

Über das Krümmungsmaß in Finslerschen Räumen.¹⁾

Von O. VARGA in Debrecen.

Für einen Finslerschen Raum hat L. BERWALD eine zu einem Bivektor gehörige skalare Krümmung B definiert, die die natürliche Verallgemeinerung des entsprechend definierten Riemannschen Krümmungsmaßes bildet.²⁾ Wir wollen diesen Skalar in der Folge als Berwaldsche Krümmung bezeichnen. Der Bivektor ist dabei in einem Linienelement (x, v) durch die Richtung v^* und den von ihm linear unabhängigen Vektor η^* definiert. Es ist also

$$B = B(x, v, \eta).$$

In einer zweidimensionalen Finslerschen Mannigfaltigkeit (y^1, y^2) hat P. FINSLER eine Invariante $S(y, w)$ definiert,³⁾ die er als innere Krümmung bezeichnet. Mit Hilfe des oben erwähnten Bivektors können wir nun eine im Punkte x^* geodätische Fläche dadurch bestimmen, daß wir sämtliche Extremalen konstruieren, die in x^* eine zum Bivektor gehörige Richtung berühren. Die so konstruierte zweidimensionale Mannigfaltigkeit besitzt natürlich ebenfalls eine Finslersche Maßbestimmung. Ist w diejenige Richtung der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, der v im n -dimensionalen Raum entspricht, so soll nachgewiesen werden, daß

$$B(x, v, \eta) = S(y, w)$$

gilt. Dies ist das genaue Analogon des bekannten Zusammenhanges zwischen dem Gaußschen und Riemannschen Krümmungsmaß.

§. 1. Die oskulierende Riemannsche Maßbestimmung.

Durch

$$(1) \quad x^* = x^*(t)$$

sei im Finslerschen Raum eine auf die Bogenlänge als Parameter bezogene Kurve gegeben. Wir betten dieselbe in eine Kurvenkongruenz

$$(2) \quad x^* = g^*(t^1, t^2, \dots, t^n), \quad g^*(t, 0, \dots, 0) \equiv x^*(t), \quad t = t^1,$$

ein. Der Parameter auf den einzelnen Kongruenzkurven ist dabei t^1 . In dem

¹⁾ Vorgetragen an dem in Prag abgehaltenen gemeinsamen 3. Kongreß der tschechoslovakischen und 7. Kongreß der polnischen Mathematiker, 28. August—3. September 1949.

²⁾ L. BERWALD [1], (siehe Schriftenverzeichnis am Ende der Arbeit), insbesondere Nr. 25.

³⁾ P. FINSLER [1], insbesondere S. 104—106.

durch die Kongruenz (2) bedeckten Bereich T ist jedem Punkt durch $\partial_1 x^*$ ein Ortsvektor zugeordnet. Längs (1) sind diese Vektoren Einheitsvektoren. Da (2) eine Kurvenkongruenz darstellt, lassen sich diese Gleichungen nach den t^* auflösen. Dadurch wird das Vektorfeld in T eine Ortsfunktion, die durch

$$(3) \quad r^* = r^*(x^1, \dots, x^n)$$

dargestellt werde. Die längs der Kurvenschar (2) oskulierende Riemannsche Maßbestimmung ist dann durch

$$(4) \quad \bar{g}_{\alpha\beta}(x) \equiv g_{\alpha\beta}(x, r(x))$$

definiert.⁴⁾ Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen den zu den $\bar{g}_{\alpha\beta}$ gehörigen Christoffelschen Symbolen erster Art und den Übertragungsparametern $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^*$ des Finslerschen Raumes herleiten. Wird wie üblich

$$(5) \quad C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v^\gamma} g_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 (L^2)}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\gamma}$$

gesetzt, so folgt, da L für einen Finslerschen Raum in den v^* positiv homogen von erster Dimension ist,⁵⁾

$$(6) \quad C_{\alpha\beta\gamma} v^\alpha = C_{\alpha\beta\gamma} v^\beta = C_{\alpha\beta\gamma} v^\gamma = 0.$$

Wegen der Definition⁶⁾ der $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^*$ und derjenigen der Christoffelschen Symbole erster Art erhält man bei Beachtung von (5) und (6) zunächst

