

Sur les séries de Taylor $F(x, y)$ ayant des coefficients entiers.

Par P. LELONG à Lille.

§ 1. Position du problème.

Je rappellerai d'abord un résultat relatif aux séries de Taylor d'une variable :

$$(1) \quad F(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

dont on suppose les coefficients a_n entiers. Cet énoncé donné par PÓLYA¹⁾ à la suite de travaux de E. BOREL dans le même sens peut s'énoncer de la manière suivante. Soit $E(D)$ la classe des fonctions analytiques et uniformes dans un domaine D et possédant à l'origine O supposée point intérieur de D un développement (1) à coefficients entiers : pour que $E(D)$ ne contienne que des fractions rationnelles, il suffit que la transformation $z' = z^{-1}$ change le complémentaire de D en un ensemble σ (nécessairement fermé et borné) de diamètre transfini $c(\sigma)$ inférieur à 1.

En d'autres termes : la condition $c(\sigma) < 1$, jointe au fait que les fonctionnelles

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n F}{\partial z^n} \right)_{z=0}$$

ont des valeurs entières entraîne que $F(z)$ analytique et uniforme dans D se réduise à une fraction rationnelle.

Je me propose de rechercher ici s'il existe une propriété analogue pour les fonctions $F(x, y)$ analytiques de deux variables complexes. Pour préciser, j'appellerai encore $E(D)$ la classe des fonctions $F(x, y)$ analytiques et uniformes dans un domaine D qui contient le point $O[x=y=0]$ comme point intérieur, et je supposerai que les fonctionnelles

$$(3) \quad a_{pq} = \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} \left(\frac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p \partial y^q} \right)_O$$

"coefficients de Taylor" ont des valeurs entières en O . J'énoncerai alors :

¹⁾ G. PÓLYA, Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe. *Math. Annalen*, **99** (1928), 687—706.

Problème A : Donner des conditions suffisantes portant sur le domaine D qui contient O comme point intérieur, pour que la classe $E(D)$ ne contienne que des fractions rationnelles.

Une solution partielle sera donnée ici au problème A : elle concerne surtout les domaines D obtenus en associant à une valeur $y \in d_1$ un domaine $x \in d_2(y)$. Il est toutefois vraisemblable que la forme du résultat obtenu est générale : il fait intervenir l'existence d'un cycle ou d'un ensemble de cycles W à deux dimensions réelles dans D et le comportement sur W d'une suite (S) de polynômes que nous allons définir.

Un monome $x^{t_1}y^{t_2} = (x)^t$ est caractérisé par un point $t = [t_1, t_2]$ du réseau (N) formé par les points du plan à coordonnées entières positives. Pour ordonner les monomes, on dira que l'exposant q de (N) est avant t et l'on écrira $q \prec t$ si l'on a $q_1 + q_2 \leq t_1 + t_2$ et, soit $q_1 + q_2 < t_1 + t_2$, soit $q_1 < t_1$. On ordonne ainsi (N) suivant les diagonales descendantes. Le degré $n(q) = q_1 + q_2$ est fonction non décroissante de l'ordre.

L'addition des exposants correspond à la multiplication des monomes. On définit

$$p + q = t \quad \text{si} \quad p_1 + q_1 = t_1, \quad p_2 + q_2 = t_2.$$

On définit de même $p = t - q$. Il est essentiel de remarquer : a) $p + q = t$ entraîne $p \preceq t$ et $q \preceq t$ car $n(p) + n(q) = n(t)$. b) Par contre l'ensemble des p qui pour t fixé, sont de la forme $p = t - q$, q quelconque, est contenu dans l'ensemble $p \preceq t$ mais est en général plus restreint que lui. Il est aisé de voir qu'il n'existe pas d'ordre sur le réseau (N) pour lequel l'ensemble $p \preceq t$ coïncide avec l'ensemble des p de la forme $p = t - q$ où q est pris dans (N) .

Nous appellerons suite (S) de polynômes un ensemble de polynômes

$$(4) \quad P_t(x, y) = (x)^t + \sum_j \lambda_j^t (x)^j$$

tel qu'il corresponde un polynome P_t à chaque point t du réseau (N) , le polynome P_t étant formé du premier monome $(x)^t = x^{t_1}y^{t_2}$ de coefficient unité et contenant seulement avec celui-ci des monomes d'exposants $j \prec t$ antécédents à t .

