

Sur les espaces V_4 ayant comme groupe de stabilité un G_4 .

Par G. VRANCEANU à Bucarest.

§ 1.

On sait que les espaces de Riemann V_n ont un groupe de mouvement ayant au plus $n(n+1)/2$ paramètres et ce maximum est atteint seulement pour les espaces à courbure constante. Le groupe de stabilité d'un point 0 d'un tel espace possède $n(n-1)/2$ paramètres et ce groupe a la propriété de conserver une forme quadratique définie positive.

Si le point 0 est l'origine des coordonnées $0(x^1 = \dots = x^n = 0)$ et si $x^1, \dots, x^n$ sont des coordonnées normales, le groupe de stabilité est le groupe des rotations de l'origine, donc il est généré par les transformations infinitésimales

$$(1) \quad X_{pq} = x^p \frac{\partial f}{\partial x^q} - x^q \frac{\partial f}{\partial x^p} \quad (p < q).$$

Supposons maintenant qu'on considère un espace V_n dont le groupe de stabilité de l'origine est le groupe (1). On peut voir facilement que la métrique d'un tel espace doit être de la forme

$$(2) \quad ds^2 = \alpha[(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2] + \beta[x^1 dx^1 + \dots + x^n dx^n]^2$$

où α, β sont fonctions de $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$. En effet il est évident que la métrique (2) possède le groupe (1), car les trois expressions

$$(3) \quad (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2; (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2; x^1 dx^1 + \dots + x^n dx^n$$

qui interviennent dans cette métrique, sont invariants du groupe (1). Inversement, comme ces expressions sont pour $n > 2$ les seuls invariants de ce groupe,¹⁾ la métrique de l'espace doit être de la forme (2).

Le groupe (1) est évidemment un groupe intransitif et ses variétés d'intransitivité sont les hypersphères

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = c,$$

où c est une constante. Le groupe (1) peut être le groupe complet de l'espace (2), ou bien il peut être un sousgroupe de ce groupe. Dans ce dernier cas

¹⁾ H. WEYL, Classical groups, Princeton, 1939, p. 31.

le groupe complet des transformations de l'espace (2) est transitif, car un groupe intransitif ne peut pas avoir plus de $n(n-1)/2$ paramètres.²⁾ Le groupe étant transitif, il en résulte alors que l'espace (2) est à courbure constante.

Si un espace V_n n'est pas à courbure constante, d'après un résultat de Fubini, de 1903, il ne peut pas avoir un groupe ayant $n(n+1)/2 - 1$ paramètres, donc un paramètre de moins que les espaces à courbure constante.

Le résultat de FUBINI a été précisé par EGOROFF,³⁾ qui a montré qu'un espace V_n , qui n'est pas d'EINSTEIN, possède un groupe ayant au plus $n(n-1)/2 + 1$ paramètres et ce maximum est atteint, comme nous montre l'exemple d'un espace V_n dont la métrique s'écrit

$$(3') \quad ds^2 = (dx^1)^2 + d\sigma^2$$

où $d\sigma^2$ est la métrique d'un espace à courbure constante non nulle, dans les variables $x^2, \dots, x^n$. J'ai montré⁴⁾ que les seuls espaces V_n réductibles, donc en particulier non einsteiniens, qui possèdent un groupe de mouvement à $n(n-1)/2 + 1$ paramètres, sont des espaces qui se réduisent à la forme (3').

Pour les espaces d'EINSTEIN, EGOROFF a montré que le groupe de mouvement peut avoir au plus $n(n-1)/2 + 2$, si la dimension de l'espace est plus grand que 3. J'ai montré⁴⁾ que le nombre $n(n-1)/2 + 2$ peut être diminué de $n-4$ unités, donc on peut considérer comme maximum le nombre $(n-1)(n-2)/2 + 5$. Ce nombre est inférieur au maximum $n(n-1)/2 + 1$ des paramètres d'un espace V_n non einsteinien, sauf le cas $n=4$, quand il surpasse ce maximum d'une unité et le cas où $n=5$, quand ils sont égaux.

