Anwendung von p-Vektoren auf derivierte Matrizen.

Von B. GYIRES und O. VARGA in Debrecen.

Eine Matrix n-ter Ordnung $\mathfrak{A}$ kann als geordnetes Schema von n Vektoren $\underset{k)}{a_i}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ eines n-dimensionalen Raumes aufgefaßt werden. Je p dieser Vektoren bestimmen einen p-Vektor. Durch Bildung der $N = \binom{n}{p}$ Kombinationen dieser Vektoren erhält man N p-Vektoren. Ordnet man diese p-Vektoren nach einer im Text (siehe (22)) angegebenen Art zu einem geordneten Schema an, so erhält man die p-te Derivierte von $\mathfrak{A}$, die kurz mit $C_p(\mathfrak{A})$ bezeichnet werden soll.

Ziel dieser Arbeit ist es nun zu zeigen, wie man mit Hilfe von p-Vektoren Sätze über derivierte Matrizen in geometrisch-anschaulicher Weise herleiten kann. Dieser Absicht entspricht es, daß wir nicht darauf abzielten, eine Reihe von neuen Sätzen über derivierte Matrizen herzuleiten, sondern an Hand einiger Beispiele zeigen wollten, wie man umständliche elementare algebraische Betrachtungen durch geometrische Überlegungen ersetzen kann. Trotzdem scheinen Satz 1 und die Umkehrung in Satz 2 neu zu sein.

Im Folgenden setzen wir sämtliche auftretende Größen als reell voraus.

* * *

Ein p-dimensionales Parallelflach — kurz p-Parallelflach — des n-dimensionalen euklidischen Raumes E_n kann durch Angabe eines Punktes p_i und p linear unabhängige Vektoren $\underset{(\varrho)}{a_i}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, p)$ bestimmt werden.

Ergänzen wir die Vektoren $\underset{(\varrho)}{a_i}$ durch $n-p$ Einheitsvektoren $\underset{(1)}{n_i}, \ldots, \underset{(n-p)}{n_i}$, die zu den $\underset{(\varrho)}{a_i}$ und außerdem paarweise untereinander orthogonal sind, zu einem n-Bein, so ist der Inhalt V_p des Parallelflaches, durch den Betrag der Determinante

$$D_p = \left| \underset{(1)}{a_i}, \ldots, \underset{(p)}{a_i}, \underset{(1)}{n_i}, \ldots, \underset{(n-p)}{n_i} \right| \tag{1}$$

erklärt, d. h. es ist

$$V_p = |D_p|. \tag{2}$$

Wegen der Voraussetzung über die Ergänzungsvektoren n_i, können wir das

Quadrat von V_p bei Verwendung der Cauchyschen Multiplikationsformel für rechteckige Matrizen in der Form

$$V_p^2 = \begin{vmatrix} a_i a_i & \cdots & a_i a_i \\ (1)(1) & & (1)(p) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_i a_i & \cdots & a_i a_i \\ (p)(1) & & (p)(p) \end{vmatrix} = |\underset{(\varrho)(\sigma)}{a_i a_i}| = \frac{1}{p!} P_{k_1 \ldots k_p} P_{k_1 \ldots k_p} \tag{3}$$

darstellen. Hier bedeutet $P_{k_1 \ldots k_p}$ die durch

$$P_{k_1 \ldots k_p} = \begin{vmatrix} a_{k_1} & \cdots & a_{k_1} \\ (1) & & (p) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k_p} & \cdots & a_{k_p} \\ (1) & & (p) \end{vmatrix} = |\underset{(\sigma)}{a_{k_1}} \cdots \underset{(\sigma)}{a_{k_p}}| \tag{4}$$

erklärte Determinante, und es ist über nicht eingeklammerte Zeiger, die zweimal vorkommen, von 1 bis n zu summieren.