Nous énoncerons alors :

Théorème 1. D étant un domaine contenant $O[x = y = 0]$ comme point intérieur, pour que la classe $E(D)$ des fonctions analytiques et uniformes dans D , ayant en O des coefficients de Taylor entiers ne contienne que des fractions rationnelles, il suffit que soient vérifiées les conditions suivantes :

a) Il existe dans D une variété W à deux dimensions réelles constituée par un cycle ou un ensemble de cycles ; W est simplement enlacée avec l'ensemble $T(O)$ d'équation $xy = 0$ et peut être amenée par déformation continue dans D sur le cycle $V[|x| = r, |y| = r']$ pris dans un voisinage arbitraire de O .

b) Il existe une suite (S) de polynomes $P_t(x, y)$ pour lesquels on a sur W :

$$(5) \quad \frac{1}{n_t} \log |P_t(x^{-1}, y^{-1})| \leq \gamma < 0$$

dès que le degré n_t surpasse un nombre n_0 .

c) De plus on suppose que W est obtenue de la façon suivante: On désigne par C un contour fermé ou un ensemble de tels contours contenu dans l'intersection d_0 de D avec $x=0$ et réductible par déformation continue dans d_0 à un cercle $|y|=r'$ pris dans un voisinage de $y=0$; on appelle de même, pour $y=\eta \in C$, $\Gamma(y)$ un contour fermé ou un ensemble de contours fermés pris dans l'intersection $d(y)$ de D avec le plan $y=\eta$ et réductible dans $d(y)$ à un cercle $|x|=r$ arbitrairement petit entourant $x=0$. On a alors $W = \sum [y \in C, x \in \Gamma(y)]$.

La condition b) est à rapprocher de la condition $c(\sigma) < 1$ du résultat de Borel-Pólya; celle-ci équivaut en effet à l'existence d'un contour C dans le domaine plan D et à celle d'une suite (S) de polynomes de Tchebyscheff satisfaisant (5) sur C . On notera par contre que W est ici un cycle à deux dimensions réelles; pour les applications W sera pris dans D , évidemment au voisinage de la frontière de D , mais n'est plus comme dans le cas des séries $F(z)$ déterminé seulement par une approximation de celle-ci.

Remarquons encore que si D n'est pas un domaine d'holomorphie, $E(D)$ sera en général formée de fonctions analytiques dans un domaine $\tilde{D}$ plus grand que D . On est amené à envisager:

Problème B: Etant donné un domaine d'holomorphie D à l'intérieur duquel tout cycle L^1 à une dimension est réductible à un point par déformation continue, et D contenant O comme point intérieur, trouver des conditions suffisantes sur D pour la classe $E(D)$ ne contienne que des fractions rationnelles.

Le problème B sera étudié dans le cas où D est un domaine cerclé par rapport à O . Les résultats obtenus montrent que les conditions suffisantes d'après le théorème 1 sont aussi nécessaires au sens suivant: si elles sont en défaut pour les domaines du type indiqué, $E(D)$ renferme des fonctions non rationnelles.

Pour terminer ces généralités qui concernent une question nouvelle à notre connaissance, signalons qu'il ne paraît pas déraisonnable d'espérer que l'hypothèse c) sur W puisse être laissée de côté, W étant assujéti à la seule condition d'être une variété dans D simplement enlacée avec $T(0)$, sur laquelle est satisfaite la condition (5) relativement à une suite (S) de polynomes. Une solution moins partielle du problème posé semble possible dans cette voie.

§ 2. Problème B pour les domaines cerclés.

1. *Dicylindre de centre O.* Soit $D = D(R, R')$ le dicylindre $|x| < R$, $|y| < R'$. Nous établirons :

Proposition 1 *Pour que la classe $E(D)$ ne contienne que des fractions rationnelles, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(6) \quad R_m = \min(R, R') > 1.$$

Si cette condition est réalisée, la classe $E(D)$ des fonctions analytiques dans $D(R, R')$, à coefficients de Taylor entiers à l'origine, ne contient que des polynômes.

Si elle n'est pas réalisée, $E(D)$ contient des fonctions non rationnelles.

En effet si $R_m > 1$, il existe r_0 tel que l'on ait $1 < r_0 < R_m$. Soit M le maximum de $|F(x, y)|$ sur la variété $V: [|x| = |y| = r_0]$. Si l'on pose $F = \sum_{p, q} a_{p, q} x^p y^q$, on a :

$$(7) \quad a_{p, q} = - \frac{1}{4\pi^2} \int_v F(\xi, \eta) \xi^{-p-1} \eta^{-q-1} d\xi d\eta.$$

D'où $|a_{p, q}| \leq M r_0^{-(p+q)}$ quantité qui est inférieure à 1 dès qu'on a $p+q > n_0$; d'où $a_{p, q} = 0$ pour $p+q > n_0$; F est un polynôme.

Pour la réciproque utilisons le théorème de Hadamard-Fabry relatif aux séries lacunaires: si pour la série $F(z) = \sum_n a_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$, où λ_n sont des entiers croissants on a $\lim (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = +\infty$, alors $F(z)$ est non prolongeable hors du cercle de convergence.

