

Apollonische Kurven.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Der geometrische Ort der Punkte P , deren Abstände von zwei festen Punkten A und B in einer Ebene dasselbe Verhältnis $\overline{AP} : \overline{BP} = T$ ergeben, ist ein Kreis, ein *Apollonischer Kreis* mit den Polen A und B und mit dem Parameter T . Bezeichnet $K(A, B; T)$ diesen Kreis, so stimmt er mit dem Kreis $K(B, A; T^{-1})$ überein. Ein Kreis K ist ein Apollonischer Kreis bezüglich der Pole A und B , wenn A und B Spiegelbilder am Kreis K sind.

Bezeichnet (A) bzw. (B) die Gruppe der Punkte $A_1, A_2, \dots, A_n$ bzw. $B_1, B_2, \dots, B_n$ in einer Ebene E und haben (A) und (B) keinen Punkt gemeinsam, so ist der Ort der Punkte P von E , in denen

$$(1) \quad \overline{A_1P} \cdot \overline{A_2P} \dots \overline{A_nP} : \overline{B_1P} \cdot \overline{B_2P} \dots \overline{B_nP} = T$$

ist, eine *Apollonische Kurve n -ten Grades* mit dem Parameter T . Die Punktgruppen (A) und (B) heißen *konjugierte Polgruppen* bezüglich der Kurve. Diese Kurve wird im folgenden mit $C_n(A, B; T)$ bezeichnet werden. Sie stimmt mit der Kurve $C(B, A; T^{-1})$ überein.

Bezeichnen $a_1, a_2, \dots, a_n$ bzw. $b_1, b_2, \dots, b_n$ die zu den Punkten $A_1, A_2, \dots, A_n$ bzw. $B_1, B_2, \dots, B_n$ gehörigen Zahlen der komplexen z -Ebene und sind

$$(2) \quad f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n), \quad g(z) = (z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_n),$$

so ist die Apollonische Kurve $C_n(A, B; T)$ Ort der Punkte z , in denen

$$(3) \quad |F(z)| \equiv |f(z) : g(z)| = T$$

ist. Diese Gleichung läßt sich auch in der Form

$$(4) \quad |F(z)|^2 \equiv F(z) \overline{F(z)} = T^2 \quad \text{oder} \quad f(z) \overline{f(z)} - T^2 g(z) \overline{g(z)} = 0$$

schreiben. Sind $z = x + iy$, $a_k = \alpha_k + i\alpha'_k$, $b_k = \beta_k + i\beta'_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), so hat diese Gleichung die Form

$$(5) \quad G(x, y) = \prod_{k=1}^n [(x - \alpha_k)^2 + (y - \alpha'_k)^2] - T^2 \prod_{k=1}^n [(x - \beta_k)^2 + (y - \beta'_k)^2] = 0$$

oder

$$G(x, y) = (1 - T^2)(x^2 + y^2)^n - 2 \left[x \sum_{k=1}^n (\alpha_k - T^2 \beta_k) + y \sum_{k=1}^n (\alpha'_k - T^2 \beta'_k) \right] \\ (x^2 + y^2)^{n-1} + \dots = 0$$

Eine Apollonische Kurve n -ten Grades ist also im Falle $T \neq 1$ eine n -fach zirkulare algebraische Kurve $2n$ -ter Ordnung, weil die absoluten Kreispunkte n -fache Punkte der Kurve sind. Daraus folgt der

Satz 1. Eine Apollonische Kurve n -ten Grades wird von jeder Geraden und von jedem Kreise in höchstens $2n$ reellen Punkten getroffen. Die Ordnung der Kurve ist nur im Falle $T=1$ kleiner als $2n$.

Die Apollonischen Kurven $C_n(A, B; T_1)$ und $C_n(A, B; T_2)$ mit demselben Folgruppen (A) und (B) heißen *kopolar*. Die kopolaren Apollonischen Kurven bilden ein Büschel. Eine Kurve des Büschels wird durch ihren Parameter oder durch einen ihrer Punkte bestimmt. Die Kurve durch den Punkt z_0 wird durch die Gleichung

$$|F(z)| = |F(z_0)| = T \text{ oder } |f(z)g(z_0)|^2 = |g(z)f(z_0)|^2$$

dargestellt.

Unter den kopolaren Apollonischen Kurven $C_n(A, B; T)$ sind $C_n(A, B; 0)$ und $C(A, B; \infty)$ uneigentliche Kurven, die außerhalb der Polgruppe (A) bzw. (B) keinen reellen Punkt besitzen. Ist T eine negative Zahl, so hat die Kurve $C_n(A, B; T)$ keinen reellen Punkt. Die imaginären Kurven werden in dieser Arbeit außer Acht gelassen.

Der Name der Apollonischen Kurven wird in dieser Arbeit eingeführt. Diese Kurven waren schon von G. Darboux¹⁾ untersucht worden. In dieser Arbeit werden einige meiner Untersuchungen bzgl. der allgemeinen Lemniskaten²⁾ und der gleichseitigen Hyperbel auf allgemeine Apollonische Kurven verallgemeinert. Die Lemniskaten sind nämlich Apollonische Kurven. Eine Apollonische Kurve $C_1(A, B; T)$ ist ein Kreis oder eine Gerade, je nachdem $T \neq 1$ bzw. $T=1$ ist. Eine allgemeine Kurve $C_2(A, B; 1)$ ist eine zirkulare Kurve dritter Ordnung. Fallen aber die Halbierungspunkte der Punktpaare (A) und (B) zusammen, so ist $C_2(A, B; 1)$ eine gleichseitige Hyperbel.

Besteht die Punktgruppe (A) bzw. (B) aus m bzw. n Punkten, so ist der Ort der Punkte P , in denen das Verhältnis

$$\overline{A_1P} \cdot \overline{A_2P} \dots \overline{A_mP} : \overline{B_1P} \cdot \overline{B_2P} \dots \overline{B_nP} = T$$

eine Konstante ist, eine Apollonische Kurve, deren Grad $n' = \text{Max}(m, n)$ ist. Es gibt nämlich aus je n' Punkten bestehende Punktgruppen (A') und (B') und einen (positiven) Parameter T' , so daß der obige geometrische Ort die Apollonische Kurve $C_{n'}(A', B'; T')$ ist.

¹⁾ G. DARBOUX: Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques. Paris (1873), unveränderter neuer Abdruck 1899, S. 66–70.

²⁾ Gy. SZ.-NAGY: Über die allgemeinen Lemniskaten. *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged) 11 (1948), S. 207–224.

Merkwürdige Punktgruppen bei allgemeinen Lemniskaten. Ebenda 13 (1949), S. 1–13.

Gleichseitige Hyperbel und Parallelogramme. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 1949), S. 24–28.

§ 2. Die reellen singulären Punkte der Apollonischen Kurven.