Liegen zwei p-Parallelflache in parallelen p-dimensionalen Ebenen E_p, so können wir für dieselben eine relative Orientierung einführen, indem wir festsetzen, daß bei Verwendung derselben Ergänzungsvektoren $\underset{(i)}{n_i}$ $(i = 1, \ldots, n-p)$ die beiden p-Parallelflache gleich orientiert sind, falls

$$\operatorname{sign} D_p \operatorname{sign} D'_p = 1 \tag{5}$$

ist, wenn D'_p die für das zweite p-Parallelflach gemäß (1) gebildete Determinante bedeutet. Sind $\underset{(\varrho)}{b_i}$ die das zweite p-Parallelflach aufspannenden Vektoren und wird

$$Q_{k_1 \ldots k_p} = |\underset{(\sigma)}{b_{k_1}} \cdots \underset{(\sigma)}{b_{k_p}}| \tag{6}$$

gesetzt, so ist die Bedingung (5) gleichwertig mit

$$|\underset{(\varrho)(\sigma)}{a_i b_i}| = \frac{1}{p!} P_{k_1 \ldots k_p} Q_{k_1 \ldots k_p} > 0. \tag{7}$$

Unter einem einfachen p-Vektor — da nur solche vorkommen werden, lassen wir die Bezeichnung „einfach“ im Folgenden weg — verstehen wir die durch folgende drei Eigenschaften gekennzeichnete Gesamtheit von p-Parallelflachen [1]):

1) Zwei beliebige p-Parallelflache liegen in parallelen Ebenen E_p.
2) Zwei beliebige p-Parallelflache besitzen den gleichen Inhalt.
3) Zwei beliebige p-Parallelflache sind gleich orientiert.

Bezeichnen wir ein beliebiges p-Parallelflach der Gesamtheit als Repräsentanten des p-Vektors, so folgt aus seiner Definition, daß dasselbe durch die zu einem Repräsentanten gehörigen $N = \binom{n}{p}$ Komponenten $P_{k_1 \ldots k_p}(k_1, \ldots k_p$

[1] Wegen dieser Definition siehe etwa J. A. Schouten und D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. I., (Groningen, 1935), S. 15—18.

durchlaufen sämtliche Kombinationen von 1 bis n) eindeutig bestimmt ist. Ist nämlich ein zweites p-Parallelflach durch $\underset{(\varrho)}{b_i}$ bestimmt, so folgt wegen der Eigenschaft 1), daß

$$\underset{(\varrho)}{b_i} = c_{\varrho\sigma}\underset{(\sigma)}{a_i}, \quad |c_{\varrho\sigma}| \neq 0 \tag{8}$$

ist. Daraus folgt wegen der Definition (4) und (8)

$$Q_{k_1 \dots k_p} = |c_{\varrho\sigma}| P_{k_1 \dots k_p}. \tag{9}$$

Aus den Eigenschaften 2) und 3) folgt daraus, daß

$$|c_{\varrho\sigma}| = 1$$

ist.

Wie für Vektoren im E_n, kann man für zwei p-Vektoren den Cosinus des von ihren eingeschlossenen Winkels definieren. Dieser Winkel wird gleichzeitig den von zwei E_p eingeschlossenen Winkel bestimmen. Wir leiten die diesbezügliche bekannte Formel her[2]), weil wir dazu Bemerkungen anschließen werden, die im Folgenden nötig sind. Die fragliche Definition ist eine einfache Verallgemeinerung der Definition des Cosinus des von zwei Strecken eingeschlossenen Winkels. Sind P und Q die beiden p-Parallelflache, die den Punk p_i gemeinsam haben, dann projizieren wir das p-Parallelflach P auf die Q enthaltende Ebene E_p. Ist $\bar{P}$ das projizierte p-Parallelflach, $V_p(\bar{P})$ sein Inhalt, und $V_p(P)$ derjenige von P, dann soll der Cosinus des von P und Q eingeschlossenen Winkels φ durch

$$\cos\varphi = \frac{V_p(\bar{P})}{V_p(P)} \tag{10}$$

erklärt werden. Aus dem Beweis wird sich ergeben, daß diese Definition sinnvoll ist. Die Projektion $\bar{P}$ von P auf E_p ist dasjenige p-Parallelflach, das von den Projektionen der Vektoren $\underset{(\varrho)}{a_i}$ auf E_p aufgespannt wird. Sind $\underset{(\iota)}{n_i}$ ($\iota = 1, \dots, n-p$) zu E_p senkrechte Vektoren (die nicht Einheitsvektoren sein müßen), die $\underset{(\varrho)}{b_i}$ zu einen n-Bein von linear unabhängigen Vektoren ergänzen, so ergeben sich die projizierten Vektoren $\underset{(\varrho)}{\bar{a}_i}$ aus der Zerlegung