On peut donc énoncer le théorème :

Un espace V_n ($n \geq 5$), qui n'est pas à courbure constante, possède au plus un groupe de mouvement ayant $n(n-1)/2 + 1$ paramètres et ce maximum est atteint.

Le théorème est aussi vrai pour $n=3$, comme il en résulte de la classification que BIANCHI a donné aux espaces V_n .

Dans le cas $n=4$ j'ai donné comme exemple un espace symétrique de Cartan défini par les composantes du tenseur de courbure⁴⁾, qui possède un groupe transitif à huit paramètres, donc le théorème ne s'applique pas pour $n=4$.

Nous allons maintenant montrer qu'il n'y a pas d'autres espaces V_4 qui possèdent un G_8 de mouvement. En effet, si le groupe G_8 est transitif, le groupe de stabilité d'un point possède quatre paramètres et nous allons montrer en premier lieu comment on peut former tous les espaces ayant cette propriété.

²⁾ L. BIANCHI, Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni, Bologna, 1928, p. 514.

³⁾ I. P. EGOROFF, *Doklady Akademii Nauk*, 66, (1949), p. 793.

⁴⁾ G. VRANCEANU, Sur les groupes de mouvement des espaces à connexion. *Studii și Cercetări Matematice*, 2 (1951), p. 57.

§ 2.

Les espaces V_4 que nous avons en vue entrent dans une classe générale d'espaces à un nombre pair $n = 2p$ de dimensions dont le groupe de stabilité de l'origine 0, conserve la forme de PFAFF

$$(4) \quad \omega = x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + \dots + x^{2p-1} dx^{2p} - x^{2p} dx^{2p-1}.$$

On voit facilement que les p transformations infinitésimales

$$(5) \quad X_{12}, \dots, X_{2p-1, 2p}$$

conservent la forme ω . Il en est de même des $p(p-1)$ transformations infinitésimales

$$(6) \quad X_{2s-1, 2r} - X_{2s, 2r-1}, \quad X_{2s-1, 2r-1} + X_{2s, 2r}$$

où s, r sont plus petits ou égaux à p .

On peut montrer cela en observant que si l'on désigne par

$$X = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \pi = \lambda_i dx^i$$

une transformation infinitésimale et une forme de PFAFF, la forme π est invariante par la transformation X , si nous avons

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} \xi^j + \lambda_j \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0,$$

ou comme on dit encore si la dérivée de Lie du vecteur λ_i est nulle.

On peut former maintenant avec les trois invariants (3) et l'invariant (4) une métrique

$$(7) \quad ds^2 = \alpha [(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2] + \beta [x^1 dx^1 + \dots + x^n dx^n]^2 + \gamma [x^1 dx^1 + \dots] [x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + \dots] + \delta [x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + \dots]^2$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont fonctions seulement de $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2$. Cette métrique possède alors le groupe de stabilité (5), (6) qui contient p^2 paramètres.

Dans le cas où $n = 2$ donc $p = 1$, l'invariant (4) n'est pas indépendant des invariants (3), car nous avons l'identité

$$(x^1 dx^1 + x^2 dx^2)^2 + (x^1 dx^2 - x^2 dx^1)^2 = [(x^1)^2 + (x^2)^2] \cdot [(dx^1)^2 + (dx^2)^2].$$

Il en résulte que dans le cas $n = 2$ les espaces (2) et (7) coïncident et représentent des espaces de Riemann possédant le groupe à un paramètre

$$x^1 = x^1 \cos \theta - x^2 \sin \theta, \quad x^2 = x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta$$

donc le groupe formé par les rotations autour de l'origine.

Dans le cas $n = 4$, donc $p = 2$, les (7) représentent des espaces V_4 dont le groupe de stabilité de l'origine 0 possède quatre paramètres. D'après un résultat du à S. MEDICI⁵⁾ le groupe G_r des rotations pour $n = 4$ ne peut

⁵⁾ S. MEDICI, Sui gruppi di rotazioni. *Annali della Scuola Normale Superiore, Pisa*, 1908, p. 159.

pas contenir un G_5 et le G_4 qu'il contient peut être défini par les transformations infinitésimales :

$$X_{12}, X_{34}, X_{13} + X_{24}, X_{14} - X_{23},$$

donc il est le groupe de stabilité de l'espace (7), pour $n = 4$.