Ist der Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ ein singulärer Punkt der eigentlichen Apollonischen Kurve (5), so bestehen die Gleichungen

$G(x_0, y_0) = 0$, $G_x(x_0, y_0) = 0$ und $G_y(x_0, y_0) = 0$
gleichzeitig. Wegen der Identitäten

$$\begin{aligned} G_x(x, y) &\equiv \prod_{k=1}^n [(x - \alpha_k)^2 + (y - \alpha'_k)^2] \sum_{k=1}^n \frac{2(x - \alpha_k)}{(x - \alpha_k)^2 + (y - \alpha'_k)^2} - \\ &\quad - T^2 \prod_{k=1}^n [(x - \beta_k)^2 + (y - \beta'_k)^2] \sum_{k=1}^n \frac{2(x - \beta_k)}{(x - \beta_k)^2 + (y - \beta'_k)^2} \equiv \\ &\equiv 2|f(z)|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right) - 2T^2 |g(z)|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{g'(z)}{g(z)} \right), \\ G_y(x, y) &\equiv 2|f(z)|^2 \operatorname{Im} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right) - 2T^2 |g(z)|^2 \operatorname{Im} \left(\frac{g'(z)}{g(z)} \right) \end{aligned}$$

und wegen der Gleichung

$$T^2 = \left| \frac{f(z_0)}{g(z_0)} \right|^2 [f(z_0) \neq 0, g(z_0) \neq 0, z_0 = x_0 + iy_0]$$

bestehen also die Gleichungen

$$G_x(x_0, y_0) \equiv 2|f(z_0)|^2 \left[\operatorname{Re} \left(\frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{g'(z_0)}{g(z_0)} \right) \right] \equiv 2|f(z_0)|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{F'(z_0)}{F(z_0)} \right) = 0$$

und

$$G_y(x_0, y_0) = 2|f(z_0)|^2 \operatorname{Im} \left(\frac{F'(z_0)}{F(z_0)} \right) = 0.$$

Der Punkt z_0 ist also dann und nur ein singulärer Punkt der (eigentlichen) Apollonischen Kurve (4), wenn $|F(z_0)| = T$ und $F'(z_0) = 0$ sind.

Die endlichen Nullstellen der Derivierten $F'(z)$ sind Nullstellen des Polynoms

$$(6) \quad D(z) = f'(z)g(z) - g'(z)f(z),$$

das im allgemeinen den Grad $2n-2$ besitzt. Unter den kopolaren eigentlichen Apollonischen Kurven n -ten Grades haben höchstens $2n-2$ Kurven einen reellen singulären Punkt im Endlichen. Diese Maximalanzahl wird dann erreicht, wenn die Polynome $f(z)$, $g(z)$ und $D(z)$ lauter einfache Nullstellen besitzen.

Bezeichnet m bzw. m' die Anzahl der verschiedenen Nullstellen des Polynoms $f(z)$ bzw. $g(z)$, so hat $D(z)$ $m+m'-2$ von den Nullstellen der Polynome $f(z)$ und $g(z)$ verschiedene Nullstellen. Hat nämlich $f(z)$ die Form

$$f(z) = (z - a_1)^{p_1} (z - a_2)^{p_2} \dots (z - a_m)^{p_m} \quad (p_h \geq 1, p_1 + p_2 + \dots + p_m = n),$$

so sind $f(z)$, $f'(z)$ und $D(z)$ teilbar durch das Polynom $(n-m)$ -ten Grades

$$(z - a_1)^{p_1-1} (z - a_2)^{p_2-1} \dots (z - a_m)^{p_m-1}.$$

Die Gesamtanzahl der endlichen singulären Punkte der kopolaren Apollonischen Kurven n -ten Grades ist also höchstens $m + m' - 2$.

Sind

$|F(z_0)| = T (T \neq 0, \infty)$, $F'(z_0) = F''(z_0) = \dots = F^{(k-1)}(z_0) = 0$, $F^{(k)}(z_0) \neq 0$ und $k \geq 2$ so hat die Apollonische Kurve (4) in z_0 einen k -fachen Punkt, dessen Tangenten eine k -strahlige Windrose bilden.

Zum Beweis kann man annehmen, daß $z_0 = 0$ ist. Dann sind

$$F(z) = F(0) + \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) z^k + \frac{1}{(k+1)!} F^{(k+1)}(0) z^{k+1} + \dots \text{ und } F(0) = T e^{i\varphi}$$

Mit den Bezeichnungen

$$z = r e^{i\varphi} \text{ und } F^{(k)}(0) = k! R e^{i\psi}$$

hat die Kurve (4) in Polarkoordinaten eine Gleichung von der Form

$$F(z) \bar{F}(\bar{z}) - T^2 = 2 R T r^k \cos(k\varphi + \varphi + \psi) + \dots = 0,$$

wo die Potenzen von r in den nicht ausgeschriebenen Gliedern höher als k sind. Daraus folgt, daß der Pol des Koordinatensystems ein k -facher Punkt der Kurve ist, dessen Tangenten zur Polarachse der Gleichung $\cos(k\varphi + \varphi + \psi) = 0$ genügende Winkel φ bilden.

Es gilt also der

Satz 2. Sind die Polynome n -ten Grades $f(z)$ und $g(z)$ teilerfremd und sind $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) \neq 0$, so hat die eigentliche Apollonische Kurve n -ten Grades

$$|F(z)| \equiv \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = |F(z_0)|$$

im Punkte z_0 dann und nur dann einen singulären Punkt, wenn $F'(z_0) = 0$ ist. Dieser singuläre Punkt z_0 ist ein Doppelpunkt mit senkrechten Tangenten bzw. ein k -facher Punkt, dessen Tangenten eine k -strahlige Windrose bilden, je nachdem $F''(z_0) \neq 0$ bzw. $F'(z_0) = F''(z_0) = \dots = F^{(k-1)}(z_0) = 0$ und $F^{(k)}(z_0) \neq 0$ sind. Für die Lage der singulären Punkte der kopolaren Apollonischen Kurven $|F(z)| = T$ bezüglich ihrer Polgruppen (A) und (B) gelten die Sätze über die Lage der Nullstellen der Derivierten $F'(z)$ bezüglich der Nullstellen von $f(z)$ und $g(z)$.³⁾

§ 3. Polgruppen bei einer Apollonischen Kurve.

Die Transformation $Z = F(z)$ bestimmt eine konforme Abbildung der komplexen z -Ebene auf die Z -Ebene und ihre inverse Abbildung W . Diese W -Abbildung bildet den Kreis $|Z| = T$ auf die Apollonische Kurve (3) ab. Das W -bild eines Punktes Z ist eine Punktgruppe der z -Ebene. Sie besteht aus den Nullstellen des Polynoms n -ten Grades

³⁾ J. DIEUDONNÉ: La théorie analytique des polynômes d'une variable (à coefficients quelconques). *Mémoires des Sciences Mathématiques*, Fasc. XCIII. (1938), S. 48—53.

$$(7) \quad P(z) = f(z) - Zg(z) = (1-Z)(z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n).$$

Diese Punktgruppe wird eine *Polgruppe* der Apollonischen Kurve (4) heißen. Sie läßt sich mit dem Polynom $P(z)$ bezeichnen, sie besteht aus den Punkten der z -Ebene, in denen die rationale Funktion $F(z)$ den Wert Z annimmt. In den Punkten von (A) bzw. (B) ist $Z=0$ bzw. $Z=\infty$.

Die Polgruppe $P(z)$ ist durch Z oder durch einen ihrer Punkte bestimmt. Die Polgruppe hat dann und nur dann einen mehrfachen Punkt z_0 , wenn beide Gleichungen $P(z_0)=0$ und $P'(z_0)=0$ bestehen, wenn also z_0 eine Nullstelle des Polynoms (6) ist. Liegt der Punkt Z auf dem Kreis $Z=0$, so liegt jeder Punkt der Polgruppe auf der Apollonischen Kurve (4). Dann heißt die Polgruppe eine *Hauptgruppe* der Kurve. Jede Hauptgruppe läßt sich durch ein Polynom von der Form

$$(8) \quad Q(z) = f(z) - Te^{i\varphi}g(z)$$

darstellen.

