Neuer vereinfachter Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós.

Von T. SZELE in Debrecen.

§ 1. Einleitung.

Bezeichne G eine endliche Abelsche Gruppe mit multiplikativer Schreibweise und mit dem Einselement 1. Kleine griechische und große lateinische Buchstaben bezeichnen Elemente bzw. Komplexe (d. h. Teilmengen mit lauter von einander *verschiedenen* Elementen) von G. Das produkt HK von zwei Komplexen $H=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $K=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ soll nur für den Fall erklärt sein, daß alle $\alpha_i \beta_k$ verschieden sind und dann soll HK aus allen $\alpha_i \beta_k$ bestehen. Das Produkt von mehreren Komplexen $H_1, H_2, \ldots, H_r$ ist durch $H_1 (H_2 \ldots H_r)$ rekursiv definiert. Einen Komplex von der Form

$$[\alpha]=[\alpha]_l=(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{l-1}) \tag{1}$$

nennen wir nach RÉDEI ein *Simplex* von der *Länge* l. Offenbar ist $[\alpha]_l$ dann und nur dann eine Gruppe, wenn die Ordnung von α genau l ist. (Übrigens folgt aus der Definition, daß die Ordnung von α in (1) $\geqq l$ sein muß.) Der im Titel erwähnte Satz[1]) lautet so:

Satz von Hajós: *Läßt sich eine endliche Abelsche Gruppe G als das Produkt von gewissen Simplexen darstellen, d. h. gilt für G eine „Simplexzerlegung“*

$$G=[\alpha_1] \ldots [\alpha_n] \qquad (n \geqq 1,\ [\alpha_i]=[\alpha_i]_{l_i}), \tag{2}$$

so ist mindestens ein Faktor $[\alpha_i]$ der rechten Seite eine Gruppe.

Die große Wichtigkeit dieses Satzes liegt einerseits darin, daß er in einer äquivalenten Form[2]) als Satz von MINKOWSKI-HAJÓS die Richtigkeit der vor einem halben Jahrhundert von MINKOWSKI ausgesprochenen berühmten Vermutung über den sogenannten „Grenzfall“ eines linearen Diophantischen Ungleichungssystems bestätigt, um deren Beweis sich vor HAJÓS viele

---

[1]) G. HAJÓS: Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter. *Math. Zs.* 47 (1942), S. 427—467, insbesondere S. 442.

[2]) Siehe[1]) S. 431 und L. RÉDEI: Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski-Hajós, *Acta Sci. Math.* (Szeged) 13 (1949), 21—35.

hervorragende Autoren bemüht haben, die aber (allgemein) zu bestätigen zuerst HAJÓS gelungen ist. Andererseits ist dem obigen gruppentheoretischen Satz von HAJÓS auch in rein gruppentheoretischer Beziehung eine außerordentlich große Bedeutung beizumessen, worauf schon RÉDEI[3]) mit Nachdruck hingewiesen hat. Den diesbezüglichen Bemerkungen von Rédei möchte ich hier hinzufügen, daß sich nach meiner Meinung im Satz von HAJÓS eine grundlegende strukturelle Eigenschaft der Abelschen Gruppen offenbart, die viel tiefer in das Wesen der Sache einschneidet, als der „Fundamentalsatz", dessen Verallgemeinerungsfähigkeit bekanntlich auf eine sehr enge Klasse der Abelschen Gruppen beschränkt ist; diesem gegenüber vermute ich, daß sich der Hajós'sche Satz auf *alle Abelschen Torsionsgruppen*[4]) übertragen läßt. Im Falle der Richtigkeit dieser Vermutung würde dann der Satz von HAJÓS ohne Zweifel zu einer der wichtigsten Struktursätze der Theorie der Abelschen Gruppen.

Neulich hat RÉDEI[3]) den schwierigen Originalbeweis des obigen Satzes von HAJÓS (für eine endliche Abelsche Gruppe G) vereinfacht und verkürzt, wodurch der Beweis leichter zugänglich wurde. Dabei bleibt aber der staunenswerte Aufbau des Hajós'schen Beweises im wesentlichen unberührt. In der Achse des Originalbeweises liegen zwei Hilfssätze (s. bei RÉDEI[3]) §§ 6,7 Hilfssatz 1 bzw. 2), die sich nur durch Zuhilfenahme der *Gruppenalgebra* $\Gamma(G)$ (s. unten) beweisen lassen. Dann entsteht der Beweis des Satzes von HAJÓS als eine leichte Folgerung dieser beiden Hilfssätze, die in diesem „zweiachsigen" Beweis eine gleich wichtige Rolle spielen.