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(x) r^\gamma \equiv \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^*(x, r) r^\gamma + C_{\alpha\beta\gamma} (r^\gamma \partial_\gamma r^* + r^\gamma \frac{\partial}{\partial v^\gamma} G^*).$$

Nun sind aber die Funktionen G^* in den v^* von 2-ter Ordnung positiv homogen,⁷⁾ so daß die letzteren Gleichungen auch in der Form

$$(7) \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(x) r^\gamma \equiv \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^*(x, r) r^\gamma + C_{\alpha\beta\gamma} A^*$$

dargestellt werden können, wobei wir

$$(8) \quad A^* = r^\gamma \partial_\gamma r^* + 2 G^*$$

gesetzt haben. Überschieben wir Gleichungen (7) nochmals mit r^α , so ergibt sich wegen (6) und drei bekannten Relationen der Finslerschen Geometrie:⁸⁾

$$(9) \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(x) r^\alpha r^\gamma \equiv \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^*(x, r) r^\alpha r^\gamma \equiv 2 G_\beta(x, r) \equiv 2 G^\lambda g_{\lambda\beta}.$$

Aus (9) folgt zunächst, daß sich eine Extremale des oskulierenden Riemannschen Raumes und eine solche des Finslerschen Raumes, die $x^*(t_0)$, $r^*(t_0)$ zum gemeinsamen Linienelement besitzen, in 2-ter Ordnung berühren.⁹⁾ Eine Extremale des Finslerschen Raumes genügt den Differentialgleichungen 2-ter

⁴⁾ A. NAZIM [1], S. 17–20.

⁵⁾ E. CARTAN [1], S. 11.

⁶⁾ E. CARTAN [1], S. 16, Formel (XII).

⁷⁾ E. CARTAN [1], S. 16–17.

⁸⁾ E. CARTAN [1], S. 16, Formeln (X)–(XII).

⁹⁾ A. NAZIM [1], S. 20.

Ordnung¹⁰⁾

$$x''^* = -2 G^*(x, x').$$

Dabei wurde die Ableitung nach der Bogenlänge mit einem Strich bezeichnet. Eine Extremale des oskulierenden Riemannschen Raumes V_n genügt bekanntlich den Differentialgleichung

$$\tilde{x}''^* = -\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^* \tilde{x}'^\alpha \tilde{x}'^\beta.$$

Wegen (9) und dem gemeinsamen Linienelement folgt hieraus in

$$x''^*(t_0) = \tilde{x}''^*(t_0)$$

unsere Behauptung.

Wir setzen nun voraus, daß die Kurve (1) eine Extremale $\mathcal{C}_1$ ist. Für das Feld der Einheitsvektoren r^* von $\mathcal{C}_1$ gilt dann

$$(10) \quad \frac{dr^*}{dt} \equiv r^\gamma \partial_\gamma r^* = -2 G^*(x, r),$$

oder wegen (8)

$$(10) \quad A^* = 0.$$

Da die r^* längs $\mathcal{C}_1$ auch im oskulierenden Raum V_n Einheitsvektoren sind, so folgt wegen (9), daß

$$\frac{dr^*}{dt} = -\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^* r^\alpha r^\beta$$

besteht, und somit $\mathcal{C}_1$ auch im V_n eine Extremale ist. Wir können nun eine $\mathcal{C}_1$ enthaltende Kurvenkongruenz bestimmen, so daß für das Richtungsfeld (3) längs $\mathcal{C}_1$ nicht nur (10), sondern sogar

$$(11) \quad \partial_\gamma r^* = -G_\gamma^*(x, r) \text{ mit } G_\gamma^* = \frac{\partial}{\partial v^\gamma} G^*$$

gilt. Aus (11) folgen natürlich wegen der Homogenitätsvoraussetzungen über G^* die Relationen (10). Daß eine derartige Wahl des Richtungsfeldes möglich ist, kann genau so bewiesen werden, wie für eine entsprechende Frage in der Riemannschen Geometrie.¹¹⁾ Aus (11) folgt nun wegen der expliziten Gestalt der $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^*$ einerseits und der Form der Christoffelschen Symbole andererseits bei Beachtung von (5), daß längs $\mathcal{C}_1$ die Identitäten

$$(12) \quad \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^*(x) \equiv \Gamma_{\beta\gamma}^{*\alpha}(x, r)$$

gelten.