$$\underset{(\varrho)}{a_i} = \sum_{\sigma=1}^{p} c_{\varrho\sigma}\underset{(\sigma)}{b_i} + \sum_{\iota=1}^{n-p} d_{\varrho\iota}\underset{(\iota)}{n_i} \qquad (\varrho = 1, \dots, p) \tag{11}$$

in der Form

$$\underset{(\varrho)}{\bar{a}_i} = \sum_{\sigma=1}^{p} c_{\varrho\sigma}\underset{(\sigma)}{b_i} \qquad (\varrho = 1, \dots, p). \tag{12}$$

---

[2]) Wegen der im folgenden gegebenen Definition des Winkels zweier E_p vgl. B. Segre, Encyclopedie d. Math. Wiss. III., S. 801, für Bivektoren E. Cartan, Lecons sur la géometrie des espaces, 2. Ausgabe (Paris, 1946) insb. S. 9.

Hieraus ergibt sich wegen der Inhaltsformel (3)

$$(13)\qquad V_p^2(\bar{P}) = \frac{1}{p!} P_{k_1 \dots k_p} \bar{P}_{k_1 \dots k_p} = \frac{1}{p!} Q_{k_1 \dots k_p} Q_{k_1 \dots k_p} = |c_{\varrho\sigma}|^2 V_p^2(Q).$$

Multiplizieren wir (11) skalar mit $\underset{(\sigma)}{b_i}$, so folgt hieraus

$$(14)\qquad P_{k_1 \dots k_p} Q_{k_1 \dots k_p} = |c_{\varrho\sigma}| \, Q_{k_1 \dots k_p} Q_{k_1 \dots k_p}.$$

Aus (10) folgt nun wegen (13) und (14)

$$(15)\quad \cos\varphi = \frac{P_{k_1 \dots k_p} Q_{k_1 \dots k_p}}{\sqrt{P_{k_1 \dots k_p} P_{k_1 \dots k_p}} \sqrt{Q_{k_1 \dots k_p} Q_{k_1 \dots k_p}}} = \frac{\sum\limits_{(k_1, \dots, k_p)} P_{k_1 \dots k_p} Q_{k_1 \dots k_p}}{\sqrt{\sum\limits_{(k_1, \dots, k_p)} P_{k_1 \dots k_p}^2} \sqrt{\sum\limits_{(k_1, \dots, k_p)} Q_{k_1 \dots k_p}^2}}.$$

Die eingeklammerten Zeiger unter dem Summenzeichen Σ bedeuten, daß $k_1, \dots, k_p$ sämtliche Kombinationen der Zahlen von 1 bis n durchlaufen. Durch Formel (15) ist nun auch der Cosinus der beiden p-Vektoren erklärt, für die P und Q je einen Repräsentanten bilden. Da (15) genau von der Form ist, wie die entsprechende Definition für Vektoren in einem N-dimensionalen Raum, so folgt auch hier, daß der absolute Betrag der rechten Seite von (15) höchstens gleich eins ist. Auf Grund der Formel (9) folgt, daß (15) unabhängig von der Wahl der p-Vektoren in ihrer E_p ist, sodaß (15) auch den Cosinus des Winkels der beiden E_p definiert. Der in Zähler von (15) auftretende Ausdruck

$$\sum_{(k_1, \dots, k_p)} P_{k_1 \dots k_p} Q_{k_1 \dots k_p}$$

soll als das skalare Produkt der beiden p-Vektoren bezeichnet werden. Untersuchen wir jetz noch den Fall, für den dieses skalare Produkt verschwinden, also nach (15)

$$(16)\qquad \cos\varphi = 0$$

ist. Wir behaupten, daß in diesem Falle in der linearen Vektormannigfaltigkeiten $\underset{(\varphi)}{a_i}$ mindestens eine eindimensionale Teilmannigfaltigkeit existiert, die zur Vektormannigfaltigkeit $\underset{(\varphi)}{b_i}$ senkrecht ist. Genauer beweisen wir folgenden