Dans ces conditions si $R_m = R \leq 1$, on formera

$$\varphi_R(x) = \sum_p [R^{-p}] x^{2p}$$

$[R^{-p}]$ désignant la partie entière de R^{-p} . La fonction

$$F(x, y) = \varphi_R(x) + g(y)$$

où g est un polynôme à coefficients entiers, appartient à $E(D)$ et n'est pas rationnelle.

2. *Domaine de Reinhardt de centre O.* Rappelons qu'on appelle domaine de Reinhardt (de centre O) un domaine 2 fois cerclé qui contient en même temps que le point $[x_0, y_0]$ tous les points $[x = x_0 e^{i\theta}, y = y_0 e^{i\varphi}, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < 2\pi]$ Pour qu'un tel domaine contenant O soit domaine d'holomorphic, il faut et il suffit qu'il soit défini par les équations :

$$|x| = r = e^u, |y| = r' = e^v$$

l'ensemble des points $[u, v]$ étant un ensemble (g) convexe qui comprend évidemment les deux points à l'infini $[u = -\infty, v = 0], [u = 0, v = -\infty]$; nous désignerons par γ la séparatrice ou frontière convexe de (g) ; elle détermine le domaine.

Proposition 2. *Etant donné un domaine de Reinhardt D de centre O , contenant O pour que $E(D)$ ne contienne que des fractions rationnelles, il faut et il suffit que la variété $V_1: [|x|=|y|=1]$ soit intérieure à D .*

Si la condition est vérifiée, $E(D)$ ne contient que des polynômes.

Si D ne contient pas V_1 à l'intérieur, il existe une série $F(x, y) = \sum_{p, q} a_{p, q} x^p y^q$, $a_{p, q}$ entiers, qui converge dans D et n'est pas une fraction rationnelle.

La première partie se démontre comme pour le dicylindre; si V_1 est intérieure à D , D contient la variété $|x|=|y|=r_0$, avec $r_0 > 1$ assez voisin de 1.

Démontrons la seconde partie en supposant que le domaine D ne contient pas à son intérieur V_1 ; dans ces conditions le point $\omega [u=v=0]$ est sur γ ou au dessus de γ . La région (g) limitée par γ étant convexe, on peut dans les deux cas, mener par O une droite $\mathcal{A}$ n'ayant pas d'autre point commun avec (g) que O et laissant (g) au dessous d'elle.

Si $\mathcal{A}$ a une pente rationnelle, on écrira son équation

$$mu + nv = 0, \quad m, n \text{ entiers}$$

et on formera la série:

$$(8) \quad F_1(x, y) = \sum_p (x^m y^n)^{2p}$$

Si $\mathcal{A}$ a une pente $-\tau$ irrationnelle, on formera une suite de fractions $n_p/m_p \rightarrow \tau$ et on écrira

$$(9) \quad F_2(x, y) = \sum (x^{m_p} y^{n_p})^{2p}.$$

Il est clair que F_1 et F_2 convergent dans D car ces séries convergent dans le domaine de Reinhardt plus grand de séparatrice $\mathcal{A}$. Reste à montrer que F_1 et F_2 ne sont pas rationnelles. Dans ce but nous établirons la proposition suivante relative aux séries lacunaires $F(x, y)$:

Proposition 3. *Si dans la série $F(x, y) = \sum_s a_s (x)^s$ les points s du réseau (N) pour lesquels $a_s \neq 0$ forment un ensemble (e) ayant la propriété suivante: tout point $s \in (e)$ est centre d'un cercle C_s qui ne contient pas de point de (e) , et dont le rayon $r_s \rightarrow +\infty$ avec la distance de s à l'origine de (N) ; alors $F(x, y)$ n'est pas une fraction rationnelle.*

Il est immédiat que la Proposition entraîne que (8) et (9) ne soient pas rationnels.

Pour l'établir formons des conditions nécessaires pour que F soit rationnelle. De l'identité

$$F(x, y) C(x, y) = B(x, y),$$

où B et C sont des polynômes, c'est-à-dire des sommes de monômes dont les exposants appartiennent à des régions bornées β et γ de (N) , on déduit:

$$\begin{aligned}
 & \left[\sum_{s \in (N)} a_s(x)^s \right] \left[\sum_{t \in \gamma} c_t(x)^t \right] \equiv \sum_{q \in \beta} b_q(x)^q \\
 (10) \quad & E_q: \sum_{l \in \gamma} c_l a_{q-l} = b_q \quad \text{si } q \in \beta \\
 (11) \quad & E_q: \sum_{l \in \gamma} c_l a_{q-l} = 0 \quad \text{si } q \notin \beta.
 \end{aligned}$$

