

Bemerkungen zur Differentialgeometrie der Raumkurven.

Herrn Professor László Kalmár zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von STEFAN VINCZE in Budapest.

Einleitung.

In dieser Arbeit wird auf Beziehungen zwischen der auf einer dreidimensionalen Raumkurve definierten linearen Massenbelegung und zwischen einigen differentialgeometrischen Eigenschaften dieser Raumkurve hingewiesen. Ferner ordnen wir der Raumkurve diejenige Fläche zu, die von den Massenschwerpunkten der Teilbögen der obenerwähnten Kurve gebildet wird. Es werden einige bemerkenswerte Eigenschaften dieser Fläche bewiesen. Wir nehmen an, daß die Raumkurve mindestens zweimal differenzierbar ist; in einigen Fällen wird vorausgesetzt, daß auch die höheren Derivierten existieren.

Der Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist ein von A. RÉNYI aufgeworfenes Problem, welches mit der O. JU. SCHMIDTSchen kosmogonischen Theorie im Zusammenhang steht.¹⁾ Zur Lösung dieses Problems hat es sich als nötig erwiesen, daß wir in Kenntnis der Abszissen der Schwerpunkte von der Figur, die durch die Strecken $(x, x + \Delta x)$, $(0, f(x))$, $(0, f(x + \Delta x))$ und durch den Bogen $f(t)$ ($x \leq t \leq x + \Delta x$) begrenzt wird, die Kurve $f(x)$ im wesentlichen bestimmen können.

Die Paragraphen 1 und 2 enthalten die Formulierung der Sätze, § 3 die Beweise. Im § 1 werden die infinitesimalen Eigenschaften der Raumkurve behandelt, während im § 2 die obenerwähnte „Schwerpunkfläche“ behandelt wird. Im § 1 werden Beziehungen zwischen dem Gradienten eines skalaren Feldes und einer räumlichen Massenbelegung angegeben auf analoge Weise, wie dies bei der Krümmung und Torsion einer Raumkurve geschieht.

An dieser Stelle spricht Verfasser Professoren G. HAJÓS und A. RÉNYI seinen Dank für ihre wertvollen Bemerkungen aus.

¹⁾ Vgl. ST. VINCZE: Bestimmung von Verteilungsfunktionen aus ihren Mittelwerten. (Ungarisch.) MTA Osztályközleményei 2 (1954), 513—523.

§ 1. Zusammenhang zwischen der Krümmung und Torsion einer Kurve und zwischen dem Massenmittelpunkt der Belegung auf der Kurve.

Es sei L eine Raumkurve, die im betrachteten Punkte P nach der Bogenlänge zweimal stetig differenzierbar ist. Man nehme zwei Punkte, Q_1 und Q_2 in der Umgebung von P , die durch P getrennt sind. Es bezeichne S den Massenmittelpunkt der auf dem Bogen $\overline{Q_1 Q_2}$ definierten homogenen Massenbelegung; ferner sei M der Mittelpunkt der Sehne $\overline{Q_1 Q_2}$. Dann gilt

$$(1) \quad \lim_{Q_1 Q_2 \rightarrow P} \frac{\overrightarrow{SM}}{\overline{Q_1 Q_2}^2} = \frac{1}{12} \mathbf{k},$$

wobei die Grenzübergänge voneinander unabhängig durchzuführen sind; hier bedeutet $\mathbf{k}$ den Krümmungsvektor im Punkte P , also den vom Punkt P nach dem Krümmungsmittelpunkt gerichteten Einheitsvektor. $\overline{Q_1 Q_2}$ bedeutet die Bogenlänge des Bogens zwischen Q_1 und Q_2 .

Es sei nun $\mu(s)$ eine auf L definierte, nach der Bogenlänge s zweimal stetig differenzierbare Massenbelegung. Es sei S der Massenmittelpunkt des Bogens $\overline{Q_1 Q_2}$. Ferner sei S' der Masselmittelpunkt des folgenden Systems: die Punkte Q_1 bzw. Q_2 , die zu den Parameterwerten s_1 bzw. s_2 gehören, seien mit $\mu(s_1)$ bzw. $\mu(s_2)$ belegt. Der Punkt P gehöre zum Parameterwert s . Unter den Voraussetzungen von (1) gilt dann

$$(1') \quad \lim_{s_1 s_2 \rightarrow s} \frac{\overrightarrow{SS'}}{\overline{Q_1 Q_2}^2} = \frac{1}{12} \left(\mathbf{k} + 2 \frac{\mu'}{\mu} \mathbf{t} \right),$$

wobei $\mathbf{k}$ dasselbe bedeutet, wie bei (1), während $\mathbf{t}$ den Tangenteneinheitsvektor von L in P bedeutet. (1) ist natürlich ein Spezialfall von (1').