Bezeichnet ζ_A, ζ_B , bzw. ζ den Schwerpunkt der Polgruppe (A), (B) bzw. (7), so sind

$$n\zeta_A = \sum_{k=1}^n a_k, \quad n\zeta_B = \sum_{k=1}^n b_k, \quad n\zeta = \sum_{k=1}^n z_k = \frac{\sum a_k - Z \sum b_k}{1-Z} = \frac{n(\zeta_A - Z\zeta_B)}{1-Z}.$$

Ist also $\zeta_A = \zeta_B$, so ist $\zeta = \zeta_A = \zeta_B$. Aus der Gleichung (5) der Apollonischen Kurve $C_n(A, B; 1)$ folgt, daß die Ordnung von $C_n(A, B; 1)$ im Falle $\zeta_A = \zeta_B$ höchstens $2n-2$ ist. Liegt der Punkt Z auf einem Kreis (oder auf einer Geraden) in der Z -Ebene und ist $\zeta_A \neq \zeta_B$, so liegen die Schwerpunkte der zugehörigen Polgruppen auf einem Kreis (oder einer Geraden). Dies folgt daraus, daß ζ eine lineare Funktion von Z ist.

Liegt Z auf dem Kreis $|Z|=T$, so liegt der Schwerpunkt der entsprechenden Hauptgruppe auf dem Apollonischen Kreis $C_n(\zeta_A, \zeta_B; T)$, weil

$$\frac{\zeta - \zeta_A}{\zeta - \zeta_B} = Z$$

ist. Daraus folgt der

Satz 3. Die Hauptgruppen einer Apollonischen Kurve $C_n(A, B; T)$ haben entweder einen gemeinsamen Schwerpunkt, oder ihre Schwerpunkte liegen auf der Apollonischen Kurve $C_1(\zeta_A, \zeta_B; T)$ ersten Grades, wo ζ_A bzw. ζ_B den Schwerpunkt der Polgruppe (A) bzw. (B) bezeichnet.

Eine Apollonische Kurve $C_n(A, B; T)$ hat also entweder einen Schwerpunkt, oder eine Schwerlinie, die ein Kreis ($T \neq 1$) oder eine Gerade ($T=1$) ist

Die Punkte Z_1 und Z_2 sind Spiegelbilder am Kreis $|Z|=T$, wenn $Z_1 = R_1 e^{i\varphi}$, $Z_2 = R_2 e^{i\varphi}$ und $R_1 R_2 = T^2$ ($R_1 \neq T$) sind. Dann heißen die W -Bilder der Punkte Z_1 und Z_2 *konjugierte Polgruppen* bezüglich der Apollonischen Kurve (4). Ein beliebiger Punkt z_0 bestimmt die ihn enthaltende Polgruppe und auch die konjugierte Polgruppe bezüglich der Kurve (4) eindeutig. Zwei

bezüglich der Kurve (4) konjugierte Polgruppen lassen sich durch Polynome von der Form

$$P_1(z) = f(z) - R_1 e^{i\varphi}, P_2(z) = f(z) - R_2 e^{i\varphi}, R_1 R_2 = T^2, R_1 \neq T$$

darstellen.

Die Polynome $P_1(z)$ und $P_2(z)$ haben die Form

$$P_1(z) = (1 - R_1 e^{i\varphi}) \prod_{k=1}^n (z - a'_k) = (1 - R_1 e^{i\varphi}) f_1(z), R_1 = T\varrho, \varrho \neq 1,$$

$$P_2(z) = (1 - R_2 e^{i\varphi}) \prod_{k=1}^n (z - b'_k) = (1 - R_2 e^{i\varphi}) g_1(z), R_2 = T\varrho^{-1}.$$

Die Identität

$$(9) \quad (U + \lambda V)(\bar{U} + \mu \bar{V}) - (V + \mu U)(\bar{V} + \lambda \bar{U}) \equiv (1 - \lambda\mu)(U\bar{U} - V\bar{V})$$

hat im Falle

$$U = f(z), V = -Tg(z), \lambda = \varrho e^{i\varphi}, \mu = -\varrho e^{-i\varphi}$$

die Form

$$P_1(z) \bar{P}_1(\bar{z}) - \varrho^2 P_2(z) \bar{P}_2(\bar{z}) \equiv (1 - \varrho^2) [f(z) \bar{f}(\bar{z}) - T^2 g(z) \bar{g}(\bar{z})],$$

weil dann

$$U + \lambda V = P_1(z), \bar{U} + \mu \bar{V} = \bar{P}_1(\bar{z}), V + \mu U = \varrho e^{-i\varphi} P_2(z), \bar{V} + \lambda \bar{U} = \varrho e^{i\varphi} \bar{P}_2(\bar{z})$$

sind.

In jedem Punkt z der Apollonischen Kurve (4) besteht also die Gleichung

$$P_1(z) \bar{P}_1(\bar{z}) - \varrho^2 P_2(z) \bar{P}_2(\bar{z}) \equiv |P_1(z)|^2 - \varrho^2 |P_2(z)|^2 = 0$$

oder

$$|(1 - \varrho T e^{i\varphi}) f_1(z)|^2 - \varrho^2 |(1 - T \varrho^{-1} e^{i\varphi}) g_1(z)|^2 = 0.$$

In jedem Punkt z der Kurve (4) besteht also die Gleichung

$$(10) \quad F_1(z) = \left| \frac{f_1(z)}{g_1(z)} \right| = \left| \prod_{k=1}^n \frac{z - a'_k}{z - b'_k} \right| = \left| \frac{\varrho - T e^{i\varphi}}{1 - \varrho T e^{i\varphi}} \right| = T.$$

Die Apollonische Kurve $C_n(A, B; T)$ ist also eine Apollonische Kurve auch bezüglich der konjugierten Polgruppen $P_1(z)$ und $P_2(z)$.

Die rationale Funktion

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)}{(z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_m)}$$

und ihre Reziproke sind auch dann vom n -ten Grade, wenn $m < n$ und $f(z)$, $g(z)$ teilerfremd sind. Die Kurve $|F(z)| = T$ ist auch dann eine Apollonische Kurve n -ten Grades. Ihre Polgruppe (A) bzw. (B) besteht aus den Nullstellen von $f(z)$ bzw. aus den m Nullstellen von $g(z)$ und aus dem $(n - m)$ -fach gerechneten Punkt $z = \infty$. Die Polynome (7) n -ten Grades stellen auch dann die Polgruppen dieser Kurve her. Der oben gegebene Beweis behält seine Gültigkeit auch im Falle $m \neq n$. Die Kurve $|F(z)| = T$ ist also auch im Falle

$m \neq n$ eine Apollonische Kurve bezüglich der lauter endlichen Nullstellen bestehenden Polgruppen $P_1(z)$ und $P_2(z)$.

Daraus folgt also der

Satz 4. Eine (eigentliche) Apollonische Kurve n -ten Grades

$$|F(z)| = \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = T$$

ist eine Apollonische Kurve n -ten Grades bezüglich der konjugierten Polgruppen

$P_1(z) = f(z) - T \varrho e^{i\varphi} g(z)$ und $P_2(z) = f(z) - T \varrho^{-1} e^{i\varphi} g(z)$ ($\varrho \neq 1$, $\varrho > 0$) und hat den Parameter

$$T_1 = \left| \frac{\varrho - T e^{i\varphi}}{1 - \varrho T e^{i\varphi}} \right|.$$

Dieser Satz rührt von G. DARBOUX⁴⁾ her. Der Parameter T_1 wurde aber von ihm nicht bestimmt, auch die Definition des Parameters und der konjugierten Polgruppen kommt bei ihm nicht vor.