On pose $a_{q-l} = 0$ si $q-l$ n'appartient pas à (N) . En considérant une région $q \in \gamma'$ où γ' n'a aucun point commun avec β et contient autant de points de (N) que γ , on forme le déterminant

$$D(\gamma, \gamma') = \|a_{q-l}\|^{(q, \gamma)}, \quad q \in \gamma', l \in \gamma$$

q variant avec les lignes, l avec les colonnes. La compatibilité des équations E_q pour $q \in \gamma'$ entraîne

$$D(\gamma, \gamma') = 0.$$

On peut d'ailleurs remplacer γ par une région G contenant γ . D'où:

Proposition 4. *Pour que $F = \sum_{s \in (N)} a_s(x)^s$ soit rationnelle il faut que les déterminants*

$$(12) \quad D(G, G') = \|a_{q-l}\|^{(q, \gamma)}, \quad l \in G, q \in G'$$

soient nuls, G et G' étant deux régions contenant le même nombre de points de (N) , G' ne rencontrant pas la région finie β des exposants du numérateur et G étant assujettie à contenir la région γ des exposants du dénominateur.

Montrons que la Proposition 4 entraîne la précédente. Soit $s \in (e)$ pour lequel $a_s \neq 0$. Associons à s la région G_s constituée par les points $q = s + j$, $j \in \gamma$. On doit avoir

$$D_s = D(\gamma, G_s) = \|a_{s+j-l}\|^{(j, \gamma)} = 0, \quad j \in \gamma, l \in \gamma.$$

Or D_s d'après l'hypothèse faite sur (e) se réduit à sa diagonale $j=l$, donc vaut $(a_s)^{\gamma}$, dès que γ est contenue dans C_s , soit pour $|0s|$ suffisamment grand. Donc dans les conditions énoncées à la Proposition 3, F ne peut être rationnelle.

La même conclusion peut être obtenue en supposant seulement l'existence d'une suite de cercles lacunaires C_s dont les rayons augmentent indéfiniment. Il est vraisemblable que la caractère lacunaire énoncé dans la Proposition 3 assure l'impossibilité du prolongement de F au delà du domaine de Reinhardt de convergence de la série de Taylor.

Remarquons enfin que si l'on prend pour variété W la variété $|x|=|y|=r_0$, $r_0 > 1$, déjà considérée, et pour suite $P_s(x, y) = (x)^s$, les conditions suffisantes trouvées jusqu'ici pour que $E(D)$ ne contienne que des fractions rationnelles, constituent une application du théorème 1.

3. Domaines simplement cerclés et domaines de Hartogs. Soit S un domaine simplement cerclé de centre O , c'est-à-dire contenant en même temps que $[x_0, y_0]$ tous les points $[x = x_0 e^{i\theta}, y = y_0 e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi]$. Pour

que S contenant 0 soit un domaine d'holomorphie, il faut et il suffit qu'il soit défini par $y = tx$, $|x| < R(t)$, où $-\log R(t)$ est sousharmonique ou $-\infty$.

Un domaine H est dit domaine de Hartogs de plan de symétrie $x = 0$ si même temps que $[x_0, y_0]$, H contient les points $[x = x_0 e^{i\theta}, y = y_0, 0 \leq \theta < 2\pi]$. Pour que H soit un domaine d'holomorphie, contenant 0, il faut et il suffit qu'il soit défini par $[y \in d, |x| < R(y)]$, où $-\log R(y)$ est sousharmonique ou $-\infty$.

Par la substitution $x = ty$, $F(x, y) = \sum a_{p,q} x^p y^q$ devient $\Phi = \sum a_{p,q} t^p y^{p+q}$ à coefficients entiers; le problème B pour les domaines S est donc contenu dans le même problème pour les domaines H .

Je vais montrer que le théorème 1 permet de résoudre le problème B pour ces derniers.

Proposition 5. *Pour que la classe $E(H)$ ne contienne que des fractions rationnelles, il faut et il suffit que soient satisfaites les conditions suivantes:*

Il existe un ensemble ouvert e contenant l'origine $O[x = y = 0]$ et contenu dans la base $d[x = 0, y \in d]$ sur lequel on a $R(y) > \varrho > 1$; la composante e_0 de e qui contient O donne par la transformation $y' = y^{-1}$ une région dont le complémentaire σ fermé et borné a un diamètre transfini $c(\sigma) < 1$.

Remarquons tout d'abord que les conditions énoncées sont nécessaires; elles le sont en effet pour les dicylindres de centre O qui sont des domaines H particuliers.

Elles sont suffisantes d'après le théorème 1. Enfermons σ à l'intérieur d'un nombre fini de contours rectifiables L' , l'ensemble σ' des domaines formés ayant un diamètre transfini c' avec $c < c' < 1$. On peut former alors des polynômes

$$T_n(y') = y'^n + \sum_{j=0}^{j=n-1} \lambda_j^{(n)} y'^j$$

satisfaisant à

$$|T_n(y')| < (c' + \varepsilon)^n$$

sur L' pour $n > n_0$, avec $c' + \varepsilon = c'' < 1$.

