren bilden ein vollständiges Invariantensystem.*

Schriftenverzeichnis.

- L. BERWALD, [1] Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslerscher Räume skalarer Krümmung. *Annals of Math.* Vol. 48 (1947), No. 3, S. 755–781.
- E. CARTAN, [1] Les espaces de Finsler. *Actualités scientifiques et industrielles*, 79 (Paris, 1937).
- J. M. THOMAS — [1] Projective invariants of affine geometry of paths. *Annals of Math.* 27
O. VEULEN, (1926) No. 2, S. 279–296.
- O. VARGA, [1] Beiträge zur Theorie der Finslerschen Räume und der affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen. *Lotos* (Prag), Bd. 84 (1936), S. 1–4.
- O. VEULEN, [1] Invariants of Quadratic Differential Forms, *Cambridge Tracts*, No. 24 (1933).

(Eingegangen am 7. Januar 1949.)