Durch die Freundlichkeit von Herrn Professor L. RÉDEI war ich in der günstigen Lage seine Arbeit[3]) im Manuskript lesen zu können. Ich habe dann nach wiederholter Beschäftigung mit dem Beweis bemerkt, daß der zweite der genannten beiden Hilfssätze mit Hilfe einer sehr einfachen Idee (s. (7)) sich ausschalten läßt, wodurch der Beweis dem vorigen gegenüber sozusagen „einachsig" geworden ist Diese bedeutende prinzipielle Vereinfachung hat auch mit Notwendigkeit nach sich gezogen, daß man auf eine neue Beweisanordnung übergeht, die sich jetzt ganz von selbst angeboten und weitere Verkürzungen ermöglicht hat. Dabei ist auch der bisher „indirekte" Beweis des Satzes durch einen direkten ersetzt worden.

Weiter könnte ich meinen so entstandenen und im folgenden zu entwickelnden Beweis so charakterisieren, daß er sozusagen vorbereitungsfrei ist. Die wenigen Hilfsmittel nämlich, die ich zum Beweis noch brauche, werde ich immer nur dort einführen, wo sie notwendig werden. Insbesondere gilt dies auch für die Gruppenalgebra $\Gamma(G)$, die von HAJÓS und (im wesentlichen)

---

[3]) L. RÉDEI: Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós; erscheint demnächst in den *Commentarii Math. Helvetici.*

[4]) Die Abelschen Gruppen mit lauter Elementen endlicher Ordnung sind kurz Torsionsgruppen genannt.

auch von RÉDEI von Anfang an gebraucht wird, welche aber bei mir nur am Ende der Arbeit (zum Beweis des einzigen Hilfssatzes) erscheinen wird. Ich hoffe, daß die Anwendung des Ringes $\Gamma(G)$ sich auch an diesem Punkt mit der Zeit als entbehrlich erweisen wird, wodurch ein möglichst einfacher und rein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von HAJÓS entstehen würde. (Vgl.[6]).)

Ich spreche Herrn Prof. L. RÉDEI meinen liebevollen Dank auch hier aus, nicht nur für das Ermöglichen des Lesens seines obigen Manuskriptes, sondern auch für den mit ihm geführten mehrmaligen Gedankenaustausch.

In den Bezeichnungen richte ich mich an die Arbeit[3]) von Rédei.

§ 2. Beweis des Satzes von Hajós.

Ein Simplex von einer Primzahllänge nennen wir ein *Primsimplex*.

Vor allem zeigen wir, daß es genügt den Satz von HAJÓS für den Fall zu beweisen, daß in (2) alle Faktoren Primsimplexe sind.[5]) Mit wiederholter Anwendung der Identität

$$[\alpha]_{ef} = [\alpha]_e [\alpha^e]_f \qquad (e, f \geqq 2)$$

läßt sich jeder Faktor $[\alpha]_{l_i}$ auf der rechten Seite von (2) in ein Produkt von Primsimplexen zerlegen. Wenn wir wissen, daß unter den Faktoren der so aus (2) entstandenen „Primsimplexzerlegung" von G mindestens eine Gruppe vorkommt, so können wir sofort zeigen, daß auch schon unter den Faktoren in (2) eine Gruppe vorliegen muß, und zwar ist jeder solche Faktor gewiß eine Gruppe, in dessen Primsimplexzerlegung eine Gruppe als Faktor auftritt. Wir zeigen sogar: *Gilt* $[\alpha]_e = [\beta]_f K$ *und ist hier* $[\beta]_f$ *eine Gruppe, so ist auch* $[\alpha]_e$ *eine Gruppe.* Wegen der Annahme gilt nämlich $\beta[\beta]_f = [\beta]_f$, und so hat man