Hilfssatz: *Sind unter den p-Vektoren $\underset{(\varphi)}{\bar{a}_i}$, die die Projektionen von $\underset{(\varphi)}{a_i}$ auf die von den $\underset{(\varphi)}{b_i}$ bestimmte E_p bilden, $k \leqq p$ linear unabhängig, dann gibt es in der Vektormannigfaltigkeit $\underset{(\varphi)}{a_i}$ eine $(p-k)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, die zu der von $\underset{(\varphi)}{b_i}$ orthogonal ist. Dann und nur dann verschwindet $\cos\varphi$, falls $k < p$ ist.*

Beweis. Aus (12) folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der $\underset{(\varphi)}{b_i}$, daß es unter den Vektoren $\underset{(\varphi)}{\bar{a}_i}$ dann und nur dann k linear unabhängige gibt,

falls der Rang von

$$\|c_{\varrho\lambda}\| \tag{17}$$

gleich k ist. Ist $k<p$, dann verschwindet $\cos\varphi$ wegen (10) und (13). Umgekehrt zieht das Verschwinden von $\cos\varphi$ wegen (14) und $V_p(Q)\neq 0$ die Ungleichung $k<p$ nach sich. Sind $\underset{(1)}{\bar{a}_i}, \underset{(2)}{\bar{a}_i}, \ldots, \underset{(k)}{\bar{a}_i}$ die k linear unabhängigen unter den Vektoren $\underset{(\varrho)}{\bar{a}_i}$, dann gilt

$$\underset{(\varrho'')}{\bar{a}_i} = \sum_{\varrho'=1}^{k} \lambda_{\varrho''\varrho'} \underset{(\varrho')}{\bar{a}_i} \qquad (\varrho''=k+1,\ldots,p). \tag{18}$$

Die von den $\underset{(\varrho)}{a_i}$ bestimmte lineare Vektormannigfaltigkeit läßt sich auch durch die

$$\begin{aligned} \underset{(\varrho')}{a_i^*} &= \underset{(\varrho')}{a_i} && (\varrho'=1,\ldots,k)\\ \underset{(\varrho'')}{a_i^*} &= \sum_{\varrho'=1}^{k} \lambda_{\varrho''\varrho'} \underset{(\varrho')}{a_i} - \underset{(\varrho'')}{a_i} && (\varrho''=k+1,\ldots,p) \end{aligned} \tag{19}$$

bestimmten Vektoren festlegen, da die Determinante der Vektortransformationen (19) von Null verschieden ist. Zerlegen wir nun die Vektoren $\underset{(\varrho)}{a_i^*}$ nach dem n-Bein $\underset{(\varrho)}{b_i}, \underset{(\tau)}{n_i}$ $(\varrho=1,\ldots,p;\ \tau=1,\ldots,n-p)$, so folgt aus (11), (18) und (19)

$$\begin{aligned} \underset{(\varrho')}{a_i^*} &= \sum_{\varrho=1}^{p} c_{\varrho'\varrho} \underset{(\varrho)}{b_i} + \sum_{\tau=1}^{n-p} d_{\varrho'\tau} \underset{(\tau)}{n_i} && (\varrho'=1,\ldots,k)\\ \underset{(\varrho'')}{a_i^*} &= \sum_{\tau=1}^{k-p} \left(\sum_{\varrho'=1}^{p} \lambda_{\varrho''\varrho'} d_{\varrho'\tau} \right) \underset{(\tau)}{n_i} && (\varrho''=k+1,\ldots,p). \end{aligned} \tag{20}$$

Die zweite Gruppe dieser Relationen besagt aber, daß die lineare Vektormannigfaltigkeit der $\underset{(\varrho)}{a_i}$ eine $(p-k)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit enthält, die zu derjenigen der $\underset{(\varrho)}{b_i}$ orthogonal ist. Damit ist der Beweis der Hilfsatzes beendet.