§ 4. Orientierung der Punkte einer Apollonischen Kurve bezüglich ihrer zwei Hauptgruppen.

Besteht die ebene Punktgruppe (C) bzw. (C') aus den Punkten C_k bzw. C'_k ($k=1, 2, \dots, n$), ist ferner der Punkt P verschieden von den Punkten der Punktgruppen (C) und (C') , und bezeichnet ω_k den (mit Drehungssinn versehenen) Winkel, unter dem der Vektor $\overrightarrow{C_k C'_k}$ von P aus erscheint, so heißt der Winkel

$$\Omega \equiv \sum_{k=1}^n \omega_k \pmod{\pi} \text{ bzw. } \Omega' \equiv - \sum_{k=1}^n \omega_k \equiv \pi - \Omega \pmod{\pi}$$

die Orientierung des Punktes P bezüglich der Punktgruppen (C) und (C') bzw. (C') und (C) . Bezeichnet z, c_k bzw. c'_k die zum Punkt P, C_k bzw. C'_k gehörige komplexe Zahl und sind

$$z - c_k = r_k e^{i\gamma_k}, \quad z - c'_k = r'_k e^{i\gamma'_k}, \quad (\bar{z} - \bar{c}_k = r_k e^{-i\gamma_k}, \quad \bar{z} - \bar{c}'_k = r'_k e^{-i\gamma'_k}),$$

so sind

$$\omega_k = \gamma'_k - \gamma_k, \quad \frac{z - c'_k}{z - c_k} \frac{\bar{z} - \bar{c}_k}{\bar{z} - \bar{c}'_k} = \frac{z - c'_k}{\bar{z} - \bar{c}'_k} \frac{\bar{z} - \bar{c}_k}{z - c_k} = e^{2i\gamma_k}.$$

Sind also

$$h(z) = \prod_{k=1}^n (z - c_k) \text{ und } h_1(z) = \prod_{k=1}^n (z - c'_k),$$

so ist

$$\frac{h_1(z)}{\bar{h}_1(\bar{z})} \cdot \frac{\bar{h}(\bar{z})}{h(z)} = \prod_{k=1}^n \left[\frac{z - c'_k}{\bar{z} - \bar{c}'_k} \frac{\bar{z} - \bar{c}_k}{z - c_k} \right] = \prod_{k=1}^n e^{2i\gamma_k} = e^{2i\Omega}.$$

⁴⁾ A. a. O.

Das Polynom (8) stellt eine Hauptgruppe $H(\varphi)$ der Apollonischen Kurve (4) dar. Hier heißt φ der Winkel der Hauptgruppe.

Ist (C) bzw. (C') die Hauptgruppe der Apollonischen Kurve (4) so sind $Q(z) = f(z) - Te^{i\varphi}g(z) = (1 - Te^{i\varphi})h(z)$, $Q_1(z) = (1 - Te^{i\varphi'})h_1(z)$.

Sind in der Identität (9)

$$U = f(z), V = -Tg(z), \lambda = e^{i\varphi}, \mu = e^{-i\varphi'}, \lambda\mu \neq 1,$$

so sind

$$U + \lambda V = Q(z), \bar{U}\bar{\mu} + \bar{V} = \bar{Q}_1(\bar{z}), V + \mu U = e^{-i\varphi'}Q_1(z), \bar{V} + \bar{\lambda}\bar{U} = e^{i\varphi}\bar{Q}(\bar{z}).$$

Die Identität (9) hat also die Form

$$Q(z)\bar{Q}_1(\bar{z}) - e^{i(\varphi-\varphi')}\bar{Q}_1(z)\bar{Q}(\bar{z}) \equiv (1 - e^{i(\varphi-\varphi')})[f(z)\bar{f}(\bar{z}) - T^2g(z)\bar{g}(\bar{z})].$$

In jedem Punkte z der Apollonischen Kurve (4) besteht also die Gleichung

$$\frac{Q_1(z)}{\bar{Q}_1(\bar{z})} \frac{\bar{Q}(\bar{z})}{Q(z)} \equiv \frac{(1 - Te^{i\varphi'})(1 - Te^{-i\varphi})h_1(z) \cdot \bar{h}(\bar{z})}{(1 - Te^{i\varphi})(1 - Te^{-i\varphi'})\bar{h}_1(\bar{z}) \cdot h(z)} = e^{i(\varphi'-\varphi)}.$$

Sind $Z_0 = Te^{i\varphi}$, $Z'_0 = Te^{i\varphi'}$, $z_0 = e^{i\varphi}$, $z'_0 = e^{i\varphi'}$ und bezeichnet Ψ bzw. ψ den Winkel, unter dem der Vektor $\overrightarrow{Z_0Z'_0}$ bzw. $\overrightarrow{z_0z'_0}$ vom Punkt $z=1$ aus erscheint, so sind

$$\frac{Z'_0 - 1}{Z_0 - 1} = \frac{1 - Te^{i\varphi'}}{1 - Te^{i\varphi}} = \rho e^{i\Psi}, \frac{1 - Te^{-i\varphi}}{1 - Te^{-i\varphi'}} = \frac{1}{\rho} e^{i\Psi} \text{ und } 2\Psi = \varphi' - \varphi.$$

Die letzte Gleichung drückt den Satz über den Peripheriewinkel des Kreises aus.

Aus den obigen Gleichungen ergibt sich also die Gleichung

$$e^{2i\Psi} \rho^{2i\Omega} = e^{i(\varphi'-\varphi)} = e^{2i\psi},$$

woraus

$$2\Psi + 2\Omega = \varphi' - \varphi \equiv 2\psi \pmod{2\pi}, \text{ also } \Omega \equiv \psi - \Psi \pmod{\pi}$$

ist. Im Falle $T=1$ fällt Z_0 bzw. Z'_0 mit z_0 bzw. z'_0 zusammen. Dann ist also $\Psi = \psi$. Damit ist die folgende Verallgemeinerung des Satzes über den Peripheriewinkel in einem Kreise bewiesen:

Satz 5. Jeder Punkt einer Apollonischen Kurve besitzt bezüglich ihrer zwei festen Hauptgruppen eine konstante Orientierung.

Die Punkte der Apollonischen Kurve

$$|F(z)| = \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = \left| \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{z - b_k} \right| = T$$

besitzen bezüglich der Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$

$$f(z) - Z_0g(z) \text{ und } f(z) - Z'_0g(z), \quad Z_0 = Te^{i\varphi}, \quad Z'_0 = Te^{i\varphi'}$$

die Orientierung

$$\Omega \equiv \frac{\varphi' - \varphi}{2} - \Psi \pmod{\pi},$$

wo Ψ den Winkel bedeutet, unter dem der Vektor $\overrightarrow{Z_0Z'_0}$ vom Punkt $z=1$ aus erscheint.

