

Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen.

Von J. SZÉP in Szeged.

Bezeichne $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe mit dem Einselement E . Gilt für zwei echte Untergruppen $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$

$$(1) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K},$$

so nennen wir (1) eine (echte) Faktorisierung von $\mathfrak{G}$. Gibt es eine solche, so nennen wir selbst $\mathfrak{G}$ *faktorisierbar*. (1) soll bedeuten, daß die Produkte HK ($H \in \mathfrak{H}, K \in \mathfrak{K}$) alle Elemente von $\mathfrak{G}$ (mindestens einmal) darstellen. Dabei erscheint jedes Element von $\mathfrak{G}$ genau einmal als HK dann und nur dann, wenn $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = E$ gilt, insbesondere also gewiß dann, wenn die Ordnungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ relativ prim sind. Übrigens hat (1) bekanntlich stets $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$ zur Folge.

In einer anderen Arbeit¹⁾ haben wir bewiesen, daß die Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ nichteinfach ist, wenn $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ Abelsch sind; sind dabei die Ordnungen dieser beiden Gruppen zueinander prim, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ auflösbar.

In dieser Arbeit werden wir zunächst den folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Ist in einer echten Faktorisierung (1) $\mathfrak{H}$ eine p -Gruppe und $\mathfrak{K}$ eine Gruppe mit Zentrum, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ nichteinfach.²⁾*

Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir dann als Hauptresultat dieser Arbeit den folgenden

Satz 2. *Ist in einer echten Faktorisierung (1) $\mathfrak{H}$ eine p -Gruppe, $\mathfrak{K}$ eine Abelsche Gruppe, und sind die Ordnungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ relativ prim, so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar.*

Zum Beweis gebrauchen wir die folgenden Hilfsätze a) — c):

a) Bekanntlich ist ein Produkt $\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ zweier Untergruppen von $\mathfrak{G}$ dann und nur dann eine Gruppe, wenn $\mathfrak{H}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$ gilt.

¹⁾ J. SZÉP: On factorisable, not simple groups. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **13** (1950), 235—238.

²⁾ Im Spezialfalle, daß zugleich auch $\mathfrak{K}$ eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung ist, ist $\mathfrak{G}$ nach einem bekannten Satz von BURNSIDE sogar auflösbar. (Siehe: A. SPEISER, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, II. Auflage (1927), S. 191, Satz 166.

b) Wenn in einer Faktorisierung (1) die Ordnungen von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ relativ prim sind, so läßt sich jeder Normalteiler $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ in der Form $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ annehmen, wobei $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ Normalteiler von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{K}$ sind.³⁾

c) Hat eine Klasse (von konjugierten Elementen) in einer endlichen Gruppe die Anzahl einer Primzahlpotenz ($\neq 1$), so ist die Gruppe nichteinfach.⁴⁾

Beweis des Satzes 1. Ist $A \neq E$ ein Element des Zentrums von $\mathfrak{K}$, dann ist in $\mathfrak{G}$ die Anzahl der Elemente der Klasse von A eine Potenz ($\neq 1$) von p .⁵⁾ Daher enthält die Gruppe $\mathfrak{G}$ nach c) einen Normalteiler.

Beweis des Satzes 2. Wir nehmen an daß Satz 2 für die Gruppen kleinerer Ordnung als $\mathfrak{G}$ schon bewiesen ist. Es genügt folgendes zu beweisen:

A) Die Gruppe $\mathfrak{G}$ hat einen echten Normalteiler von Primzahlindex.

Hieraus folgt nämlich Satz 2 nach b) sofort durch Induktion.

Bezeichne nunmehr $\mathfrak{H}$ einen echten Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Existenz ja durch Satz 1 gesichert ist. A) folgt unmittelbar aus der Behauptung:

B) Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ ist auflösbar.

Setzen wir nach b) $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$. Beim Beweis von B) unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle I, II:

Fall I: $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}$, $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}$.

Aus den Zerlegungen

$$\mathfrak{H} = \sum_i H_i \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{K} = \sum_j K_j \mathfrak{K}$$

folgen durch Multiplikation mit $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{H}$

$$(2) \quad \mathfrak{H}\mathfrak{K} = \sum_i H_i \mathfrak{H}\mathfrak{K}, \quad \mathfrak{K}\mathfrak{H} = \sum_j K_j \mathfrak{K}\mathfrak{H}.$$

Hiernach berechnet sich:

$$(3) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K} = \mathfrak{H}\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}\mathfrak{H} = \sum_i H_i \mathfrak{H}\mathfrak{K} \cdot \sum_j K_j \mathfrak{K}\mathfrak{H} = \sum_{i,j} H_i K_j \mathfrak{H}\mathfrak{K},$$

wobei berücksichtigt wurde, daß $\mathfrak{H}\mathfrak{K} = \mathfrak{G}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Aus Anzahlbetrachtungen folgt auch, daß die Glieder der letzten Summe verschieden sind.

Auf Grund von

$$\mathfrak{H}\mathfrak{K} = \sum_i H_i \mathfrak{H}\mathfrak{K} = \sum_i \mathfrak{H}\mathfrak{K} H_i = \sum_i \mathfrak{K}\mathfrak{H} H_i = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$$

³⁾ J. Szép: On the structure of groups which can be represented as the product of two subgroups, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12A** (1950), 57–61.

⁴⁾ Das ist ein anderer wohlbekannter Satz von BURNSIDE. Siehe: Speiser²⁾ S. 190, Satz 165.

⁵⁾ Diese Anzahl ist nur dann gleich 1, wenn A ein Element des Zentrums von $\mathfrak{G}$ ist. Dann aber bedürft Satz 1 keines Beweises.

ist $\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{K}}$ nach a) eine Gruppe. Ebenso ist auch $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{H}}$ eine Gruppe. Hieraus und aus (2) und (3) folgt dann, daß die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\bar{\mathfrak{G}}$ das Produkt der beiden Faktorgruppen $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{H}}/\bar{\mathfrak{G}}, \mathfrak{H}\bar{\mathfrak{K}}/\bar{\mathfrak{G}}$ ist. Von diesen beiden Faktorgruppen ist die erste (zusammen mit $\mathfrak{K}$) Abelsch, die zweite (zusammen mit $\mathfrak{H}$) eine p -Gruppe. Auch sind die Ordnungen zueinander prim. Demnach folgt die Richtigkeit von B) in diesem Fall aus unserer Induktionsannahme.

Fall II: $\bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}, \bar{\mathfrak{K}} \subset \mathfrak{K}$ oder $\bar{\mathfrak{H}} \subset \mathfrak{H}, \bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}$.

Jetzt ist die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\bar{\mathfrak{G}}$ Abelsch bzw. eine p -Gruppe, also in beiden Fällen auflösbar, womit der Beweis von B) und zugleich auch der von Satz 2 beendet ist.

(Eingegangen am 27. November 1950.)