Legen wir unter den $N=\binom{n}{p}$ Kombinationen von n Elementen p-ter Klasse eine willkürliche aber feste Reihenfolge fest, dann ist die p-te Derivierte $C_p(\mathfrak{A})$ der quadratischen Matrix n-ter Ordnung $\mathfrak{A}$, diejenige Matrix N-ter Ordnung, in deren i-ter Zeile und j-ter Spalte als Element diejenige Unterdeterminante p-ter Ordnung von $\mathfrak{A}$ auftritt, deren Zeilen und Spalten durch die i-te bzw. j-te Kombination der festgelegten Reihenfolge bestimmt ist.

Ordnet man der Matrix $\mathfrak{A}$ diejenigen n Vektoren zu, deren Komponenten durch die Spalten der Matrix gebildet werden, was durch die Schreibweise

$$\mathfrak{A} = \|\underset{(1)}{a_i}, \ldots, \underset{(n)}{a_i}\| \tag{21}$$

angedeutet werden soll, dann wird die p-te Derivierte $C_p(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ in

folgender Weise mit Hilfe der zu je p dieser Vektoren gehörigen p-Vektoren darstellbar:

Ordnet man die p-Vektoren entsprechend der festgesetzten Reihenfolge der Kombinationen der $\overset{(k)}{a_i}$ an, dann wird diejenige Matrix N-ter Ordnung, die man erhält, indem man jedem p-Vektor sein Komponentensystem $\overset{(S)}{P}_{k_1 \dots k_p}$ $(S = 1, \dots, N)$ in der Reihenfolge der Kombinationen der $k_1, \dots, k_p$ als Spalte zuordnet, gerade die p-te Derivierte $C_p(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$.

Wir bringen diese Darstellung von $C_p(\mathfrak{A})$ durch die Schreibweise

$$C_p(\mathfrak{A}) = \| \overset{(1)}{P}_{k_1 \dots k_p}, \overset{(2)}{P}_{k_1 \dots k_p}, \dots, \overset{(N)}{P}_{k_1 \dots k_p} \| \tag{22}$$

zum Ausdruck.

Wir beweisen nun den

Satz 1. *Die p-te Derivierte einer Matrix $\mathfrak{A}$ bestimmt dieselbe eindeutig, falls p ungerade ist, d. h. aus*

$$C_p(\mathfrak{A}) = C_p(\mathfrak{B}) \tag{23}$$

folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Ist hingegen p gerade, so folgt aus (23) $\mathfrak{A} = \pm \mathfrak{B}$.

Beweis. Die Beziehung (23) bedeutet, daß in der Darstellung der beiden Matrizen in der Form (22) an gleicher Stelle stehende p-Vektoren gleich sind. Ist

$$\mathfrak{B} = \| \underset{(1)}{b_i}, \dots, \underset{(n)}{b_i} \|,$$

so muß nach Eigenschaft 1) der p-Vektoren die von den $\underset{(k_1)}{b_i}, \dots, \underset{(k_p)}{b_i}$ aufgespannte lineare Vektormannigfaltigkeit mit der von den $\underset{(k_1)}{a_i}, \dots, \underset{(k_p)}{a_i}$ aufgespannten identisch sein, d. h. es muß jede der beiden Gruppen von Vektoren durch die andere linear kombinierbar sein. Halten wir $\underset{(k_1)}{a_i}$ fest und bestimmen diejenigen $p-1$ linearen Vektormannigfaltigkeiten, bei denen sich die Basisvektoren von denjenigen von $\underset{(k_1)}{a_i}, \underset{(k_2)}{a_i}, \dots, \underset{(k_p)}{a_i}$ im 2-ten, 3-ten, bzw. p-ten Vektor unterscheiden und bestimmen dieselben Vektormannigfalfigkeiten mit den $\underset{(\varrho)}{b_i}$, dann folgt bei Vergleichung von je zwei dieselbe Mannigfaltigkeit bestimmenden Systemen von Basisvektoren, daß

