

Kurzer Beweis eines Satzes über die obere Schranke der absoluten Beträge von mehreren Nullstellen eines Polynoms.

Von GYULA SZ.-NAGY in Szeged.

Es gilt der

Satz 1. Ist $q = n - p + 1$ und bezeichnet r_1 bzw. r_2 die positive Nullstelle des Polynoms

$$(1) \quad F_1(x) = |a_p|x^p - \binom{q}{1}|a_{p-1}|x^{p-1} - \binom{q+1}{2}|a_{p-2}|x^{p-2} - \dots - \binom{n}{p}|a_0| \quad (a_0 a_p \neq 0)$$

bzw.

$$(2) \quad F_2(x) = |a_n|x^n - |a_{p-1}|x^{p-1} - \binom{q}{1}|a_{p-2}| - \dots - \binom{n-1}{p-1}|a_0| \quad (a_0 a_n \neq 0),$$

so hat das Polynom

$$(3) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{p-1} z^{p-1} + a_p z^p + \dots + a_n z^n$$

mindestens p Nullstellen im Kreise $|z| \leq r_1$ bzw. $|z| \leq r_2$.

Der erste bzw. zweite Teil dieses Satzes (bezüglich des Kreises vom Halbmesser r_1 und r_2) wurde zum erstenmal von E. B. VAN VLECK¹⁾ bzw. von P. MONTEL²⁾ bewiesen. Beide Teile wurden auch von P. MONTEL³⁾, R. BALLIEU, D. MARKOVIC und TH. ANGHEUTZA⁴⁾ bewiesen. Der Satz 1 wurde von den letzten drei Verfassern⁵⁾ für den Fall verallgemeinert, daß die $p+1$ Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ und a_{p+m} ($0 < m \leq n-p$) gegebene Größen und die übrigen Koeffizienten von $f(z)$ Parameter sind. Diese Verallgemeinerung hat aber keine Anwendung gefunden. Aus dem Satz 1 haben MONTEL⁶⁾ und MARKOVIC⁶⁾

¹⁾ E. B. VAN VLECK, On limits of the absolute values of the roots of a polynomial, *Bull. de la Soc. Math. de France* 53 (1925), 105–125.

²⁾ P. MONTEL, Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynômes, *Commentarii Math. Helv.* 7 (1934–35), 178–200.

³⁾ A. a. O.

⁴⁾ R. BALLIEU, Limitations en module et locations des zéros des polynômes, *Mémoires de la Soc. Royale des sciences de Liège* (4) 1 (1936), 85–182.

D. MARKOVIC, Sur la limite supérieure des modules des zéros des polynômes, *Publ. Math. Univ. Belgrade* 67 (1938), 36–47.

TH. ANGHEUTZA, Sur une limite pour les modules des zéros des polynômes, *Bull. de la Soc. Math. de France* 67 (1939), 120–131.

⁵⁾ A. a. O.

⁶⁾ D. MARKOVIC, Sur quelques limites supérieures des modules des zéros d'un polynôme, *Mathematica (Cluj)* 15 (1939), 36–47.

einfachere Formeln für die obere Schranke der absoluten Beträge von p Nullstellen des Polynoms $f(z)$ abgeleitet.

Der erste Teil des Satzes 1 folgt unmittelbar aus dem

Satz 2. Das Polynom

$$(4) \quad g(z) = z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_p z^p + \dots + a_n \quad (a_0 a_p \neq 0)$$

hat höchstens $n-p$ Nullstellen im Kreise $|z| < \varrho_1 = \frac{1}{r_1}$.

Zum Beweis dieses Satzes nehmen wir an, daß die Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_{n-p}$ des Polynoms $g(z)$ im Kreise $|z| \leq \varrho_1$ liegen und wir werden zeigen, daß das Polynom

$$(5) \quad \begin{aligned} G(z) &= g(z : \prod_{k=1}^{n-p} (z - z_k)) \equiv a_0 z^p + b_1 z^{p-1} + b_2 z^{p-2} + \dots + b_p = \\ &= (a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p + a_{p+1} z^{-1} + \dots + a_n z^{-n+p}) \cdot \prod_{k=1}^{n-p} \left(1 - \frac{z_k}{z}\right)^{-1} \end{aligned}$$

im Innern des Kreises $|z| = \varrho_1$ nicht verschwinden kann.