Nous avons donc le théorème :

Si un espace V_4 possède comme groupe complet de stabilité de l'origine un G_4 , on peut s'arranger de façon que ce G_4 soit défini par les transformations infinitésimales

$$(8) \quad X = X_{12}, Y = X_{34}, U = X_{13} + X_{24}, V = X_{14} - X_{23}$$

abstraction faite éventuellement des termes du second ordre.

Nous avons vu que les espaces V_4 dont la métrique est donnée par la formule (7) possède le groupe G_4 défini par les transformations X, Y, U, V . On peut montrer que ce sont les seuls espaces qui possèdent un G_4 .

§ 3.

En premier lieu on peut montrer qu'on peut s'arranger de façon que les termes du second ordre soient nuls.

Pour cela considérons comme nouvelles coordonnées

$$(9) \quad \begin{aligned} x^1 &= u \cos v \cos \theta, & x^2 &= u \cos v \sin \theta, \\ x^3 &= u \sin v \cos \varphi, & x^4 &= u \sin v \sin \varphi. \end{aligned}$$

Par rapport à ces variables, X_{12}, X_{34} sont des rotations d'angles θ et φ , donc nous avons

$$(10) \quad X = \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

abstraction faite des termes du second ordre.

Quant à U et V elles deviennent dans les mêmes conditions

$$(11) \quad \begin{aligned} U &= \cos(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial v} + \sin(\theta - \varphi) \left[\operatorname{tg} v \frac{\partial f}{\partial \theta} + \operatorname{cotg} v \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] + \dots \\ V &= -\sin(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial v} + \cos(\theta - \varphi) \left[\operatorname{tg} v \frac{\partial f}{\partial \theta} + \operatorname{cotg} v \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] + \dots \end{aligned}$$

Observons maintenant que la composition du groupe (8) est défini par les formules

$$(12) \quad \begin{aligned} (XY) &= 0, & (XU) &= V, & (XV) &= -U, \\ (YU) &= -V, & (YV) &= U, & (UV) &= 2X - 2Y. \end{aligned}$$

Comme X, Y déterminent un groupe abélien, X, Y étant des transformations indépendantes, on peut toujours prendre

$$X = \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

les variables de l'espace étant u, v, θ, φ . Cela fait les autres formules (12) sauf la dernière nous disent qu'on doit avoir

$$\begin{aligned} U &= \cos(\theta - \varphi) N + \sin(\theta - \varphi) M \\ V &= -\sin(\theta - \varphi) N + \cos(\theta - \varphi) M \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} M &= a \frac{\partial f}{\partial u} + b \frac{\partial f}{\partial v} + c \frac{\partial f}{\partial \theta} + d \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ N &= \alpha \frac{\partial f}{\partial u} + \beta \frac{\partial f}{\partial v} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \theta} + \delta \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

les coefficients $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant indépendants de θ, φ . Il en résulte que les transformations X, Y, N constituent un groupe abélien, donc on peut s'arranger de façon à avoir

$$(13) \quad N = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Par conséquent nous avons

$$\begin{aligned} U &= a \sin(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial u} + [b \sin(\theta - \varphi) + \cos(\theta - \varphi)] \frac{\partial f}{\partial v} + \\ &\quad + c \sin(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial \theta} + d \sin(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \\ V &= a \cos(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial u} + [b \cos(\theta - \varphi) - \sin(\theta - \varphi)] \frac{\partial f}{\partial v} + \\ &\quad + c \cos(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial \theta} + d \cos(\theta - \varphi) \frac{\partial f}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Si l'on impose à U et V la dernière condition (12) on trouve les conditions:

$$\begin{aligned} a_e - ac + ad &= 0, & b_e - bc + bd &= 0 \\ c_e - c^2 + cd &= 2, & d_e - cd + d^2 &= -2. \end{aligned}$$

