

Über einen speziellen Banachschen Raum.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Es sei $p \geq 1$ ein bestimmter Exponent und es bezeichne L_0^p die Klasse derjenigen Funktionen $f(t) \in L^p[0, 1]$, die im Punkt $x=0$ verschwinden und für die $x=0$ ein Lebesguescher Punkt p -ter Ordnung ist, d. h. für die

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^h |f(t)|^p dt = o(h)$$

gelten. Die Norm einer Funktion $f(t) \in L_0^p$ sei

$$\|f\|_0^{(p)} = \sup_{0 < h \leq 1} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(t)|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Den Banachschen Raum L_0^p haben B. I. KORENBLJUM, S. G. KREJN und B. Ja. LEVIN¹⁾ eingeführt. Sie haben im Falle $p > 1$ die allgemeine Form der linearen Funktionaloperation in L_0^p bestimmt:

Die allgemeine Form der linearen Funktionaloperation $\Phi(t)$ in L_0^p ist

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt,$$

wo für die meßbare Funktion $\varphi(t)$ die Bedingung

$$\int_0^1 [-F'(x)]^{1/q} dx < \infty \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

erfüllt ist, wo $F(x)$ die größte konvexe Funktion bezeichnet, für die

$$F(x) \leq \int_x^1 |\varphi(t)|^q dt \quad (0 < x \leq 1)$$

¹⁾ Б. И. Коренблум, С. Г. Крейн и Б. Я. Левин, О некоторых нелинейных вопросах теории сингулярных интегралов. Доклады Акад. Наук СССР 62 (1948), 17—20.

gilt. Die lineare Funktionaloperation $\Phi(t)$ hat die Norm:

$$\|\Phi\|_0^{(p)} = \int_0^1 [-F'(x)]^{1/q} dx.$$

Wir werden ein analoges Resultat für $p = 1$ beweisen; diesen Fall haben die erwähnten Verfasser nicht eingehend betrachtet. Im folgenden werden wir statt $L_0^1, \|f\|_0^{(1)}, \|\Phi\|_0^{(1)}$ die einfachen Bezeichnungen $L_0, \|f\|_0, \|\Phi\|_0$ anwenden.

Satz. Im Raum L_0 ist jede lineare Funktionaloperation $\Phi(f)$ von der Form

$$(1) \quad \Phi(f) = \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt,$$

wo für die meßbare Funktion $\varphi(t)$ die Bedingung

$$(2) \quad \int_0^1 \psi(t) dt < \infty$$

mit

$$\psi(t) = \text{wes. ob. Gr. } |\varphi(y)| \quad (0 < t \leq 1)$$

erfüllt ist. Es gilt ferner

$$(3) \quad \|\Phi\|_0 = \int_0^1 \psi(t) dt.$$

BEWEIS. Nehmen wir an, daß $\Phi(f)$ eine lineare Funktionaloperation in L_0 ist. Es sei $L_{(n)} \subset L_0$ ($n = 1, 2, \dots$) der lineare Unterraum der Funktionen $f \in L_0$ die im Intervall $[0, 2^{-n}]$ verschwinden. Ist $f \in L_{(n)}$, so gilt

$$\int_{2^{-n}}^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_0 \leq 2^{-n} \int_{2^{-n}}^1 |f(t)| dt,$$

und so existiert eine beschränkte, mit Ausnahme einer Nullmenge eindeutig bestimmte Funktion $\varphi_n(t)$, so daß

$$\Phi(f) = \int_{2^{-n}}^1 f(t) \varphi_n(t) dt$$

für jede $f \in L_{(n)}$ besteht. Wir nehmen $\varphi_n(t) = 0$ für $t \notin [2^{-n}, 1]$ an. Es ist klar, daß $\varphi_m(t) = \varphi_n(t)$ für $t \in [\max(2^{-m}, 2^{-n}), 1]$ fast überall gilt. Es sei

$$\varphi(t) = \sup \varphi_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Die Funktion $\varphi(t)$ ist mit Ausnahme einer Nullmenge eindeutig bestimmt und fast überall endlich.

Es sei $f \in L_0$ und

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [2^{-n}, 1], \\ 0, & t \notin [2^{-n}, 1]. \end{cases}$$

Für die Funktion $f_n \in L_{(n)}$ besteht die Relation

$$\Phi(f_n) = \int_{2^{-n}}^1 f_n(t) \varphi(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Da $\|f_n - f\|_0 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ist, so folgt daraus für jede $f \in L_0$:

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt.$$

Damit haben wir (1) bewiesen.