¹⁰⁾ Die Differentialgleichungen der Extremalen in dieser Form bei E. CARTAN [1], S. 17.

¹¹⁾ O. VARGA [1]. Man hat in den dort auftretenden Differentialgleichungen statt

$$I_{\lambda\mu}^*(x(t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)) \frac{dx^\mu(t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)}{dt_k}$$

bloß

$$G_\lambda^*(g(t^1, \dots, t^k, 0, \dots, 0)) \frac{dg^\lambda(t^1, \dots, t^k, 0, \dots,)}{dt^k}$$

zu setzen.

§. 2. Beziehungen zwischen den Krümmungsaffinoren des oskulierenden Riemannschen und Finslerschen Raumes.

Wir zeigen nun, daß zwischen dem Krümmungsaffinor $\bar{R}_{\alpha\beta\delta\gamma}$ des oskulierenden V_n und dem durch

$$(13) \quad R_{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}^{\delta} = 2 \partial_{[\alpha} \Gamma_{\beta]\gamma}^{\delta} - 2 G_{[\alpha}^{\delta} \frac{\partial}{\partial v^{|\epsilon|}} \Gamma_{\beta]\gamma}^{\delta} + 2 C_{\dot{\epsilon}\dot{\gamma}}^{\delta} (\partial_{[\alpha} G_{\beta]}^{\epsilon} + G_{[\alpha|\tau]}^{\epsilon} G_{\beta]}^{\tau} + \\ + 2 \Gamma_{[\beta|\gamma]}^{\epsilon} \Gamma_{\alpha]}^{\delta\epsilon} \quad (\text{mit } G_{\alpha\beta}^{\epsilon} = \frac{\partial}{\partial v^{\beta}} G_{\alpha}^{\epsilon})$$

definierten Krümmungsaffinor des Finslerschen Raumes¹²⁾ längs $\mathcal{C}_1$, die Identitäten

$$(14) \quad \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} r^{\beta} r^{\gamma} \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta} r^{\beta} r^{\gamma}$$

bestehen.

Beweis. Aus den Relationen (7), die Identitäten in den x^* sind, folgt durch Ableitung nach x^{τ} :

$$(15) \quad \partial_{\tau} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(x) \cdot r^{\gamma} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(x) \cdot \partial_{\tau} r^{\gamma} = \partial_{\tau} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x, r) r^{\gamma} + \frac{\partial}{\partial v^{\sigma}} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} \partial_{\tau} r^{\sigma} \cdot r^{\gamma} + \\ + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} \partial_{\tau} r^{\gamma} + \partial_{\tau} C_{\alpha\beta\kappa} \cdot A^{\kappa} + C_{\alpha\beta\kappa} \cdot \partial_{\tau} A^{\kappa}.$$

Längs einer Kongruenzkurve gilt nun

$$(16) \quad r^{\tau} \partial_{\tau} A^{\kappa} = \frac{d}{dt} A^{\kappa},$$

was insbesondere längs $\mathcal{C}_1$ wegen (10') Null ist. Auf Grund dieser Bemerkung folgt aus (15) bei Beachtung von (6) und (12), daß längs $\mathcal{C}_1$

$$(17) \quad \partial_{\tau} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} r^{\gamma} r^{\tau} = \partial_{\tau} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} r^{\gamma} r^{\tau} - \frac{\partial}{\partial v^{\sigma}} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} G_{\tau}^{\sigma} r^{\tau} r^{\gamma}$$

gilt. Berücksichtigen wir die Beziehungen (6), so ergibt sich unter erneuerter Beachtung von (15):

$$(18) \quad \partial_{\tau} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} \cdot r^{\alpha} r^{\gamma} = \partial_{\tau} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} \cdot r^{\alpha} r^{\gamma} - \frac{\partial}{\partial v^{\sigma}} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} \cdot G_{\tau}^{\sigma} r^{\alpha} r^{\gamma}.$$

Aus der Definition des Riemannschen Krümmungsaffinors und des durch (13) angegebenen Krümmungsaffinors des Finslerschen Raumes folgt nun wegen (12), (15), (17) und (18) die unter (14) behauptete Beziehung längs $\mathcal{C}_1$.