Die Punkte einer Apollonischen Kurve $C_n(A, B; 1)$ haben bezüglich ihrer beliebigen zwei Hauptgruppen die Orientierung $\Omega \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Bewegt sich ein Punkt z auf der Apollonischen Kurve stetig, inzwischen ohne irgendeinen Punkt der Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$ überzutreten, so ist $\omega_k = \omega_k(z)$ eine stetige Funktion ($k=1, 2, \dots, n$). Unterdessen bleibt also

die Summe $\sum_{k=1}^n \omega_k(z)$ beständig. In den Punkten c_k und c'_k ist $\omega_k(z)$ unstetig und hat dort einen Sprung. Deshalb unterscheiden sich voneinander die Werte von $\sum_{k=1}^n \omega_k(z)$ in zwei Punkten der Apollonischen Kurve, zwischen denen es genau einen Punkt der Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$ gibt, um π .

Der erste Teil des Satzes 5 rührt im wesentlichen von G. DARBOUX⁵⁾ her. Beim Beweis von DARBOUX blieben die Koeffizienten der n -ten Potenz in $Q(z)$ und in $Q_1(z)$ außer Acht.

§ 5. Apollonische Kurven vom Parameter 1.

Bezeichnet $\zeta_A = \xi_A + i\eta_A$ bzw. $\zeta_B = \xi_B + i\eta_B$ den Schwerpunkt der Polgruppe (A) bzw. (B) der Apollonischen Kurve $C_n(A, B; 1)$, so hat ihre Gleichung (5) die Form

$$2(x^2 + y^2)^{n-1}g(x, y) + \dots = 0, \quad g(x, y) = x(\xi_B - \xi_A) + y(\eta_B - \eta_A).$$

Im Falle $\zeta_A \neq \zeta_B$ ist die Kurve vom $(2n-1)$ -ter Ordnung und hat eine zur Geraden $g(x, y) = 0$ parallele Asymptote, die zur Geraden durch die Punkte ζ_A und ζ_B , zur Schwergeraden der Kurve, senkrecht steht. Im Falle $\zeta_A = \zeta_B$ hat die Kurve einen Schwerpunkt. Ihre Ordnung ist der Grad der symmetrischen rationalen Funktion

$$H(z, \bar{z}) \equiv f(z) \cdot \bar{f}(\bar{z}) - g(z) \bar{g}(\bar{z}).$$

Sind

$$f(z) = z^n + u_1 z^{n-1} + \dots + u_n, \quad g(z) = z^n + v_1 z^{n-1} + \dots + v_n,$$

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_{p-1} = v_{p-1}, u_p \neq v_p, f_0(z) = z^n + u_1 z^{n-1} + \dots + u_{p-1} z^{n-p+1}$$

$$f_1(z) \equiv u_p z^{n-p} + u_{p+1} z^{n-p-1} + \dots + u_n, \quad g_1(z) \equiv v_p z^{n-p} + v_{p+1} z^{n-p-1} + \dots + v_n,$$

so ist

$$\begin{aligned} H(z, \bar{z}) &= [f_0(z) + f_1(z)][\bar{f}_0(\bar{z}) + \bar{f}_1(\bar{z})] - [f_0(z) + g_1(z)][\bar{f}_0(\bar{z}) + \bar{g}_1(\bar{z})] = \\ &= f_0(z)[\bar{f}_1(\bar{z}) - \bar{g}_1(\bar{z})] + \bar{f}_0(\bar{z})[f_1(z) - g_1(z)]. \end{aligned}$$

Die Funktion $H(z, \bar{z})$ hat also den Grad $n + n - p = 2n - p$, weil die Summe ihrer Glieder von höchster Dimension

$$z^n(\bar{u}_p - \bar{v}_p)\bar{z}^{n-p} + \bar{z}^n(u_p - v_p)z^{n-p} = (z\bar{z})^{n-p}[(\bar{u}_p - \bar{v}_p)z^p + (u_p - v_p)\bar{z}^p] \neq 0$$

ist.

⁵⁾ A. a. O.

Ist $p \geq 2$, so kann man annehmen, daß $u_1 = v_1 = 0$ ist, also der Schwerpunkt der Kurve im Nullpunkt liegt. Sind dann

$$u_p - v_p = Re^{i\alpha} \text{ und } z = re^{i\varphi},$$

so hat die Gleichung der Apollonischen Kurve in Polarkoordinaten die Form $H(z, \bar{z}) \equiv H(re^{i\varphi}, re^{-i\varphi}) = 2Rr^{2n-p} \cos(p\varphi + \alpha) + w_2(\varphi)r^{2n-p-2} + w_3(\varphi)r^{2n-p-3} + \dots = 0$

Diese Kurve hat p Asymptoten, die in den Schwerpunkt zusammenlaufen und zur reellen Achse der Gleichung $\cos(p\varphi + \alpha) = 0$ genügende Winkel φ bilden.

Im Falle $n=2$, $p=2$ ist die Apollonische Kurve eine gleichseitige Hyperbel, weil sie von zweiter Ordnung ist und senkrechte Asymptoten besitzt.

Im Falle $p=n$ ist die Apollonische Kurve $C_n(A, B; 1)$ eine *Stelloide* n -ten Grades⁶⁾. Diese Kurve ist der geometrische Ort der Punkte z der komplexen Ebene, in denen der reelle Teil eines Polynoms $P(z)$ n -ten Grades verschwindet. Eine Stelloide zweiten Grades ist eine gleichseitige Hyperbel.

Im Falle $p=n$ sind

$f(z) = f_0(z) + u_n$, $g(z) = f_0(z) + v_n = f(z) + v_n - u_n$, $u_n - v_n = Re^{i\alpha} (\neq 0)$ und

$$f(z)\bar{f}(\bar{z}) - g(z)\bar{g}(\bar{z}) = Re^{-i\alpha}f(z) + Re^{i\alpha}\bar{f}(\bar{z}) - R^2 = P(z) + \bar{P}(\bar{z}),$$

wo

$$P(z) = Re^{-i\alpha}f(z) - \frac{R^2}{2}$$

ist. Wir haben also bewiesen den:

Satz 6. Bezeichnet ν die Ordnung einer Apollonischen Kurve n -ten Grades vom Parameter 1, so ist $n \leq \nu = 2n-1$. Ist $\nu = 2n-1$, so hat die Kurve eine Schwergerade und eine zu dieser senkrechte Asymptote. Ist $\nu = 2n-p < 2n-1$, so hat die Apollonische Kurve einen Schwerpunkt und p Asymptoten, die in den Schwerpunkt zusammenlaufen und eine p -strahlige Windrose bilden. Eine Apollonische Kurve n -ten Grades und n -ter Ordnung ist eine Stelloide n -ten Grades.

§ 6. Topologische Eigenschaften der Apollonischen Kurven.

Es gilt der

Satz 7. Sind $T_1 < T_2 < T_3$, so trennt die Apollonische Kurve $C_n(A, B; T_2)$ die kopolaren Kurven $C_n(A, B; T_1)$ und $C_n(A, B; T_3)$. Eine (eigentliche) Apollonische Kurve trennt jedes Paar der konjugierten Polgruppen.

Bezeichnet z_1 bzw. z_3 einen beliebigen Punkt der Kurve $C_n(AB; T_1)$ bzw. $C_n(AB; T_3)$ und verbindet eine Linie L , die durch keinen Punkt von

⁶⁾ Vgl. G. LORIA: Spezielle algebraische und transzendente Kurven. Leipzig (1910), Bd. I. S. 439–450.