Les premières nous donnent en supposant $a \neq 0, b \neq 0$

$$\frac{a_e}{a} = \frac{b_e}{b} = c - d$$

donc $b = ka$, ou k est une constante. De même en posant $c - d = 2\alpha, cd = \beta$, les secondes s'écrivent

$$\alpha_e = 2(1 + \alpha^2), \quad \beta_e = 4\alpha(\beta - 1).$$

Nous avons en ajoutant éventuellement à v une constante,

$$\alpha = -\cotg 2v, \quad \beta = 1 + m(\sin 2v)^{-2}, \quad a = n(\sin 2v)^{-1}$$

où m et n sont des constantes. On peut donc prendre

$$c = \tg v + p, \quad d = \cotg v + p$$

où p est défini par la formule

$$(14) \quad p = \frac{1}{\sin 2v} (-1 \pm \sqrt{1+m}).$$

Il en résulte que nous avons les valeurs de U, V données par les formules (8) si $a = b = p = 0$. Autrement on ajoute à U par exemple, l'expression

$$\frac{\sin(\theta - \varphi)}{2 \sin v \cos v} \left[n \left(\frac{\partial f}{\partial u} + k \frac{\partial f}{\partial v} \right) + (-1 \pm \sqrt{1+m}) \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right].$$

Mais nous avons

$$\frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin v \cos v} = \frac{x^2 x^3 - x^1 x^4}{u^2 \sin^2 v \cos^2 v} = \frac{u^2 (x^2 x^3 - x^1 x^4)}{[(x^1)^2 + (x^2)^2][(x^3)^2 + (x^4)^2]}$$

où $u^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^4)^2$.

En tenant compte des valeurs des $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \varphi}$ à l'aide de variables x^1, x^2, x^3, x^4 , on voit facilement que cette expression n'est pas du premier ordre à l'origine, ses coefficients devenant infinis. Donc nous avons le théorème :

Les quatre transformations infinitésimales du groupe de stabilité ayant la structure (12) peuvent toujours être considérées comme données par les formules (8).

§ 4.

Pour qu'une métrique dans les variables θ, φ, u, v admette les transformations infinitésimales X, Y , il faut qu'elle soit de la forme

$$(15) \quad \begin{aligned} ds^2 = & a_{11} du^2 + 2a_{12} du d\theta + 2a_{13} du dv + 2a_{14} du d\varphi + \\ & + a_{22} d\theta^2 + 2a_{23} d\theta dv + 2a_{24} d\theta d\varphi + a_{33} dv^2 + \\ & + 2a_{34} dv d\varphi + a_{44} d\varphi^2 \end{aligned}$$

où les coefficients a_{ij} ne dépendent pas des variables θ, φ .

Pour que cette métrique admette une transformation infinitésimale $\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$, il faut que les a_{ij} satisfassent aux conditions de KILLING

$$\xi^\lambda \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^\lambda} + a_{i\lambda} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^k} + a_{k\lambda} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^i} = 0,$$

ou, comme on dit encore, il faut que la dérivée de Lie de a_{ij} à l'aide de ξ^λ soit nulle.

Si l'on considère comme transformation infinitésimale la transformation U et l'on donne comme indices 1, 2, 3, 4 aux variables u, θ, v, φ , nous avons, en tenant compte du fait que a_{ij} ne dépendent pas de θ et φ

$$(16) \quad \cos(\theta - \varphi) \frac{\partial a_{ik}}{\partial v} + a_{i\lambda} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^k} + a_{k\lambda} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^i} = 0.$$

Comme les coefficients de U ne dépendent pas de u , nous avons pour $i = k = 1$.

$$(16') \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial v} = 0.$$

De même en tenant compte que $\xi^1 = 0$ et que ξ^3 ne dépend pas de v , nous avons pour $i = k = 3$:

$$\cos(\theta - \varphi) \frac{\partial a_{33}}{\partial v} + 2 \left(\frac{a_{23}}{\cos^2 v} - \frac{a_{34}}{\sin^2 v} \right) \sin(\theta - \varphi) = 0.$$