Ist $|z| > \varrho_1$, so gilt die konvergente Reihenentwicklung

$$(6) \quad \begin{aligned} G(\cdot) &= (a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p + a_{p+1} z^{-1} + \dots + a_n z^{-n+p}) \cdot \prod_{k=1}^{n-p} (1 + z_k z^{-1} + z_k^2 z^{-2} + \dots) \\ &= (a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p + a_{p+1} z^{-1} + \dots + a_n z^{-n+p}) (1 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots), \end{aligned}$$

weil $|z_k z^{-1}| < 1$ ist. Dabei sind

$$(7) \quad \begin{aligned} C_k &= \sum z_1^{h_1} z_2^{h_2} \dots z_{n-p}^{h_{n-p}}, \\ (h_1 + h_2 + \dots + h_{n-p} &= k; h_j = 0, 1, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n-p). \end{aligned}$$

Die Summe C_k besteht also aus $\binom{n-p+k-1}{k} = \binom{q+k-2}{k}$ Gliedern.

Aus (5) und (6) folgen die Identitäten

$$(8) \quad \begin{aligned} b_k &= a_0 C_k + a_1 C_{k-1} + \dots + a_{k-1} C_1 + a_k C_0, \\ (C_0 &= 1; k = 1, 2, \dots; b_{p+1} = b_{p+2} = \dots = 0). \end{aligned}$$

Führt man die Bezeichnung

$$(9) \quad \begin{aligned} H_k(z) &= C_0 z^k + C_1 z^{k-1} + \dots + C_{k-1} z + C_k, \\ (k &= 1, 2, \dots, p; C_0 = H_0 = 1) \end{aligned}$$

ein, so ist

$$(10) \quad \begin{aligned} G(z) &= a_0 H_p(z) + a_1 H_{p-1}(z) + \dots + a_p H_0 \\ &= z[a_0 H_{p-1}(z) + a_1 H_{p-2}(z) + \dots + a_{p-1} H_0] + b_p. \end{aligned}$$

$H_k(z)$ ist offenbar die Summe der Produkte, deren Faktoren je eine Kombination der q Elemente $z, z_1, \dots, z_{n-p}$ k -ter Klasse mit Wiederholung bilden. Ist also $|z| < \varrho_1$, so gilt

$$(11) \quad |H_k(z)| < \binom{q+k-1}{k} \varrho_1^k \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

und deshalb

$$|G(z)| \geq |a_p| - [|a_0 H_p(z)| + |a_1 H_{p-1}(z)| + \dots + |a_{p-1} H_1(z)|] > \\ > |a_p| - \left[\binom{n}{p} |a_0| \varrho_1^p + \binom{n-1}{p-1} |a_1| \varrho_1^{p-1} + \dots + |a_{p-1}| \varrho_1 \right] \equiv -\varrho_1^p F_1(r_1) = 0.$$

Damit ist Satz 2 und folglich der erste Teil des Satzes 1 bewiesen.

Um auch den zweiten Teil des Satzes 1 zu beweisen, bemerken wir, daß aus (5) und (10)

$$G(z) = [a_0 H_{p-1}(z) + a_1 H_{p-2}(z) + \dots + a_{p-1} H_0] + \frac{(-1)^{n-p} a_n}{z_1 z_2 \dots z_{n-p}}$$

folgt. Liegen nun die Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_{n-p}$ des Polynoms $g(z)$ im Kreise

$$|z| \leq \varrho_2 = \frac{1}{r_2} \text{ und ist } |z| < \varrho_2, \text{ so gilt die Ungleichung}$$

$$|G(z)| > \frac{|a_n|}{\varrho_2^{n-p}} - \varrho_2 \left[\binom{n-1}{p-1} |a_0| \varrho_2^{p-1} + \binom{n-2}{p-2} |a_1| \varrho_2^{p-2} + \dots + \binom{q}{1} |a_{p-2}| \varrho_2 + |a_{p-1}| \right] \equiv \\ \equiv \varrho_2^p F_2(r_2) = 0.$$

Daraus folgt die Richtigkeit des zweiten Teiles vom Satz 2.

(Eingegangen am 4. September 1950.)