(B) geht, die Punkte z_1 und z_3 , so ist die Funktion $|F(z)|$ auf L stetig und nimmt mindestens in einem Punkt von L den Wert T_2 an, weil $|F(z_1)| = T_1$ und $|F(z_3)| = T_3$ sind. Damit ist der erste Teil des Satzes 7 bewiesen. Der zweite Teil folgt im Falle $T_1 = 0$ und $T_3 = \infty$ aus dem ersten.

Eine (eigentliche) Apollonische Kurve $C_n(AB; T)$ ist eine reelle algebraische Kurve, die aus gewissen Zügen besteht. Ein Zug ist ein geschlossener Teil der Kurve, der überall stetige Tangenten besitzt. Eine Apollonische Kurve bestimmt ihre Züge eindeutig, weil sie keinen Selbstberührungspunkt besitzt.

Eine eigentliche Apollonische Kurve $F(z) = T(T \mp 1)$ teilt die komplexe Ebene und auch die projektive Ebene in gewisse Bereiche $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_N$. Dies gilt auch im Falle $T = 1$, wenn die Ordnung der Kurve eine gerade Zahl ist und wenn man im Falle ungerader Ordnung die unendlichferne Gerade der projektiven Ebene der Kurve zurechnet. Jeder Bereich $\mathfrak{B}_k$ enthält mindestens einen Punkt der Polgruppe (A) oder (B).

Enthält der Bereich $\mathfrak{B}_k$ keinen Punkt von (B), so ist $F(z)$ eine analytische Funktion in $\mathfrak{B}_k$. Nach einem klassischen Theorem von CAUCHY erreicht die Funktion $|F(z)|$ ihr Maximum in keinem inneren Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}_k$. In jedem inneren Punkte von $\mathfrak{B}_k$ ist also $|F(z)| < T$, weil in jedem Randpunkt von $\mathfrak{B}_k$ $|F(z)| = T$ ist. Man kann leicht einsehen, daß das Minimum der Funktion $|F(z)|$ in $\mathfrak{B}_k$ von Null nicht abweichen kann⁷⁾. Der Bereich $\mathfrak{B}_k$ enthält also mindestens einen Punkt von (A). Enthält $\mathfrak{B}_k$ keinen Punkt von (A), so ist die Funktion $G(z) = [F(z)]^{-1}$ eine analytische Funktion in $\mathfrak{B}_k$. Der Bereich $\mathfrak{B}_k$ enthält also mindestens eine Nullstelle von $G(z)$, also mindestens einen Punkt von (B). Der Bereich $\mathfrak{B}_k$ ist zusammenhängend, er kann also nach Satz 7 aus beiden Polgruppen (A) und (B) Punkte nicht enthalten.

Die Bereiche $\mathfrak{B}_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) lassen sich also mit $\mathfrak{B}_1^{(A)}, \mathfrak{B}_2^{(A)}, \dots, \mathfrak{B}_p^{(A)}$ bzw. $\mathfrak{B}_1^{(B)}, \mathfrak{B}_2^{(B)}, \dots, \mathfrak{B}_q^{(B)}$ bezeichnen, je nachdem sie (mindestens) einen Punkt der Polgruppe (A) bzw. (B) enthalten. In jedem inneren Punkt z_0 eines Bereiches $\mathfrak{B}_h^{(A)}$ bzw. $\mathfrak{B}_k^{(B)}$ gilt die Ungleichung $|F(z_0)| = T_0 < T$ bzw. $|F(z_0)| = T_0 > T$. Die Bereiche $\mathfrak{B}_h^{(A)}$ bzw. $\mathfrak{B}_k^{(B)}$ enthalten zusammen jeden Punkt der Apollonischen Kurve $|F(z)| = T_0$, wenn $T_0 < T$ bzw. $T_0 > T$ ist.

Auf einer im Bereich $\mathfrak{B}_h^{(A)}$ liegenden beliebigen Linie, die einen Randpunkt mit einem in $\mathfrak{B}_h^{(A)}$ liegenden Punkt der Polgruppe (A) verbindet, nimmt die Funktion $|F(z)|$ zwischen 0 und T jeden positiven Wert an. Der Bereich $\mathfrak{B}_h^{(A)}$ enthält also mindestens einen Zug einer Kurve $C_n(A, B; T_1)$, ($T_1 < T$), höchstens aber m Züge, wenn die Polgruppe (A) in $\mathfrak{B}_h^{(A)}$ m verschiedene Punkte besitzt. Ähnliches gilt für die Züge der Apollonischen Kurve im Bereich $\mathfrak{B}_k^{(B)}$, wenn $T_1 > T$ ist. Die Kurve $C_n(A, B; 0)$ bzw. $C_n(A, B; \infty)$ besteht aus den Punkten der Polgruppe (A) bzw. (B). Ist T_0 eine genügend kleine bzw.

⁷⁾ Vgl. G. PÓLYA—G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätzen aus der Analysis I. Berlin (1925), S. 112, Aufgabe 142.

eine genügend große positive Zahl, so besteht die Kurve $C_n(A, B; T_0)$ aus in den Umgebungen der Punkte von (A) bzw. (B) liegenden kleinen Zügen.

Aus dem obigen folgt der

Satz 8. Bezeichnet p bzw. q die Anzahl der verschiedenen Punkte der Polgruppe (A) bzw. (B), so besteht eine Apollonische Kurve $C_n(A, B; T)$ im Falle $T < 1$ bzw. $T > 1$ aus höchstens p bzw. q Zügen. Eine Apollonische Kurve $C_n(A, B; T)$ $T \neq 1$ begrenzt in der Ebene gewisse Bereiche, die mindestens einen Punkt der Polgruppen (A) und (B) enthalten. Keiner dieser Bereiche enthält aber Punkte aus beiden Polgruppen (A) und (B).

Man kann ebenso, wie bei Lemniskaten⁸⁾ einsehen, daß auf einem Zug einer Apollonischen Kurve jede Hauptgruppe dieselbe Anzahl der Punkte hat und daß die Punkte zweier Hauptgruppe $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$ auf einem Zug einander trennen.

§ 7. Kopolare Kreissysteme einer Apollonischen Kurve.

Genügen die positiven Zahlen $t_1, t_2, \dots, t_n$ der Gleichung

$$(11) \quad t_1 t_2 \dots t_n = T \quad (T \neq 0, 1, \infty)$$

und sind $t_h < 1$ bzw. $t_h > 1$ ($h = 1, 2, \dots, n$), je nachdem $T < 1$ bzw. $T > 1$ ist, so bilden die Apollonischen Kreise K_h

$$(12) \quad \left| \frac{z - a_h}{z - b_h} \right| = t_h \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

ein kopolares Kreissystem S der Apollonischen Kurve n -ten Grades

$$(13) \quad \left| \prod_{h=1}^n \frac{z - a_h}{z - b_h} \right| = T = t_h.$$

Es gilt der

Satz 9. Bezeichnen $K_1, K_2, \dots, K_n$ die Kreise eines kopolaren Kreissystems S der Apollonischen Kurve $C_n(A, B; T)$, so liegt ein beliebiger Punkt der Kurve innerhalb mindestens eines Kreises von S und außerhalb mindestens eines, oder er ist ein gemeinsamer Punkt der Kreise $K_1, K_2, \dots, K_n$.

Die Gesamtheit (S) der Kreisscheiben eines kopolaren Kreissystems S der Apollonischen Kurve $C_n(A, B; T)$ ($T \neq 0, 1, \infty$) enthält jeden Punkt der Kurve. Haben diese Kreisscheiben einen (konvexen) Bereich gemeinsam, so enthält das Innere dieses Bereiches keinen Punkt der Kurve. Sind (S), (S₁), (S₂), ... Gesamtheiten der Kreisscheiben von verschiedenen kopolaren Kreissystemen einer Apollonischen Kurve, so enthält ihr Durchschnitt jeden Punkt der Kurve.