¹²⁾ E. CARTAN [1], S. 36, Formel (XIX'). Wir haben die dort auftretende Bezeichnung $R_{\gamma\cdot\beta\alpha}^{\delta}$ des Krümmungsaffinors zu $R_{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}^{\delta}$ abgeändert.

§. 3. Geodätische Abweichung und Beziehung zwischen der inneren Finslerschen und skalaren Berwaldschen Krümmung im Finslerschen Raum.

Aus (14) können wir nun wichtige Folgerungen ziehen. Wir betrachten in dem längs $\mathcal{C}_1$ oskulierenden V_n noch eine zu $\mathcal{C}_1$ benachbarte Extremale $\mathcal{C}_2$. Jedem Punkte x^* von $\mathcal{C}_1$ ordnen wir auf $\mathcal{C}_2$ denjenigen Punkt $x^* + \xi^*$ zu, der auf dem Endpunkt des in x^* zu $\mathcal{C}_1$ orthogonalen Vektor ξ^* liegt. Für die geodätische Abweichung gilt dann¹³⁾

$$(19) \quad \frac{d^2 \xi^\delta}{dt^2} = - \bar{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta r^\beta r^\gamma \xi^\alpha$$

Nun ist aber die Finslersche Maßbestimmung längs $\mathcal{C}_1$ identisch mit der des V_n . Der zu $\mathcal{C}_1$ in x^* orthogonale Vektor ist daher auch im Finslerschen Raume zu $\mathcal{C}_1$ orthogonal. Aus (14) folgt andererseits, daß längs $\mathcal{C}_1$

$$(20) \quad \frac{d^2 \xi^\delta}{dt^2} = - R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta r^\beta r^\gamma \xi^\alpha$$

gilt. Die durch $x^* + \xi^*$ definierte Extremale $\mathcal{C}_1$ des V_n ist aber dann auch Extremale im Finslerschen Raume, da (20) genau die Gleichungen der geodätischen Abweichung zweier benachbarten Extremalen im Finslerschen Raum sind.¹⁴⁾

Setzen wir nun insbesondere voraus, daß unsere Mannigfaltigkeit zweidimensional ist, dann reduzieren sich sowohl (19) als (20) auf die klassische Jacobische Gleichung

$$(21) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + Ky = 0,$$

in der t , wie oben, die Bogenlänge und y den Normalabstand der beiden Extremalen bedeutet. Im V_2 ist K bekanntlich das Gaußsche Krümmungsmaß der Mannigfaltigkeit, während für eine Finslersche Mannigfaltigkeit

$$(22) \quad K(x^1, x^2) \equiv S(x^1, x^2, r^1(x^1, x^2), r^2(x^1, x^2))$$

genau mit der von P. FINSLER definierten inneren Krümmung des Linienelementes übereinstimmt. Daraus folgt:

*Das innere Krümmungsmaß einer zweidimensionalen Finslerschen Mannigfaltigkeit ist längs einer Extremalen $\mathcal{C}$ identisch mit dem Gaußschen Krümmungsmaß der längs $\mathcal{C}$ oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung.*¹⁵⁾

Wird im n -dimensionalen Finslerschen Raum längs $\mathcal{C}_1$ in stetiger Weise ein Vektorfeld η^* erklärt — dessen Vektoren nirgends mit den Tangentenvektoren von $\mathcal{C}_1$ zusammenfallen —, so ist durch v^* , η^* längs $\mathcal{C}_1$ ein stetiges Feld von Bivektoren bestimmt. Für einen beliebigen dieser Bivektoren ist das Berwaldsche Krümmungsmaß durch

¹³⁾ J. A. SCHOUTEN und D. J. STRUIK [1], S. 171, Formel (16.55).

¹⁴⁾ E. CARTAN [1], S. 39–40 und Formeln (47), (XXV).