Da $\varphi(t)$ fast überall endlich ist, so ist $\psi(t)$ im Intervall $(0, 1]$ endlich; ferner ist $\psi(t)$ eine nicht abnehmende, von rechts stetige Funktion. Wir werden die Ungleichung

$$(4) \quad \|\Phi\|_0 \cong \int_0^1 \psi(t) dt$$

beweisen.

Wir können annehmen, daß

$$\int_0^1 \psi(t) dt < \infty$$

ist. Es seien $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ beliebige Zahlen und $0 < a < 1$ eine Zahl, für die

$$(5) \quad \int_0^a \psi(t) dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Es sei ferner $0 < u_1 < \dots < u_n < u_{n+1} = \psi(a)$ eine endliche Zahlenfolge und betrachten wir die Mengen

$$E_0 = E[\psi(t) \leq u_1; a \leq t \leq 1], E_\nu = E[u_\nu < \psi(t) \leq u_{\nu+1}; a \leq t \leq 1] \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Mit geeigneter Wahl von u_ν können wir erreichen, daß die Ungleichungen

$$(6) \quad u_{\nu+1}/u_\nu \leq 1 + \eta \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

und

$$(7) \quad \int_{E_0} \psi(t) dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

bestehen.

Offenbar ist $\bigcup_{\nu=0}^n E_\nu = [a, 1]$ und $E_\nu \cap E_\mu = \emptyset$ ($\nu \neq \mu$). Es seien $E_{\nu_1}, \dots, E_{\nu_l}$ ($\nu_1 < \dots < \nu_l$) diejenige der Mengen E_ν , die nicht leer sind. Da $\psi(t)$ eine von rechts stetige Funktion ist, ist E_{ν_i} ein rechtsseitig halboffenes Intervall: $E_{\nu_i} = [\alpha_{\nu_i}, \beta_{\nu_i})$; ferner bestehen die folgenden Relationen: $a = \alpha_{\nu_l}, \beta_{\nu_l} \leq 1$ und $\alpha_{\nu_i} = \beta_{\nu_{i+1}}$ ($i = 1, \dots, l-1$). Es sei

$$\gamma_{\nu_i} = \max(\alpha_{\nu_i}, \beta_{\nu_i}/(1 + \eta)) \quad (i = 1, \dots, l).$$

Offenbar ist $\gamma_{r_i} \in E_{r_i}$ und

$$(8) \quad \beta_{r_i} \leq (1 + \eta) \gamma_{r_i} \quad (i = 1, \dots, l).$$

Man sieht leicht, daß das Maß der Menge

$$H_{r_i} = E_t[|\varphi(t)| > u_{r_i}, \gamma_{r_i} \leq t \leq \beta_{r_i}] \quad (i = 1, \dots, l)$$

positiv ist. Nach der Definition von β_{r_i} besteht die Ungleichung $\psi(t) \leq u_{r_i}$ für $\beta_{r_i} \leq t \leq 1$, und so gilt $|\varphi(t)| \leq u_{r_i}$ im Intervall $[\beta_{r_i}, 1]$ fast überall; dann ist aber $\psi(\gamma_{r_i}) \leq u_{r_i}$, was wegen $\gamma_{r_i} \in E_{r_i}$ der Definition von E_{r_i} widerspricht.

Es sei

$$f^*(t) = \begin{cases} \text{sign } \varphi(t) \int_{E_{r_i}} \psi(t) dt \left(\int_{H_{r_i}} |\varphi(t)| dt \right)^{-1}, & t \in H_{r_i}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist $f^* \in L_0$, ferner gilt nach (15) und (17)

$$(9) \quad \int_0^1 f^*(t) \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^l \int_{E_{r_i}} \psi(t) dt > \int_0^1 \psi(t) dt - \varepsilon.$$

Für jedes $1 \leq i \leq l$ gilt nach (6) die Ungleichung

$$(10) \quad \begin{aligned} \int_0^{\beta_{r_i}} |f^*(t)| dt &= \sum_{j=1}^l \int_{E_{r_j}} \psi(t) dt \left(\int_{H_{r_j}} |\varphi(t)| dt \right)^{-1} \text{mes } H_{r_j} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^l \frac{a_{r_{j+1}} \text{mes } E_{r_j}}{a_{r_j} \text{mes } H_{r_j}} \text{mes } H_{r_j} \leq (1 + \eta) \sum_{j=1}^l \text{mes } H_{r_j} \leq (1 + \eta) \beta_{r_i}. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Ungleichung werden wir beweisen, daß für jedes $0 < h \leq 1$

$$(11) \quad \int_0^h |f^*(t)| dt < (1 + \eta)^2 h$$

gilt. Ist $0 < h < \gamma_r$, so ist (11) evident, da dieses Integral verschwindet. Ist $\beta_{r_1} \leq h \leq 1$, so erhalten wir nach (10):

$$\int_0^h |f^*(t)| dt = \int_0^{\beta_{r_1}} |f^*(t)| dt \leq (1 + \eta) \beta_{r_1} < (1 + \eta)^2 h.$$