Cette relation, en tenant compte que a_{ij} ne dépendent pas de θ et φ , nous donne

$$(17) \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial v} = 0, \quad \frac{a_{23}}{\cos^2 v} - \frac{a_{34}}{\sin^2 v} = 0.$$

Si l'on donne à i et k la valeur 2, on obtient

$$(18) \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial v} + 2a_{22} \operatorname{tg} v + 2a_{24} \operatorname{cotg} v = 0, \quad a_{23} = 0,$$

donc nous avons aussi $a_{34} = 0$, en vertu de la seconde équation (17).

Si $i = k = 4$, nous avons

$$(19) \quad \frac{\partial a_{44}}{\partial v} - 2a_{24} \operatorname{tg} v - 2a_{44} \operatorname{cotg} v = 0.$$

Enfin pour $i = 1, k = 2$ nous avons

$$(20) \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial v} + a_{12} \operatorname{tg} v + a_{14} \operatorname{cotg} v = 0, \quad a_{13} = 0;$$

pour $i = 1, k = 3$ et $i = 1, k = 4$, nous avons

$$(21) \quad \frac{a_{12}}{\cos^2 v} - \frac{a_{14}}{\sin^2 v} = 0, \quad \frac{\partial a_{14}}{\partial v} - a_{12} \operatorname{tg} v - a_{14} \operatorname{cotg} v = 0;$$

pour $i = 2, k = 3$ et $i = 3, k = 4$ nous avons

$$(22) \quad \frac{a_{22}}{\cos^2 v} - \frac{a_{24}}{\sin^2 v} - a_{33} = 0, \quad \frac{a_{24}}{\cos^2 v} - \frac{a_{44}}{\sin^2 v} + a_{33} = 0,$$

et pour $i = 2, k = 4$ nous avons

$$(23) \quad \frac{\partial a_{24}}{\partial v} - a_{22} \operatorname{tg} v - a_{24} \operatorname{cotg} v + a_{24} \operatorname{tg} v + a_{44} \operatorname{cotg} v = 0.$$

On voit donc que les formules (16'), (17), (18) et (20) nous disent que nous avons

$$a_{13} = a_{23} = a_{34} = 0$$

et que a_{11}, a_{33} sont indépendants de la variable v .

Si l'on pose

$$a_{12} = a \cos^2 v, \quad a_{14} = a \sin^2 v$$

les formules (20) et (21) nous disent que a est une fonction indépendante de v . De même les formules (22) nous disent qu'on peut poser

$$\begin{aligned} a_{24} &= b \sin^2 v \cos^2 v \\ a_{22} &= a_{33} \cos^2 v + b \cos^4 v \\ a_{44} &= a_{33} \sin^2 v + b \sin^4 v \end{aligned}$$

et les formules (19) et (23) nous disent que b est indépendante de v .

On peut écrire la métrique (15) sous la forme

$$(24) \quad \begin{aligned} ds^2 &= a_{11} du^2 + a_{33} dv^2 + 2a du(\cos^2 v d\theta + \sin^2 v d\varphi) \\ &+ a_{33} [\cos^2 v d\theta^2 + \sin^2 v d\varphi^2] + b [\cos^2 v d\theta + \sin^2 v d\varphi]^2 \end{aligned}$$

où les quatre fonctions a_{11} , a_{33} , a et b dépendent seulement de la variable u .

En revenant aux variables x^1, x^2, x^3, x^4 et en tenant compte que nous avons

$$\begin{aligned} u^2 &= (x^1)^2 + \dots + (x^4)^2, \quad u du = x^1 dx^1 + \dots + x^4 dx^4, \\ (dx^1)^2 + \dots + (dx^4)^2 &= du^2 + u^2 dv^2 + u^2 (\cos^2 v d\theta^2 + \sin^2 v d\varphi^2), \\ x^1 dx^2 - x^2 dx^1 &= u^2 \cos^2 v d\theta, \quad x^3 dx^4 - x^4 dx^3 = u^2 \sin^2 v d\varphi, \end{aligned}$$

la métrique (15) s'écrit

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(a_{11} - \frac{a_{33}}{u^2} \right) (x^1 dx^1 + \dots)^2 + \frac{a_{33}}{u^2} [(dx^1)^2 + \dots] + \\ &+ \frac{2a}{u^2} (x^1 dx^1 + \dots) (x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + \dots) + \frac{b}{u^4} (x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + \dots)^2. \end{aligned}$$

Cette métrique est par conséquent de la forme (7).