$$\beta[\alpha]_e = \beta[\beta]_f K = [\beta]_f K = [\alpha]_e .$$

Hieraus folgt wegen $\beta \neq 1$ eine Gleichung $\beta = \alpha^k$ $(0 < k < e)$, also

$$\alpha^e = \beta \alpha^{e-k} \in \beta[\alpha]_e = [\alpha]_e .$$

Dies ist nur mit $\alpha^e = 1$ verträglich, denn aus $\alpha^e = \alpha^i$ mit $1 \leqq i \leqq e-1$ folgte eine Gleichung $\alpha^{e-i} = 1$, die nach der Definition von $[\alpha]_e$ unmöglich ist. Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

Wir brauchen also nur den folgenden Spezialfall des Satzes von Hajós zu beweisen: *Gilt*

$$G = [\beta_1] \ldots [\beta_r] \qquad (r \geqq 1, [\beta_i] = [\beta_i]_{p_i}), \tag{3}$$

---

[5]) Den obigen Beweis für die Möglichkeit dieses Reduktionsschrittes (der übrigens schon bei HAJÓS vorkommt) entnehme ich aus folgender Arbeit, die ich ebenfalls im Manuskript lesen konnte: L. RÉDEI, Die Reduktion des gruppentheoretichen Satzes von Hajós auf den Fall von p-Gruppen. Erscheint demnächst in den *Monatsheften Math. Phys.*

wobei $p_1, \ldots, p_r$ Primzahlen sind, so ist mindestens ein Faktor auf der rechten Seite von (3) *eine Gruppe.*

Da dies für $r = 1$ richtig ist, so dürfen wir nur noch den Fall $r \geqq 2$ zu betrachten, wobei wir die Induktionsannahme machen, daß die Behauptung für die „kleineren" r richtig ist. Unser Zweck wird zu zeigen, daß man *einige* — mindestens einen, höchstens $r-1$ — *solche Faktoren auf der rechten Seite von* (3) *angeben kann, deren Produkt eine Gruppe ist,* die dann nach unserer Induktionsannahme ein Gruppen-Simplex $[\beta_i]$ enthalten muß. Damit werden wir mit dem Beweis fertig.

Ist der letzte Faktor in (3) eine Gruppe, so bildet dieser schon für sich ein gewünschtes „Teilprodukt", weshalb wir im folgenden

$$\beta_r^{p_r} \neq 1 \tag{4}$$

annehmen dürfen. Wegen $G = \beta_r G$ folgt aus (3)

$$[\beta_1] \ldots [\beta_{r-1}] (1, \beta_r, \ldots, \beta_r^{p_r-1}) = [\beta_1] \ldots [\beta_{r-1}] (\beta_r, \beta_r^2, \ldots, \beta_r^{p_r}),$$

d. h.

$$[\beta_1] \ldots [\beta_{r-1}] = [\beta_1] \ldots [\beta_{r-1}] \beta_r^{p_r}.$$

Eventuell lassen sich hier einige Faktoren $[\beta_i]$ ohne Zerstörung der Gleichheit beiderseits streichen. Nach gleichzeitiger Umnumerierung der Faktoren in (3) kommt man unter allen Umständen zu einer richtigen Gleichung

$$[\beta_1] \ldots [\beta_k] = [\beta_1] \ldots [\beta_k] \beta_r^{p_r} \qquad (1 \leqq k \leqq r-1, [\beta_i] = [\beta_i]_{p_i}), \tag{5}$$

in der sich schon kein gemeinsamer Simplexfaktor der beiden Seiten streichen läßt; ($k \geqq 1$ folgt aus (4)).Wir sagen dann mit Hajós, daß die Gleichung (5) *irreduzibel* besteht. Es wird sich zeigen, daß die linke Seite von (5) eine Gruppe ist, wodurch unser Ziel erreicht wird.

Wir bezeichnen mit $\{\varrho, \sigma, \ldots\}$ die durch die Elemente $\varrho, \sigma, \ldots$ erzeugte Untergruppe von G. Offenbar gilt

$$[\beta_1] \ldots [\beta_k] \subseteq \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}, \tag{6}$$

und so haben wir nur zu zeigen, daß hier das Gleichheitszeichen gilt.