En posant, si $s = [s_1, s_2]$,

$$P_s(x, y) = x^{s_1} T_{s_2}(y)$$

et prenant comme variété W la variété constituée en associant à un point $y \in L$ du transformé de L' par $y = y'^{-1}$, le cercle $|x| = \varrho'$, où l'on a $\varrho' > \varrho > 1$, on voit aisément que les conditions du théorème 1 sont satisfaites: $E(H)$ ne renferme que des fractions rationnelles.

§ 3. Problème A: démonstration du théorème 1.

Nous supposons $F(x, y)$ analytique dans un domaine D contenant l'origine; elle est développable sous la forme

$$(13) \quad F(x, y) = \sum_p a_p(y) x^p$$

dans un dicylindre $|x| < r$, $|y| < r$ suffisamment petit; les $a_p(y)$ sont des fonctions analytiques à coefficients de Taylor entiers à l'origine.

Nous considérons pour le moment y comme un paramètre et précisons en reprenant un raisonnement classique²⁾ les conditions nécessaires et suffisantes pour que F soit fraction rationnelle de x .

Nous poserons

$$X_\alpha^\beta = \|a_{\alpha+i+j}\|^{(i,j)}, \quad (0 \leq i \leq \beta, 0 \leq j \leq \beta)$$

i variant avec les lignes, j avec les colonnes dans le déterminant X_α^β ; ce déterminant étant un polynôme des quantités

$$(14) \quad a_p = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p F}{\partial x^p}$$

est une fonction analytique dans D ; nous le noterons encore $X_\alpha^\beta F(x, y)$.

Les fonctions $X_\alpha^\beta F(x, y)$ étant identiquement nulles pour $\alpha < -\beta$, on supposera toujours $\alpha \geq -\beta$.

Nous établirons:

Proposition 6. a) Pour que F analytique dans D soit une fraction rationnelle de x , il faut que l'on ait

$$X_\alpha^\beta F(x, y) \equiv 0 \quad \text{dans } D$$

pour $\alpha \geq p$, $\beta \geq n$ ($p \geq -n$) où $p = m - n + 1$, m étant le degré du numérateur, n celui du dénominateur.

b) Il est également nécessaire qu'on ait

$$X_0^\beta F(x, y) \equiv 0 \quad \text{dans } D$$

pour $\beta \geq \max(m+1, n) = p_1$.

c) En réciproque de a): si l'on a $X_\alpha^\beta F(x, y) \equiv 0$ pour $\alpha \geq p$, $\beta \geq n$ et $X_{\alpha_0}^{n-1} F(x_0, y_0) \neq 0$ pour un $\alpha_0 \geq p$, F est fraction rationnelle de x , le degré du dénominateur est n , celui du numérateur $n + p - 1$ au plus; les coefficients de ces deux polynômes sont des polynômes des quantités $a_p(x_0, y)$ en nombre fini.

d) En réciproque de b): si l'on a $X_0^\beta F(x, y) \equiv 0$ pour $\beta \geq p_1$, F est rationnelle de x et l'on a $\max(m+1, n) \leq p_1$.

e) Les fonctions $X_\alpha^\beta F(x, y)$, analytiques dans D , y possèdent la propriété suivante pour α donné positif. Si pour $\beta \geq \beta_0$ elles s'annulent toutes sur un plan analytique $x = x_0$ identiquement en y , elles s'annulent pour $\beta \geq \beta_0$ identiquement dans D .

Pour la démonstration considérons l'identité

$$\left[\sum a_p x^p \right] \left[\sum_{j=0}^{j=n} c_j x^j \right] = \sum_{s=0}^{s=m} b_s x^s$$

où les coefficients a_p , c_j , b_s dépendent de y ; elle donne les équations

²⁾ Voir L. BIEBERBACH, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 1931, p. 321.

$$(15) \quad E_s: \sum_{j=0}^{j=n} c_j(y) a_{s-j}(y) = b_s(y) \quad s \leq m$$

$$(16) \quad E_s: \sum_{j=0}^{j=n} c_j(y) a_{s-j}(y) = 0 \quad s > m.$$

La compatibilité de $E_{m+1+\lambda}, \dots, E_{m+1+\lambda+n}$ donne en posant $m+1-n=p$:

$$X_{p+\lambda}^n F(0, y) = \|a_{p+\lambda+i+j}\|^{(i,j)} = 0$$

quel que soit $\lambda \geq 0$. On a donc $X_\alpha^\beta F(0, y) = 0$ pour $\alpha \geq p$, $\beta \geq n$, quel que soit y . De plus une translation $x = x_1 + x_0$ ne modifie pas le résultat: *a)* est ainsi établi.