Nous avons donc le théorème:

Si un espace V_4 admet comme groupe de stabilité de l'origine un groupe G_4 , on peut s'arranger toujours de façon que sa métrique soit de la forme (7).

§ 5.

Il reste maintenant à voir si parmi les espaces (7) il en existe des espaces ayant comme groupe complet de mouvement un G_8 .

Pour cela on montre en premier lieu⁶⁾ que le $G_4 = (X, Y, U, V)$ peut être contenu dans un G_8 transitif défini par les transformations infinitésimales X, Y, U, V et quatre transformations

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \dots \quad (i = 1, \dots, 4)$$

où les termes non écrits sont au moins du premier ordre. Un tel groupe peut être réduit à avoir la structure définie par les formules (12) et les

⁶⁾ G. VRANCEANU, Sur les groupes de mouvement d'un V_4 . *Studii și Cercetări Matematice*, 4 (1953).

formules :

$$\begin{aligned}
 (A_1 A_2) &= -4\lambda X - 2\lambda Y, (A_1 A_3) = -\lambda U, (A_1 A_4) = -\lambda V \\
 (A_2 A_3) &= \lambda V, (A_2 A_4) = -\lambda U, (A_3 A_4) = -2\lambda X - 4\lambda Y \\
 (A_1 X) &= A_2, (A_1 Y) = 0, (A_1 U) = A_3, (A_1 V) = A_4 \\
 (25) \quad (A_2 X) &= -A_1, (A_2 Y) = 0, (A_2 U) = A_4, (A_2 V) = -A_3 \\
 (A_3 X) &= 0, (A_3 Y) = A_4, (A_3 U) = -A_1, (A_3 V) = A_2 \\
 (A_4 X) &= 0, (A_4 Y) = -A_3, (A_4 U) = -A_2, (A_4 V) = -A_1
 \end{aligned}$$

où λ est une constante.

Cette structure nous montre que l'espace V_4 , qui possède le groupe G_8 , comme groupe de mouvement, est un espace symétrique⁷⁾, dont la courbure est donnée par les formules

$$\begin{aligned}
 (26) \quad \gamma_{212}^1 &= 4\lambda, \quad \gamma_{313}^1 = \gamma_{414}^1 = \lambda, \quad \gamma_{234}^1 = 2\lambda, \gamma_{342}^1 = \gamma_{423}^1 = -\lambda \\
 \gamma_{khl}^h &= 0, \quad \gamma_{ehv}^h = \gamma_{\beta\alpha\beta}^\alpha \quad (h \neq k \neq l \neq \alpha \neq \beta),
 \end{aligned}$$

ce qui nous montre que l'espace V_4 est un espace symétrique, que j'avais obtenu précédemment.⁴⁾

Nous avons donc le théorème :

Les seuls espaces V_4 qui possèdent un G_8 transitif de mouvement sont les espaces symétriques (26).

On voit donc qu'en passant d'un V_n ($n \geq 2$) à courbure constante à un V_n à courbure non constante, le nombre des paramètres du groupe de mouvement de l'espace diminue d'au moins $n-1$ unités sauf pour $n=4$, quand la diminution est seulement de $n-2$ unités et le cas $n=2$ quand cette diminution est de n unités, et ces nombres sont atteints, ce qui précise d'une manière complète le résultat de FUBINI de 1903, qui disait que la diminution est d'au moins 2 unités.

(Reçu le 29 octobre 1952.)

⁷⁾ E. CARTAN, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. Bull. de la Soc. Math. de France, 54 (1926), p. 214.