$$\underset{(k_1)}{b_i} = c_{k_1} \underset{(k_1)}{a_i} \qquad \text{(nicht summieren über } k_1\text{!)} \tag{24}$$

sein muß. Da k_1 beliebig war, gilt dies somit für sämtliche Vektoren. Aus der Eigenschaft 2) der p-Vektoren folgt wegen (3) und (9), daß

$$(c_{k_1} c_{k_2} \cdots c_{k_p})^2 = 1$$

für jede Kombination $k_1, \dots, k_p$ der Zahlen von 1 bis n ist, was mit

$$c_1^2 = c_2^2 = \cdots = c_k^2 = 1$$

gleichbedeutend ist. Es kann daher bloß

$$\underset{(r)}{b_i} = \pm \underset{(r)}{a_i} \tag{25}$$

sein.

Nach der 3-ten Eigenschaft der p-Vektoren folgt aus Gleichung (1), daß die Gleichheit von zwei p-Vektoren erhalten bleibt, falls eine gerade Anzahl von Vektoren entgegengesetzt orientiert wird. Beachten wir die Bildung sämtlicher p-Vektoren aus den $\underset{(k)}{b_i}$, so folgt, daß für ungerades p auf der rechten Seite von (25) nur das positive Vorzeichen in Betracht kommt. Ist hingegen p gerade, dann kann

$$\underset{(r)}{b_i} = + \underset{(r)}{a_i}$$

und

$$\underset{(r)}{b_i} = - \underset{(r)}{a_i}$$

sein. Damit ist aber der Beweis von Satz 1 erbracht.

Als nächstes zeigen wir:

Mit $\mathfrak{A}$ ist auch $C_p(\mathfrak{A})$ regulär und umgekehrt.

Damit ist gleichbedeutend, daß mit $\mathfrak{A}^{-1}$ auch $C_p(\mathfrak{A})^{-1}$ existiert und umgekehrt.

Zum Beweis konstruieren wir $C_p(\mathfrak{A})^{-1}$. Die Existenz von $\mathfrak{A}^{-1}$ bedeutet, daß das zu $\underset{(k)}{a_i}$ adjungierte n-Bein $\underset{(k)}{b_i}$ existiert, für das

$$\underset{(k)\,(s)}{a_i\, b_i} = \delta_{k\,s} \tag{26}$$

gilt. Diese beiden n-Beine bilden zwei zueinander polare n-Kanten, da z. B. die „Kante“ $\underset{(1)}{b_i}$ zu der aus den $\underset{(2)}{a_i}, \ldots, \underset{(n)}{a_i}$ gebildeten $(n-1)$-dimensionalen Seite des n-Kantes der $\underset{(k)}{a_i}$ senkrecht steht. Wir bilden nun aus den $\underset{(k)}{b_i}$ die N p-Vektoren $\overset{(S)}{Q}_{k_1 \ldots k_p} (S = 1, \ldots, N)$ und bestimmen mit ihnen, enstprechend der Darstellung (22), die p-te Derivierte der Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$. Zwei p-Vektoren, die zu $C_p(\mathfrak{A})$ bzw. $C_p(\mathfrak{A}^{-1})$ gehören, aber in der angegebenen Reihenfolge nicht die gleiche Nummer besitzen, sind offensichtlich zueinander orthogonal, d. h. es gilt

$$\sum_{(i_1, \ldots, i_k)} \overset{(S)}{P}_{i_1 \ldots i_k} \overset{(R)}{Q}_{i_1 \ldots i_k} = 0, \; R \neq S. \tag{27}$$

Ist hingegen $R = S$, dann wird wegen (26) und (27)

$$\sum_{(i_1, \ldots, i_k)} \overset{(S)}{P}_{i_1 \ldots i_k} \overset{(S)}{Q}_{i_1 \ldots i_k} = 1. \tag{28}$$

(27) und (28) besagt gerade, daß

$$C_p(\mathfrak{A}^{-1}) = C_p(\mathfrak{A})^{-1} \tag{29}$$

ist. Existiert umgekehrt $C_p(\mathfrak{A})^{-1}$, dann muß

$$|C_p(\mathfrak{A})| \neq 0$$

sein. Daraus folgt aber, daß das n-Bein $\underset{(\varrho)}{a_i}$ der Matrix $\mathfrak{A}$ aus linear unabhängigen Vektoren besteht, da ja im entgegengesetzten Falle wegen (8) mindestens zwei Spalten proporzional wären.