Ist $\alpha_{r_i} \leq h < \gamma_{r_i}$ ($i = 1, \dots, l-1$), so ergibt sich nach (10):

$$\int_0^h |f^*(t)| dt = \int_0^{\alpha_{r_i}} |f^*(t)| dt = \int_0^{\beta_{r_{i+1}}} |f^*(t)| dt \leq (1 + \eta) \beta_{r_{i+1}} < (1 + \eta)^2 h.$$

Ist endlich $\gamma_{r_i} \leq h < \beta_{r_i}$ ($i = 1, \dots, l$), so gilt nach (10) und (8):

$$\int_0^h |f^*(t)| dt < \int_0^{\beta_{r_i}} |f^*(t)| dt < (1 + \eta) \beta_{r_i} \leq (1 + \eta)^2 \gamma_{r_i} \leq (1 + \eta)^2 h.$$

Damit haben wir (11) vollständig bewiesen. Also ist $\|f^*\|_0 < (1 + \eta)^2$. Nach (9) erhalten wir daraus:

$$\|\Phi\|_0 > \frac{1}{(1 + \eta)^2} \left\{ \int_0^1 \psi(t) dt - \varepsilon \right\}.$$

Da ε und η beliebig sind, so ergibt sich (4).

Ist

$$\int_0^1 \psi(t) dt = \infty,$$

so können wir ähnlicherweise verfahren. Die Zahlen a und u_1 wählen wir z. B. so, daß die Ungleichungen

$$\int_a^1 \psi(t) dt > A, \quad \int_{\tilde{E}_0}^1 \psi(t) dt < \frac{A}{2}$$

bestehen, wo A eine beliebig große Zahl ist. Dann erhalten wir $\|\Phi\|_0 > A/2(1 + \eta)^2$. Da A beliebig ist, widerspricht diese Ungleichung der Annahme, daß $\Phi(f)$ beschränkt ist.

Um (3) zu beweisen betrachten wir die Funktion

$$\bar{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{für } \psi(t) \leq N, \\ N & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $f \in L_0$ und $\|f\|_0 \leq 1$, so ergibt sich durch partielle Integration:

$$(12) \quad \int_0^1 |f(t)| \bar{\psi}(t) dt = [\Phi(t) \bar{\psi}(t)]_0^1 + \int_0^1 \Phi(t) d(-\bar{\psi}(t)) \leq \int_0^1 t d(-\bar{\psi}(t)) = \int_0^1 \bar{\psi}(t) dt,$$

nach der Annahme ist nämlich

$$\Phi(t) = \int_0^t |f(y)| dy \leq t.$$

Für $N \rightarrow \infty$ erhalten wir aus (12)

$$(13) \quad \left| \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| |\varphi(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| \psi(t) dt \leq \int_0^1 \psi(t) dt \quad (f \in L_0, \|f\|_0 \leq 1),$$

also ist

$$\|\Phi\|_0 \leq \int_0^1 \psi(t) dt.$$

Nach (4) ergibt sich daraus (3).

Nach (13) ist es klar, daß die Funktionaloperation (1) in L_0 linear ist, wenn die Bedingung (2) erfüllt ist. Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Aus diesen Satz folgt mit Hilfe einer bekannten Methode²⁾ der Satz von D. K. FADDEJEV³⁾:

Dafür, daß die Relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) \varphi_n(t) dt = f(0)$$

für jede solche Funktion $f(t) \in L[0, 1]$ gilt, für die $x = 0$ ein Lebesguescher Punkt ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} \varphi_n(t) dt = 1$$

für jedes feste η ($0 < \eta \leq 1$) besteht und für jedes n

$$\int_0^1 \psi_n(t) dt < M (< \infty)$$

gilt, wobei

$$\psi_n(t) = \text{wes. ob. Gr. } |\varphi_n(y)|_{t \leq y \leq 1} \quad (0 < t \leq 1)$$

bedeutet.

(Eingegangen am 28. Oktober, 1954.)

²⁾ Siehe z. B. K. TANDORI, Über die Konvergenz singulärer Integrale. *Acta Sci. Math. Szeged* 15 (1953–54), 223–230.

³⁾ D. K. FADDEJEV, Sur la représentation des fonctions sommables au moyen d'intégrales singulières. *Mat. Sbornik* 1 (43) (1936) 351–368.