Hat die Kreisscheibe K_p des kopolaren Kreissystems (S) mit keiner der von ihr abweichenden übrigen Kreisscheiben des Kreissystems (S) einen Punkt gemeinsam, so enthält die Kreisscheibe K_p einen Zug der Apollonischen Kurve, vom dem der Mittelpunkt des Kreises K_p umschlossen wird.

⁸⁾ S. die zweite Arbeit in der Fußnote 2).

Genügen die positiven Zahlen $t_1, t_2, \dots, t_n$ der Gleichung (11) und den Ungleichungen

$t_p > 1, t_h < 1$ oder $t_p < 1, t_h > 1$ ($h = 1, 2, \dots, n; h \neq p$), $0 < T = t^n < \infty$, so liegt jeder außerhalb des Kreises K_p liegende Punkt der Apollonischen Kurve (13) innerhalb mindestens einer der übrigen $n-1$ Kreise K_h .

Auf Grund der Identität $C_n(A, B; T) \equiv C_n(B, A; T^{-1})$ kann man annehmen, daß im ersten Absatz des Satzes 9 $t_h < 1$ sind. Widrigenfalls verwechselt man die Polgruppen (A) und (B) miteinander.

Ein Punkt z liegt außerhalb bzw. innerhalb des Kreises K_h ($t_h < 1$), wenn

$$(14) \quad \left| \frac{z - a_h}{z - b_h} \right| > t_h \text{ bzw. } \left| \frac{z - a_h}{z - b_h} \right| < t_h$$

ist. Liegt der Punkt z_0 außerhalb bzw. innerhalb keines der n Kreise K , so sind

$$(15) \quad \left| \frac{z_0 - a_h}{z_0 - b_h} \right| \leq t_h \text{ bzw. } \left| \frac{z_0 - a_h}{z_0 - b_h} \right| \geq t_h \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

und

$$|F(z_0)| = \prod_{h=1}^n \left| \frac{z_0 - a_h}{z_0 - b_h} \right| \leq t_1 t_2 \dots t_n = t^n = T \text{ bzw. } |F(z_0)| = \prod_{h=1}^n \left| \frac{z_0 - a_h}{z_0 - b_h} \right| \geq T.$$

Der Punkt z_0 kann also nur dann auf der Apollonischen Kurve $|F(z)| = T$ liegen, wenn jede der entsprechenden Ungleichungen (15) mit Gleichheitszeichen besteht.

Damit ist der erste Absatz des Satzes 9 bewiesen. Der zweite Absatz folgt aus dem ersten ohne Weiteres.

In einem beliebigen Punkt z_p der Kreislinie K_p sind

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_p - a_p}{z_p - b_p} \right| &= t_p, \quad \left| \frac{z_p - a_h}{z_p - b_h} \right| > t_h \quad (h = 1, 2, \dots, n; h \neq p), \quad F(z_p) = \\ &= \prod_{h=1}^n \left| \frac{z_p - a_h}{z_p - b_h} \right| > t_1 t_2 \dots t_p = t^n = T. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Funktion $|F(z)|$ folgt, daß die Apollonische Kurve (13) auf jeder Strecke (a_p, z_p) mindestens einen Punkt besitzt, weil $F(a_p) = 0$ und $|F(z_p)| > T$ sind. Die Kurve (13) hat also im Kreise K_p einen Zug, vom dem der Punkt a_p der Polgruppe (A) umschlossen wird.

Damit ist auch der dritte Absatz des Satzes 9 bewiesen. Der vierte Absatz läßt sich ebenso bewiesen, wie der erste. Dieser Teilsatz vom Satz 9 gilt auch für die Apollonische Kurve $C_n(A, B; 1)$

Aus dem Satz 9 erhält man im Falle $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t \neq 1$ den

Satz 10. Enthält die Kreisscheibe $|z - \zeta| \leq r$ jeden Punkt der Polgruppen (A) und (B) der Apollonischen Kurve $C_n(A, B; T)$ ($T = t^n < 1$) und ist $T' \leq T$, so enthält die Kreisscheibe

$$|z - \zeta| \leq r_1 = r \frac{1+t}{1-t}$$

beide Apollonischen Kurven $C_n(A, B; T')$ und $C_n(B, A; T'^{-1})$.

Sind nämlich $|a-\zeta| \leq r$ und $|b-\zeta| \leq r$, so enthält die Kreisscheibe $|z-\zeta| \leq r_1$ jeden Punkt z der Kreisscheiben

$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| \leq t' \leq t \text{ und } \left| \frac{z-b}{z-a} \right| \leq t' \leq t, t^n = T, t'^n = T' \leq T < 1.$$

Ein beliebiger Punkt z dieser ersten oder zweiten Kreisscheibe genügt nämlich einer Gleichung von der Form

$$\frac{z-a}{z-b} = t_0 e^{i\varphi} \text{ oder } \frac{z-b}{z-a} = t_0 e^{i\psi}, t_0 \leq t' (\leq t < 1),$$

Daraus ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$z = \frac{a - b t_0 e^{i\varphi}}{1 - t_0 e^{i\varphi}} \text{ oder } z = \frac{b - a t_0 e^{i\psi}}{1 - t_0 e^{i\psi}} \quad t \leq t' (\leq t).$$

Man erhält aus der ersten Gleichung die Ungleichung

$$|z-\zeta| = \left| \frac{(a-\zeta) - (b-\zeta)t_0 e^{i\varphi}}{1-t_0 e^{i\varphi}} \right| \leq \frac{|a-\zeta| + |b-\zeta|t_0}{1-t_0} \leq \frac{r+rt}{1-t} \leq r \frac{1+t}{1-t}.$$

Zur derselben Ungleichung gelangt man aus der zweiten Ungleichung.

Die Kreisscheibe $|z-\zeta| = r_1$ enthält also jeden Kreis von (13) ($t_k = t$) und damit nach dem zweiten Absatz des Satzes 9 auch die Apollonischen Kurven $C_n(A, B; T')$ und $C_n(B, A; T') \equiv C_n(A, B; T'^{-1})$. Damit ist der Satz 10 bewiesen.

Satz 11. Enthält der Kreisbereich $|z-\zeta| \leq r_1$ bzw. $|z-\zeta| \geq r_2$ die Polgruppe (A) bzw. (B) der Apollonischen Kurve $C_n(A, B; T)$ und ist $T = t^n < 1$ bzw. $T = t^n < (r_1 r_2^{-1})^n$, so enthält der Kreisbereich

$$|z-\zeta| \leq \frac{r_1 + r_2 t}{1-t} = R_2 \text{ bzw. } |z-\zeta| \geq \frac{r_1 - r_2 t}{1+t} = R_1$$

die Kurve. Bestehen die Ungleichungen $r_1 < r_2$ und $t^n = T < (r_1 r_2^{-1})^n$ zugleich, so liegt die Kurve $C_n(A, B; T)$ im Kreisring $R_1 \leq |z-\zeta| \leq R_2$.