Si l'on a $p \leq 0$, *b)* est établi car on peut prendre $\alpha = 0$ dans *a)*; on a alors $p_1 = n$. Si l'on a $p > 0$, on considère un déterminant $X_0^{\alpha+\beta+\lambda}$, avec $\lambda \geq 0$, $\alpha \geq p$, $\beta \geq n$: les mineurs formés avec les β dernières lignes sont nuls; on a donc $X_0^\beta F(x, y) \equiv 0$ pour $\beta \geq \max(m+1, n) = p_1$; *b)* est établi.

Pour établir *c)* on utilise l'identité entre déterminants:

$$(17) \quad (X_{\alpha-1}^{n-1})(X_{\alpha+1}^{n-1}) - (X_{\alpha-1}^n)(X_{\alpha+1}^{n-2}) = (X_\alpha^{n-1})^2$$

pour $\alpha = \alpha_0$. Des hypothèses *c)* on déduit

$$X_{\alpha_0-1}^{n-1} F(x_0, y_0) \neq 0, \quad X_{\alpha_0+1}^{n-1} F(x_0, y_0) \neq 0.$$

En tenant compte de $X_\alpha^n F(x_0, y_0) \equiv 0$ pour $\alpha \geq p$, on a de proche en proche:

$$X_\alpha^{n-1} F(x_0, y_0) \neq 0$$

pour $\alpha \geq p+1$. Dès lors les équations $E_{m+1}, \dots, E_{m+1+n}$ déterminent les coefficients $c_j(y)$, ($0 \leq j \leq n$), à un facteur près; on achève de les préciser en posant

$$c_0(y) = X_{p+1}^{n+1} F(x_0, y) \neq 0.$$

On détermine les coefficients $b_s(y)$ par les équations (15): on a ainsi F ; numérateur et dénominateur étant ordonnés suivant les puissances de $x_1 = x - x_0$; *c)* est établi.

D'autre part si l'on a $X_0^\beta F(x, y) \equiv 0$ pour $\beta \geq p_1$, d'après l'identité (17) appliquée avec $\alpha = 1$, $n-1 = \beta$, on a aussi $X_1^\beta F(x, y) \equiv 0$ pour $\beta \geq p_1$ et de proche en proche $X_\alpha^\beta F(x, y) \equiv 0$ pour $\alpha \geq 0$, $\beta \geq p_1$: d'après *c)* F est rationnelle de x et l'on a $\max(m+1, n) \leq p_1$; *d)* est établi.

Enfin *e)* résulte de *d)*, car si $X_0^\beta F(x_0, y_0) = 0$ quel que soit y pour $\beta \geq \beta_0$, F est rationnelle en x avec $\max(m+1, n) \leq \beta_0$; on en déduit $X_0^\beta F(x, y) \equiv 0$. Même raisonnement pour $X_\alpha^\beta F = X_0^\beta \left(\frac{\partial^\alpha F}{\partial x^\alpha} \right)$ avec $\alpha > 0$.

Indiquons quelques conséquences des énoncés précédents. Si F , analytique dans D , n'est pas rationnel en x , l'ensemble des valeurs y , soit $e_y^{(n)}$ pour lesquelles F est rationnel en x , de degré au plus n , est à chercher parmi les zéros de la fonction analytique $X_0^{n+1} F(x_0, y)$; les plans $y = \eta \in e_y^{(n)}$ n'ont pas de poin d'accumulation dans D .

L'ensemble e_y des y qui peuvent rendre F rationnel en x soit $\sum_n e_y^{(n)} = e_y$ est ainsi dénombrable.

Remarquons encore: pour que F , analytique dans D , soit rationnel, il faut et il suffit que F soit rationnel de x et de y séparément.

En effet on a vu que si F est rationnel en x les équations (15) et (16) déterminent les coefficients $c_s(y)$, $b_j(y)$ comme fonctions rationnelles des $a_k(y)$ en nombre fini. Si F est rationnel en y , $a_k(y)$ déterminé par (14) est rationnel en y ; F est ainsi exprimé rationnellement en fonction de x et de y .