¹⁵⁾ L. BERWALD [2], S. 40.

$$(23) \quad B = - \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta^\alpha r^\beta \eta^\gamma r^\delta}{g_{[\alpha\gamma]g_{\delta\beta]} \eta^\alpha r^\beta \eta^\gamma r^\delta}.$$

erklärt.²⁾ Wegen (4), (14) und der bekannten Definition des Riemannschen Krümmungsmaßes R für einen Bivektor folgt daher für das Bivektorfeld längs $\mathcal{C}_1$

$$(24) \quad B = R.$$

Wird nun im V_n für den Bivektor eines Punktes x_0^* von $\mathcal{C}_1$ die in x_0^* geodätische Fläche Φ_0 , die natürlich $\mathcal{C}_1$ enthält, konstruiert, so ist bekanntlich das Gaußsche Krümmungsmaß K_0 von Φ_0 in x_0^* gleich dem Riemannschen Krümmungsmaß, das zu dem Bivektor dieses Punktes gehört, d. h. in x_0^* gilt

$$(25) \quad R_0 = K_0.$$

Wegen (24) ist also auch

$$(26) \quad B_0 = K_0.$$

Wenn nun das Richtungsfeld r^* die Fläche Φ_0 berührt, dann ist die von V_n auf Φ_0 induzierte Riemannsche Maßbestimmung identisch mit der, die Finslersche Maßbestimmung von Φ_0 längs $\mathcal{C}_1$ oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung. Ist daher eine solche Wahl des Richtungsfeldes möglich, dann wird wegen (22)

$$(27) \quad B_0 = S_0.$$

Wir zeigen nun, daß eine solche Wahl für r^* getroffen werden kann, daß die Fläche Φ_0 auch für den Finslerschen Raum geodätisch in x_0^* wird.

Dazu betrachten wir sämtliche von x_0^* ausgehende Extremalen des Finslerschen Raumes. In einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0^* ist das Feld

$$r^* = r^*(x^1, \dots, x^n)$$

ihrer Tangentenvektoren ein solches der gewünschten Art. Die zu diesem Feld gehörige oskulierende Riemannsche Maßbestimmung V_n , die durch (4) bestimmt ist, ist im Punkte x_0^* singulär. Die in x_0^* geodätische Fläche Φ_0 des Finslerschen

Raumes ist wegen der anschließend zu (9) angestellten Betrachtungen im V_n auch im singulären Punkte geodätisch. Auf Φ_0 fällt natürlich die induzierte und die längs $\mathcal{C}_1$ oskulierende Maßbestimmung zusammen. Durch den Grenzübergang $x^* \rightarrow x_0^*$ längs $\mathcal{C}_1$ kann (24) und (22) auch für x_0^* als richtig erkannt werden. Das Bestehen von (25) und (26) in x_0^* folgt so: Man betrachte einen

von x_0^* verschiedenen Punkt x^* auf $\mathcal{C}_1$ und konstruiere die zu dem Bivektor dieses Punktes gehörige und in demselben geodätische Fläche Φ des V_n . Beim Grenzübergang $x^* \rightarrow x_0^*$ längs $\mathcal{C}_1$ wird nun gleichzeitig $\Phi \rightarrow \Phi_0$. Daraus folgt, daß (25) und (26) richtig ist. Dann gilt aber (27), w. z. b. w.

Schriftenverzeichnis.

- L. BERWALD: [1] Untersuchungen der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. *Math. Z.* **25** (1926), 40–73.
[2] Über Finslersche und Cartansche Geometrie I. Geometrische Erklärungen der Krümmung und des Hauptskalars eines zweidimensionalen Finslerschen Raumes. *Mathematica (Cluj)* **17** (1941), 34–58.
- E. CARTAN: [1] Les espaces de Finsler. *Actualités scientifiques et industrielles*, **79** (1934), Paris.
- P. FINSLER: [1] Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. *Diss. Göttingen* (1918).
- A. NAZIM: [1] Über Finslersche Räume. *Diss. München* (1936).
- J. A. SCHOUTEN-D. J. STRUIK: [1] Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. II. (1938), Groningen.
- O. VARGA: [1] Vektorfelder, deren kovariante Ableitung längs einer vorgegebenen Kurve verschwindet. *Hung. Acta Math.* **1**, No. 4 (1949), 1–3.

(Eingegangen am 1. Dezember 1949.)