Bezeichnet nämlich a bzw. b einen beliebigen Punkt der Polgruppe (A) bzw. (B), so sind $|a-\zeta| \leq r_1$ und $|b-\zeta| \geq r_2$. Genügt z der Ungleichung

$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = t' \leq t,$$

so besteht eine Gleichung von der Form

$$\frac{z-a}{z-b} = t' e^{i\varphi}, \text{ d. h. } z = \frac{a - b t' e^{i\varphi}}{1 - t' e^{i\varphi}} \text{ oder } z - \zeta = \frac{(a-\zeta) - (b-\zeta)t' e^{i\varphi}}{1 - t' e^{i\varphi}}.$$

Daraus folgen die Ungleichungen

$$|z-\zeta| \leq \frac{r_1 + r_2 t'}{1-t'} \leq \frac{r_1 + r_2 t}{1-t} = R_2 \text{ und } |z-\zeta| \geq \frac{r_1 - r_2 t'}{1+t'} \geq \frac{r_1 - r_2 t}{1+t} = R_1.$$

Die Kreisscheibe $|z - \zeta| \leq R_2$ enthält also die Kreisscheiben

$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| \leq t_h = t \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

und diese Kreisscheiben enthalten im Falle $r_1 - r_2 t > 0$ die Kreisscheibe $|z - \zeta| \leq R_1$. Sind also $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$, so folgt der Satz 11 aus dem Satz 9.

Ist im Satz 11 $r_1 < r_2$, so hat keine Apollonische Kurve $C_n(A, B; T)$ im Kreisring $r_1 \leq |z - \zeta| \leq r_2$ einen singulären Punkt, weil das Polynom (6) nach einem Satz von BÖCHER⁹⁾ in diesem Kreisring keine Nullstelle besitzt.

§ 8. Punkte einer Apollonischen Kurve $C_n(A, B; T)$ in einem Parallelstreifen, von dem die Polgruppen (A) und (B) getrennt werden.

Eine *Breite* eines Parallelstreifens PS bedeutet eine zu den Randgeraden von PS senkrechte beliebige Strecke, deren Endpunkte auf der Randgeraden liegen. Mit dieser Definition gilt der

Satz 12. *Trennt ein Parallelstreifen PS das Polgruppenpaar (A) und (B) (oder irgendeines konjugiertes Polgruppenpaar) einer Apollonischen Kurve $C_n(A, B; T)$, so hat die Kurve und jede kopolare Kurve mit einer beliebigen Breite von PS höchstens einen Treffpunkt. Die Kurve hat also im Parallelstreifen keinen singulären Punkt und sie wird von keiner Breite des Parallelstreifens berührt.*

Wir bezeichnen mit g_1 und g_2 die Randgeraden von PS , so daß die Punkte der Polgruppe (A) zu g_1 näher liegen als zu g_2 . Hätte nun eine Breite von PS mindestens zwei (verschiedene) Treffpunkte P_1 und P_2 mit der Kurve $C_n(A, B; T)$, und wäre P_1 zu g_1 näher gelegen als zu g_2 , so beständen offenbar die Ungleichungen

$$\overline{P_1 A_h} < \overline{P_2 A_h}, \quad \overline{P_1 B_h} > \overline{P_2 B_h} \quad (h=1, 2, \dots, n) \quad \text{und} \quad \prod_{h=1}^n \frac{\overline{P_1 A_h}}{\overline{P_1 B_h}} < \prod_{h=1}^n \frac{\overline{P_2 A_h}}{\overline{P_2 B_h}}.$$

Die Punkte P_1 und P_2 können also nach (1) nicht auf derselben Apollonischen Kurve $C_n(A, B; T)$ liegen. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes 12.

§ 9. Tangenten und Normalen einer Apollonischen Kurve.

Man kann annehmen, daß die Apollonische Kurve (5) im Nullpunkt ($x=0, y=0$) von der x -Achse berührt wird, weil diese Lage der Kurve durch eine Koordinatentransformation immer erreicht werden kann. In dieser Lage der Kurve sind

⁹⁾ S. bei DIEUDONNÉ a. a. O. S. 49.

$$G(0, 0) = \prod_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \alpha_k'^2) - T^2 \prod_{k=1}^n (\beta_k^2 + \beta_k'^2) = 0$$

und

$$G_x(0, 0) = 2|f(0)|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{F'(0)}{F(0)} \right) = 2|f(0)|^2 \left[\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + \alpha_k'^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\beta_k^2 + \beta_k'^2} \right] = 0.$$

Ist der Nullpunkt ein gewöhnlicher bzw. singulärer Punkt der Kurve, so ist

$$G_y(0, 0) = 2|f(0)|^2 \operatorname{Im} \left(\frac{F'(0)}{F(0)} \right) = 2|f(0)|^2 \left[\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k'}{\alpha_k^2 + \alpha_k'^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k'}{\beta_k^2 + \beta_k'^2} \right] \neq 0$$

bzw. $G_y(0, 0) = 0$. Bezeichnet $c_k = \gamma_k + i\gamma_k'$ bzw. $d_k = \delta_k + i\delta_k'$ das Spiegelbild des Punktes a_k bzw. b_k am Einheitskreis $|z| = 1$, so sind

$$\gamma_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + \alpha_k'^2}, \quad \gamma_k' = -\frac{\alpha_k'}{\alpha_k^2 + \alpha_k'^2}, \quad \delta_k = \frac{\beta_k}{\beta_k^2 + \beta_k'^2}, \quad \delta_k' = -\frac{\beta_k'}{\beta_k^2 + \beta_k'^2}.$$

Ist also der Nullpunkt ein gewöhnlicher bzw. singulärer Punkt der Apollonischen Kurve (5), so sind

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k - \sum_{k=1}^n \delta_k = 0 \text{ und } \sum_{k=1}^n \gamma_k' - \sum_{k=1}^n \delta_k' \neq 0 \text{ bzw. } \sum_{k=1}^n \gamma_k' - \sum_{k=1}^n \delta_k' = 0.$$

Aus der Gleichung $\sum_{k=1}^n \gamma_k = \sum_{k=1}^n \delta_k$ folgt, daß die y -Achse, also die Normale der Kurve im Nullpunkt zur Verbindungsgeraden der Schwerpunkte der Punktgruppen c_k und d_k ($k = 1, 2, \dots, n$) parallel ist. Diese Schwerpunkte können nur dann zusammenfallen, wenn der Nullpunkt ein singulärer Punkt der Kurve ist. Daraus folgt die folgende einfache Konstruktion der Normalen und damit auch der Tangente in einem gewöhnlichen Punkte der Apollonischen Kurve:

Satz 13. Ist P ein gewöhnlicher Punkt der Apollonischen Kurve $C_n(A, B; T)$ und bezeichnet S'_A bzw. S'_B den Schwerpunkt der Spiegelpunktgruppe der Polgruppe (A) bzw. (B) an einem Kreis vom Mittelpunkt P , so ist die zu P gehörige Normale der Kurve parallel zur Verbindungsgeraden der Punkte S'_A und S'_B . Diese Schwerpunkte fallen dann zusammen, wenn P ein singulärer Punkt der Kurve ist.

Auf Grund dieses Satzes kann man den folgenden Satz leicht einsehen:

Satz 14. Trennt eine Gerade durch einen Punkt P der Apollonischen Kurve $C_n(A, B; T)$ die Polgruppen (A) und (B) voneinander, so trifft die zu P gehörige Normale bzw. Tangente der Kurve beide bzw. keine der konvexen Hüllen der Punktgruppen (A) und (B).

(Eingegangen am 15. Juni 1949.)