Expression des $X_0^p F(x, y)$: Nous désignerons par V une variété à 2 dimensions enlacée simplement avec $T(0)$, par l un contour fermé entourant l'origine $\xi=0$ dans le plan des ξ ; on aura:

$$(18) \quad a_p(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_l F(x + \xi, y) \xi^{-p} (\xi^{-1} d\xi)$$

$$(19) \quad a_p(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_V F(x + \xi, y + \eta) \xi^{-p} (\xi^{-1} d\xi) (\eta^{-1} d\eta).$$

A partir de (18), on a

$$X_0^n F(x, y) = \|a_{i+j}(x, y)\|^{(i,j)}$$

ou:

$$(20) \quad X_0^n F(x, y) = (2i\pi)^{-(n+1)} \int_{l_0} \dots \int_{l_n} \delta(\xi_0^{-1}, \dots, \xi_n^{-1}) \xi_1^{-1}, \dots, \xi_n^{-1} \prod_{i=0}^n F(x + \xi_i, y) \xi_i^{-1} d\xi_i$$

$\xi_0 \dots \xi_n$ sont $n+1$ variables d'intégration parcourant les contours l_i entourant $\xi_i=0$. On a posé

$$\delta(\xi_0^{-1}, \dots, \xi_n^{-1}) = \|\xi_i^{-j}\|^{(i,j)} \quad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq n.$$

En envisageant les $(n+1)!$ permutations des lettres ξ_i , on a encore:

$$(21) \quad X_0^n F(x, y) = \frac{(2i\pi)^{-(n+1)}}{(n+1)!} \int_{l_0} \dots \int_{l_n} \delta^2(\xi_0^{-1}, \dots, \xi_n^{-1}) \prod_{i=0}^n F(x + \xi_i, y) \xi_i^{-1} d\xi_i$$

et on définira de même $Y_0^q F(x, y)$, l'opérateur portant sur la variable y .

Les fonctions $X_0^n F(x, y)$ étant analytiques dans D , on peut leur appliquer l'opérateur Y_0^q et considérer les fonctions $Y_0^q X_0^n F(x, y)$ analytiques dans D . Nous allons établir:

Proposition 7. *Les hypothèses du théorème 1 entraînent*

$$x_{q,n} = Y_0^q X_0^n F(0, 0) = 0 \quad \text{pour } n^2 + q > m_0,$$

m_0 étant un entier fini.

Tout d'abord $Y_0^q X_0^n F(0, 0)$ s'exprime en fonction des coefficients $a_{p,q}$ donnés par (3) et est entier avec eux. Il suffit donc d'établir:

$$|x_{q,n}| = |Y_0^q X_0^n F(0, 0)| < 1 \quad \text{pour } n^2 + q > m_0.$$

Ici intervient l'hypothèse du théorème 1 concernant W ; on a $W = \sum_y [y \in C, x \in \Gamma(y)]$ et il existe une suite P_s de polynômes avec, sur W :

$$(22) \quad \log \left| P_s \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \right| \leq n_s \gamma + \log A$$

A constante finie, $\gamma < 0$.

Pour y fixé, $x=0$, nous calculerons $X_0^n F^x(0, y)$ par (21) en prenant pour contours l_i le contour $\Gamma(y)$. Dans la suite (21), nous considérons les polynômes correspondant à $s = [n, 0]$, $P_n(x, y) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^{(n)}(y) x^i$; $\lambda_i^{(k)}(y)$ est un polynôme de degré $k-1$ en y ; on a $\lambda_k^{(k)} = 1$, $\lambda_i^{(k)} = 0$ pour $i > (k)$, de sorte que:

$$\|\lambda_i^{(j)}(y)\|^{(i,j)} = 1$$

et

$$(23) \quad \delta(\xi_0^{-1}, \dots, \xi_n^{-1}) = \delta(\xi_0^{-1}, \dots, \xi_n^{-1}) \|\lambda_i^{(j)}\|^{(i,j)} = \|P_i(\xi_j^{-1}, y^{-1})\|^{(i,j)}.$$

En utilisant alors la majoration (22) des polynômes sur $\Gamma(y)$, on obtient une majoration du déterminant (23) suivant le procédé de Hadamard:

$$(24) \quad |\delta(\xi_0^{-1}, \dots, \xi_n^{-1})|^2 \leq A^{2(n+1)} (n+1)^{n+1} e^{n(n+1)\gamma}$$

D'après (21), on a alors pour $y \in C$:

$$|X_0^n F(0, y)| \leq \left(\frac{M}{2\pi} \right)^{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} S^{n+1} A^{2(n+1)} e^{n(n+1)\gamma},$$

où $M = \max |F(x, y)|$ sur W , et S est une borne supérieure de $\int |\xi_i^{-1} d\xi_i|$ sur $\Gamma(y)$. Finalement il existe un nombre $K_1 > 1$ indépendant de n et de y tel que

$$(25) \quad |X_0^n F(0, y)| \leq K_1^{n+1} e^{n(n+1)\gamma} \quad \text{pour } y \in C.$$