Nach (3) sind die

$$\gamma\delta \qquad (\gamma \in [\beta_1] \ldots [\beta_k], \delta \in [\beta_{k+1}] \ldots [\beta_r])$$

alle verschiedenen Elemente von G. Man sieht, daß bei festem δ entweder alle $p_1 \ldots p_k$ Elemente $\gamma\delta$ oder keine von ihnen zur Gruppe $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ gehören, und so gilt für die Ordung $O\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ dieser Gruppe die Teilbarkeitsrelation

$$p_1 \ldots p_k \mid O\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}. \tag{7}$$

Andererseits werden wir die Richtigkeit der Ungleichung

$$g\{\beta_1, \ldots, \beta_k\} \leqq k \tag{8}$$

beweisen, wobei $g\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ die Anzahl *aller* (nicht nur der verschiedenen)

Primfaktoren von $O\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ bezeichnet. Da aus (7), (8) die Richtigkeit von (6) mit „=" folgt. so ist nach obigem der Beweis des Satzes von HAJÓS auf denjenigen dei Ungleichung (8) zurückgeführt.

Um (8) beweisen zu können ziehen wir die *Gruppenalgebra* (oder den Gruppenring) $\Gamma(G) = \Gamma$ von G bezüglich des Ringes der ganzen Zahlen heran,[6]) die bekanntlich aus allen „Summen"

$$c_1\gamma_1 + \ldots + c_t\gamma_t \qquad (\gamma_i \in G,\ c_i \text{ ganz}) \tag{9}$$

als Elementen besteht, mit denen man nach den gewöhnlichen Regeln zu rechnen hat. (Z. B. ist das Produkt von (9) und $d_1\delta_1 + \ldots + d_u\delta_u$ gleich der Summe aller $c_i d_j . \gamma_i \delta_j$) Wir sagen, daß (9) die *Normalform* hat, wenn alle γ_i untereinander und die c_i von Null verschieden sind Es ist klar, daß nach $a\gamma + b\gamma = (a + b)\gamma$ jedes Element von Γ auf die *eindeutig bestimmte* Normalform gebracht werden kann. Zwei Elemente von Γ sind dann und nur dann gleich, wenn ihre Normalformen (bis auf die Reihenfolge der Glieder) übereinstimmen. Ist (9) die Normalform eines Elementes von Γ, so nennen wir $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ die *Komponenten*, $c_1, \ldots, c_t$ die *Koordinaten* dieses Elementes. Einen Komplex von G fassen wir als die Summe seiner Elemente, also als ein Element von Γ auf, dessen Koordinaten lauter 1 sind. So schreibt sich dann (1) auch als $[\alpha]_l = 1 + \alpha + \ldots + \alpha^{l-1}$.

Nun ist (5) offenbar gleichwertig mit

$$[\beta_1] \ldots [\beta_k] (1 - \beta_r^{p_r}) = 0, \tag{10}$$

wobei auf der linken Seite nach Voraussetzung ein „irreduzibel verschwindendes Produkt" steht, indem sich hier weder der Faktor $1 - \beta_r^{p_r}$ noch ein $[\beta_i]$ (ohne Zerstörung der Gleichheit) streichen läßt.

Führen wir noch das (mehrdeutige) Simbol $\bar{\alpha}$ ein und verstehen darunter ein (in der Normalform geschriebenes) Element $[\alpha]_p$ (p Primzahl) oder $1 - \alpha$ von Γ. (Dann muß offenbar die Ordnung von $\alpha \cdot \geqq p$ bzw. $\geqq 2$ sein.) Bezeichnen wir von nun an mit $H, K, \ldots$ beliebige Elemente von Γ (in der Normalform) Gilt $H, K, \ldots \neq 0$, so bezeichne $\{H, K, \ldots\}$ die durch *sämtliche Komponenten* von $H, K, \ldots$ erzeugte Untergruppe von G und $g\{H, K, \ldots\}$ die Anzahl aller Primfaktoren der Ordnung dieser Untergruppe.[7])

Unsere restliche Behauptung (8) können wir nur so zeigen, daß wir den folgenden, viel allgemeineren Hilfssatz von Hajós beweisen:

Hilfssatz: *Gilt in* $\Gamma(G)$ *eine Gleichung*

$$K\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_m = 0 \qquad (m \geqq 1), \tag{11}$$

[6]) Dies macht die bedeutendste Schwierigkeit in unserem Beweis. Könnte man von (der „ireduziblen" Gleichung) (5) auf (8) rein gruppentheoretisch (d. h. ohne Zuhilfenahme der Gruppenalgebra $\Gamma(G)$) schließen, so wäre das mit einer weiteren bedeutenden Vereinfachung des Beweises verbunden.

