

Verallgemeinerung eines Determinantensatzes von J. Hunyady.

Von B. GYIRES in Debrecen.

An S. 384 der *Nouvelles Annales de Mathématique* (Ser. III., Vol. 1, 1882) hat J. HUNYADY den folgenden Satz ausgesprochen:¹⁾

Bezeichnet A' die transponierte Matrix einer regulären quadratischen Matrix A n -ter Ordnung ($n \geq 2$) und ist Δ die adjungierte Determinante der Determinante $D = |A \pm A'|$, so gilt

$$\Delta = |A|^{n-2} D.$$

Als Verallgemeinerung dieses Satzes beweisen wir nun den folgenden

Satz. Bezeichnet $C_k(A)$ ($1 \leq k \leq n-1$) die k -te derivierte Matrix²⁾ einer beliebigen quadratischen Matrix A n -ter Ordnung ($n \geq 2$) und A' die transponierte Matrix von A , so gilt

$$(1) \quad |C_k(A) \parallel C_{n-k}(A) \pm C_{n-k}(A')| = |C_{n-k}(A) \parallel C_k(A) \pm C_k(A')|.$$

Beweis. Sei $\bar{C}_k(A)$ die Konjugierte von $C_k(A)$, d. h. die Matrix

$$(2) \quad \bar{C}_k(A) = C_{n-k}(\varepsilon) C_{n-k}(A) C_{n-k}(\varepsilon),$$

wobei ε eine orthogonale Diagonalmatrix mit der Diagonale $+1, -1, +1, -1, \dots$ bezeichnet. Dann gilt bekanntlich

$$(3) \quad C_k(A) \bar{C}_k(A') = \bar{C}_k(A) C_k(A') = |A| (1)_{\binom{n}{k}},$$

mit einer Einheitsmatrix $(1)_{\binom{n}{k}}$ $\binom{n}{k}$ -ter Ordnung. Multiplizieren wir (1) mit

¹⁾ An der oben zitierten Stelle wird von HUNYADY die Regularität der Matrix A nicht verlangt, obwohl der Satz ohne diese Bedingung im allgemeinen nicht mehr gültig ist. Dies zeigt das Beispiel der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

durch eine elementare Rechnung.

²⁾ Bzgl. der Definition und der verwendeten Eigenschaften der derivierten Matrix siehe z. B. I. H. M. WEDDERBURN, *Lectures on matrices* (New York, 1934), Kapitel V.

$|C_{n-2}(\varepsilon)|^2 = 1$, dann ergibt sich mit Rücksicht auf (2)

$$(4) \quad |C_k(A)| |\bar{C}_k(A) \pm \bar{C}_k(A')| = |\bar{C}_k(A)| |C_k(A) \pm C_k(A')|.$$

Daraus erhält man auf Grund von (2) die Gleichung

$$|C_k(A) \bar{C}_k(A) \pm |A|(1)_{(k)}| = |\bar{C}_k(A) C_k(A) \pm |A|(1)_{(k)}|.$$

Es folgt umgekehrt aus dieser evidenten Gleichung³⁾ in ähnlicher Weise die Richtigkeit von (1).

Ist A regulär und $k=1$, so drückt (1) den oben angeführten Satz von HUNYADY aus.

(Eingegangen am 1. Oktober, 1952.)

³⁾ Siehe z. B. R. ZURMÜHL, Matrizen (Berlin, 1950), S. 132, Satz 9.