A partir de (25) majorons

$$(26) \quad \chi_{q,n} = Y_0^q X_0^n F(0, 0) = \frac{(2i\pi)^{-(q+1)}}{(q+1)!} \int \dots \int \delta^2(\eta_0^{-1}, \dots, \eta_q^{-1}) \prod_0^q X_0^n F(0, \eta_i) \eta_i^{-1} d\eta_i.$$

En considérant dans la suite (22) les polynômes P_m obtenus pour $s = [0, m]$, on aura $\left| P_m \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \right| < B e^{n\gamma}$, pour $y \in C$, $x \in \Gamma(y)$. Formons

$$Q_m \left(\frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(y)} P_m \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) \frac{dx}{x}.$$

On a

$$(27) \quad \left| Q_m \left(\frac{1}{y} \right) \right| < B' e^{n\gamma}$$

pour $y \in C$ et Q_m est de la forme

$$Q_m(y) = y^m + \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i^{(m)} y^i.$$

En opérant comme plus haut, on a alors

$$\delta(\eta_0^{-1}, \dots, \eta_q^{-1}) = \|Q_i(\eta_j^{-1})\|^{(i,j)}$$

et

$$|\delta^2(\eta_0^{-1}, \dots, \eta_q^{-1})| \leq B^{2(q+1)} (q+1)^{q+1} e^{q(q+1)}$$

Finalement, il existe un nombre $K_2 > 1$ indépendant de q et n tel que l'on ait:

$$(28) \quad \log |x_{p,n}| \leq (q+1) [\log K_2 + (n+1) \log K_1 + (q+n(n+1)) \gamma].$$

On a donc $x_{p,n} = 0$ dès que :

$$[n(n+1) + q] \gamma + (n+1) \log K_1 + \log K_2 < 0$$

ou

$$(n^2 + q) \gamma + \sqrt{n^2 + q} \log K_1 + \log K_2 < 0.$$

On a donc $x_{p,n} = 0$ dès que $n^2 + q$ surpasse un certain nombre fini m_0 , ce qui démontre la Proposition 7.

On a pour $q > m_0$, $Y_0^q X_0^n F(0, 0) = 0$, quel que soit n ; donc $X_0^n F(0, y)$ est, quel que soit n , une fraction rationnelle de degré au plus $m_0 + 1$ d'après la proposition 6.

D'autre part considérons les valeurs n telles que $n^2 > m_0$; on a $Y_0^q X_0^n F(0, 0) = 0$ quel que soit q . Posons $X_0^n F(0, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{(n)} y^i$. Pour $q = 0$, on obtient $X_0^n F(0, 0) = \alpha_0^{(n)} = 0$. Ensuite $Y_0 X_0^n F(0, 0) = 0$ donne, en tenant compte de $\alpha_0^{(n)} = 0$, l'égalité $\alpha_1^{(n)} = 0$. De proche en proche on démontre $\alpha_i^{(n)} = 0$ quel que soit i ; comme $X_0^n F(0, y)$ est une fraction rationnelle de degré au plus $m_0 + 1$, on en déduit

$$X_0^n F(0, y) \equiv 0 \quad \text{pour } n^2 > m_0.$$

Il en résulte que F est rationnelle en x , de degré n_0 au plus, n_0 étant le premier entier tel que $n_0^2 > m_0$. On a vu plus haut que F est alors le quotient de deux polynômes en x dont les coefficients $c_j(y)$, $b_s(y)$ sont des expressions rationnelles des $a_k(y)$ en nombre fini; or les $a_k(y)$ sont des fractions rationnelles de y car $a_k(y)$ a un développement de Taylor à coefficients entiers à l'origine et est analytique à l'intérieur de C , sur lequel existe la suite de polynômes $Q_m\left(\frac{1}{y}\right)$ avec la condition (27). Ainsi $F(x, y)$ est une fraction rationnelle, ce qui établit le théorème 1.

Les hypothèses du théorème 1 s'appliquent aisément aux domaines de la forme $D = \sum_y [y \in d_0, x \in d(y)]$. Appelons c_0 le diamètre transfini du transformé par $y' = y^{-1}$ du complémentaire de d_0 ; désignons de même par $c(y)$ le diamètre transfini du transformé par $x' = x^{-1}$ du complémentaire de $d(y)$.

On vérifie facilement que les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées si l'on a $c(y) \leq c_1 < 1$ pour $y \in d_0$, et $c_0 < 1$. L'exemple des domaines de Hartogs montre que ces conditions sont bien nécessaires pour que la classe $E(D)$ soit rationnelle. Remarquons encore que si D est un domaine produit topologique $[x \in d_0, y \in d_1]$, pour que $E(D)$ soit une classe rationnelle, il faut et il suffit que les classes $E(d_0)$, $E(d_1)$ de fonctions d'une variable le soient; la condition nécessaire est évidente; la condition suffisante résulte du théorème 1.

(Reçu le 22 juillet 1950.)