[7]) Insbesondere gibt also das im folgenden oft vorkommende Symbol $g\{\alpha\}$ die Anzahl sämtlicher Primfaktoren von der Ordnung eines Elementes α von G an.

und läßt sich hier ohne Zerstörung der Gleichheit kein Faktor $\bar{\alpha}_i$ streichen, so gilt

(12) $$g\{K, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} - g\{K\} < m.$$

Nach obigem sind für (10) die Voraussetzugen des Hilfssatzes (mit $K = 1$, $m = k+1$, $\alpha_i = \beta_i$ für $i \leqq k, \alpha_m = \beta_r^{p_r}$) erfüllt, und so geht (12) für diesen Fall (wegen $g\{1\} = 0$ und $g\{\beta_1, \ldots, \beta_k\} \leqq g\{\beta_1, \ldots, \beta_k, \beta_r^{p_r}\}$) eben in (8) über. Hiernach genügt es in der Tat, wenn wir diesen Hilfssatz beweisen.

Den Beweis[8]) des Hilfssatzes fangen wir mit dem Fall $m = 1$ an. Jetzt haben wir $g\{K, \alpha_1\} = g\{K\}$ d. h. $\alpha_1 \in \{K\}$ zu zeigen. Ist zuerst $\bar{\alpha}_1 = 1 - \alpha_1$, so lautet (11) als $K\alpha_1 = K$, und so gibt es eine Gleichung $\beta\alpha_1 = \gamma$ mit geeigneten Komponenten β, γ von K, woraus in der Tat $\alpha_1 \in \{K\}$ folgt. Dann sei $\bar{\alpha}_1 = [\alpha_1]_p$. Durch Multiplikation mit $1 - \alpha_1$ ergibt sich aus $K\bar{\alpha}_1 = K[\alpha_1]_p = 0$ die Gleichung $K(1 - \alpha_1^p) = 0$, und so erhalten wir wie vorher

(13) $$\alpha_1^p \in \{K\}.$$

Andererseits läßt sich $K[\alpha_1]_p = 0$ auch als $K(\alpha_1 + \ldots + \alpha_1^{p-1}) = -K$ schreiben, und so gibt es eine Gleichung $\beta\alpha_1^i = \gamma$ $(1 \leqq i \leqq p-1)$ mit Komponenten β, γ von K. Hieraus folgt $\alpha_1^i \in \{K\}$. Dies und (13) ergeben wieder $\alpha_1 \in \{K\}$, womit der Hilfssatz für $m = 1$ bewiesen ist.

Im übrigen Teil des Beweises machen wir einen Induktionsschluß nach

(14) $$g\{\alpha_1\} + \ldots + g\{\alpha_m\}.$$

Ist (14) gleich 1, so muß $m = 1$ sein, und so ist dies ein eben erledigter Fall. Nachher sei (14) größer als 1 und es werde die Richtigkeit des Hilfssatzes für die „kleineren" Werte von (14) vorausgesetzt. Dann gilt nach (11), die wir jetzt in der Form

(15) $$(K\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_h)\,\bar{\alpha}_{h+1} \ldots \bar{\alpha}_m = 0$$

schreiben, (mit Rücksicht darauf, daß sich hier wegen der Annahme kein Faktor $\bar{\alpha}_{h+1}, \ldots, \bar{\alpha}_m$ streichen läßt):

$$g\{K\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_h, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_m\} - g\{K\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_h\} < m - h \qquad (1 \leqq h \leqq m-1).$$

Um dies für den Beweis von (12) verwerten zu können, wollen wir daraus auf

(16) $$g\{K, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} - g\{K, \alpha_1, \ldots, \alpha_h\} < m - h \qquad (1 \leqq h \leqq m-1)$$

schließen. Offenbar genügt es hierzu, wenn wir folgendes zeigen:

(17) $$g\{K, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} - g\{K, \alpha_1, \ldots, \alpha_h\} \leqq g\{K\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_h, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_m\} - g\{K\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_h\}.$$

Zum Beweis von (17) betrachten wir die folgenden Untergruppen von G: $\{K, \alpha_1, \ldots, \alpha_h\} = U$, $\{K\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_h\} = U'$, $\{\alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_m\} = A$, $U \cap A = D$, $U' \cap A = D'$. Aus $U' \subseteq U$ folgt $D' \subseteq D$ d. h.

(18) $$g\{D'\} \leqq g\{D\}.$$

---

[8]) Von hier an verfahren wir ähnlich wie RÉDEI (s.[3]) § 6.)

Nach dem *ersten Isomorphiesatz*[9]) gelten

$$UA/U \cong A/D, \quad U'A/U' \cong A/D'.$$

Wegen (18) ergibt sich daraus $g\{UA\}-g\{U\} \leqq g\{U'A\}-g\{U'\}$, was eben (17) ist. Damit haben wir (16) bewiesen.

Sind nun in (14) alle $g\{\alpha_i\} = 1$, so gilt offenbar

$$g\{K, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}\}-g\{K\} \leqq m-1.$$

Addiert man hierzu den Fall $h = m-1$ von (16), so entsteht (12).

Im restlichen Fall darf $g\{\alpha_m\} \geqq 2$ angenommen werden. Hieraus folgt, daß sich $\bar{\alpha}_m$ mit einem passenden Element aus $\Gamma(G)$ multipliziert in ein Element $1-\beta$ übergeht, wofür

$$1 \leqq g\{\beta\} = g\{\alpha_m\} - 1 \tag{19}$$

gilt. (Ist nämlich q ein Primteiler der Ordnung von α_m, so ist dieser „passende Multiplikator" im Falle $\bar{\alpha}_m = 1-\alpha_m$ das Element $[\alpha_m]_q$, im anderen Fall $\bar{\alpha}_m = [\alpha_m]_p$ das Element $(1-\alpha_m)$ oder $(1-\alpha_m)[\alpha_m^p]_q$, je nachdem p ein Teiler der Ordnung von α_m ist oder nicht.) Da (11) auch bei Ersetzung von $\bar{\alpha}_m$ durch $1-\beta$ richtig bleibt, so gewinnt man (eventuell nach Streichung einiger Faktoren und Umnumerierung der $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$) eine Gleichung

$$K\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_j (1-\beta) = 0 \qquad (0 \leqq j \leqq m-1),$$

in der sich nunmehr kein Faktor $\bar{\alpha}_i$ streichen läßt. Wegen der Annahme, daß (11) „irreduzibel" in den $\bar{\alpha}_i$ ist, läßt sich hier $(1-\beta)$ auch nicht streichen. Andererseits gehört zur letzten Gleichung wegen (19) ein „kleinerer" Wert von (14), und so folgt aus unserer Induktionsvoraussetzung:

$$g\{K, \alpha_1, \ldots, \alpha_j, \beta\}-g\{K\} \leqq j \qquad (0 \leqq j \leqq m-1). \tag{20}$$

Zuerst sei $j = 0$. Dann gilt nach (20) $g\{K,\beta\}-g\{K\} = 0$, und daraus folgt nach (19)

$$g\{K, \alpha_m\} - g\{K\} \leqq 1.$$

Dies und der Fall $h = 1$ von (16) (angewandt für α_m statt α_1, was nämlich nur eine Umnumerierung der α_i in (11) bedeutet) ergeben durch Addition (12). Dann sei $1 \leqq j \leqq m-1$. Nach Weglassen von β gilt (20) noch mehr. Wenn noch der Fall $h = j$ von (16) zur so erhaltenen Ungleichung addiert wird, so entsteht (12). Damit ist der obige Hilfssatz also auch der Satz von Hajós bewiesen.

(Eingegangen am 9. April 1949.)

[9]) Siehe z. B.: B. L. van der WAERDEN, Moderne Algebra **I.** (1937), S. 148.