Als nächstes beweisen wir den

Satz 2. *Mit $\mathfrak{A}$ ist auch ihre p-te Derivierte orthogonal und umgekehrt.*

Der erste Teil dieses Satzes ist bekannt[3]) und kann mit Hilfe unserer Überlegungen so gefolgert werden. Da die $\underset{(k)}{a_i}$ ein normiertes orthogonales n-Bein bilden, so folgt aus der Inhaltsformel (3)

$$\sum_{(k_1, \ldots, k_p)} \overset{(S)}{P}_{k_1 \ldots k_p} \overset{(S)}{P}_{k_1 \ldots k_p} = 1. \tag{30}$$

Ist hingegen $R \neq S$, dann folgt aus unserem Hilfssatz und der Orthogonalität der $\underset{(k)}{a_i}$

$$\sum_{(k_1, \ldots, k_p)} \overset{(R)}{P}_{k_1 \ldots k_p} \overset{(S)}{P}_{k_1 \ldots k_p} = 0. \tag{31}$$

(30) und (31) sind die Orthogonalitätsbedingungen der Matrix (22). Setzen wir nun umgekehrt voraus, daß $C_p(\mathfrak{A})$ orthogonal ist, d. h. (30) und (31) gilt. Betrachten wir nun die beiden p-Vektoren, die durch

$$(\gamma) \qquad \underset{(1)}{a_i}, \underset{(2)}{a_i}, \ldots, \underset{(p)}{a_i},$$

bzw.

$$(\delta) \qquad \underset{(1)}{a_i}, \ldots, \underset{(p-1)}{a_i}, \underset{(\tau)}{a_i} \qquad (p+1 \leqq \tau \leqq n)$$

bestimmt sind. Da die beiden p-Vektoren orthogonal sind, und die linearen Vektormannigfaltigkeiten (γ) und (δ) $p-1$ linear unabhängige Vektoren gemeinsam haben, so ist die lineare Teilmannigfaltigkeit von (δ), die gemäß des Hilfsatzes zu der von (γ) orthogonal ist, eindimensional, d. h. sie ist durch $\underset{(\tau)}{a_i}$ bestimmt. Die Vektoren der Gruppe (γ) und die Vektoren

$$(\varepsilon) \qquad \underset{(p+1)}{a_i}, \ldots, \underset{(n)}{a_i}$$

sind daher paarweise zueinander orthogonal. Durch entsprechende Wahl von zwei neuen p-Vektoren folgt aber, daß auch die Vektoren der Gruppe (γ) und (ε) untereinander paarweise orthogonal sind. Die $\underset{(k)}{a_i}$ bilden also ein orthogonales n-Bein. Daß sie auch Einheitsvektoren sind, sieht man folgen-

[3]) Siehe z. B. E. Pascal: Repetitorium der höheren Mathematik. I. 1., 2. Aufl. (Berlin, 1910), S. 139, wo die erste Hälfte von unserem Satz 2 aus Lehrsätzen I und IV unmittelbar folgt.

dermaßen ein. Sind $\underset{(k)}{e_i}$ Einheitsvektoren, für die

(32) $$\underset{(k)}{a_i} = c_k \underset{(k)}{e_i} \qquad \text{(nicht summieren über } k\text{!)}$$

ist, dann folgt aus (23), (9) und dem Umstand, daß die $\underset{(k)}{e_i}$ Einheitsvektoren sind, daß

(33) $$(c_{k_1} c_{k_2} \ldots c_{k_p})^2 = 1$$

ist für jede Kombination p-ter Klasse $k_1, \ldots, k_p$ der Zahlen von 1 bis n. Daraus folgt aber

$$c_k = \pm 1,$$

womit der Beweis von Satz 2 zu Ende geführt is.

(Eingangen am 15. September 1951.)