Wir nehmen wieder an, die Massenbelegung μ sei homogen, $S = S(Q_1, Q_2)$ habe dieselbe Bedeutung, wie bei (1). Durchlaufen dann Q_1 und Q_2 voneinander unabhängig eine Umgebung von P , so durchläuft S eine zweiparametrische Schar, also eine Fläche, die einen P enthaltenden Bogen von L enthält. Es bezeichne $K(Q_1, Q_2)$ die im Punkte $S(Q_1, Q_2)$ genommene GAUSSsche Krümmung dieser Fläche, während $H(Q_1, Q_2)$ die mittlere Krümmung der Fläche bedeutet.

Dann gelten folgende Sätze:

Ist L im Punkte P viermal stetig differenzierbar, so ist

$$(2) \quad \lim_{Q_1, Q_2 \rightarrow P} K(Q_1, Q_2) = -\frac{1}{\tau^2},$$

$$(2') \quad \lim_{Q_1, Q_2 \rightarrow P} H(Q_1, Q_2) = -\frac{3}{5} \varrho^3 \left(\frac{1}{\varrho^2 \tau} \right)',$$

wobei τ^{-1} bzw. ϱ^{-1} die Torsion bzw. die Krümmung von L bedeuten, während der Strich Differentiation nach der Bogenlänge bedeutet.

Die erste Behauptung ist eine einfache Folge des Satzes von ENNEPER und BELTRAMI.²⁾

Es sei nun $f(\mathbf{r})$ eine skalare Funktion des Vektors $\mathbf{r}$, die in einem Punkt P nach den Vektorkoordinaten stetig differenzierbar ist. Wir betrachten um P eine Kugel von dem Halbmesser ϱ . Wir definieren in der Kugel eine Massenbelegung, deren Dichte in einem Punkt Q gleich $\exp f(\mathbf{r}(Q))$ ist, wobei $\mathbf{r}(Q)$ den Ortsvektor von Q bedeutet. Der Massenmittelpunkt der in der Kugel definierten Belegung sei mit S bezeichnet.

Es gilt

$$(3) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PS}}{\varrho^2} = \frac{1}{5} \text{grad } f(\mathbf{r}),$$

wobei $\mathbf{r}$ den Ortsvektor von P bedeutet.

§ 2. Über die „Schwerpunktfläche“ einer geschlossenen Raumkurve.

Es sei $\mathbf{r}(s)$ der nach den Punkten einer geschlossenen doppelunkpunktlosen Raumkurve L weisende Radiusvektor. Die Variable s bedeutet die Bogenlänge. Wir nehmen an, $\mathbf{r}(s)$ sei nach s zweimal stetig differenzierbar. Natürlich gilt $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s+l)$, wobei l die Bogenlänge von L bedeutet. Wir definieren in den Punkten von L eine Massendichte, die nach s zweimal stetig differenzierbar ist. Sie sei mit $\mu = \mu(s)$ bezeichnet, wo $\mu(s) = \mu(s+l)$. Wir betrachten die Fläche, die aus den Massenmittelpunkten der zusammenhängenden Teilbögen von L besteht; diese sei mit F bezeichnet. Die Fläche F enthält die Punkte von L ; sie braucht aber nicht doppelunkpunktfrei zu sein.

Die Punkte von F parametrisieren wir auf zweierlei Arten: zuerst, es bezeichne $\mathbf{x}(s_1, s_2)$ den nach demjenigen Punkt von F weisenden Radiusvektor, welcher der Massenmittelpunkt des Bogen s_1, s_2 ist; ferner, es sei $\mathbf{x}(s, \sigma)$ der Massenmittelpunkt des Bogens $s - \sigma, s + \sigma$, wobei $0 \leq \sigma \leq l/2$ ist.

Legen wir s fest und durchläuft σ das Intervall $\left(0, \frac{l}{2}\right)$, so beschreibt $\mathbf{x}(s, \sigma)$ eine Kurve, die von L zum Schwerpunkt der ganzen Belegung läuft. Durchläuft s bei festgelegtem σ das Intervall $(0, l)$, so beschreibt $\mathbf{x}(s, \sigma)$ geschlossene Kurven, die σ -Parameterlinien sind.

²⁾ Vgl. z. B. W. BLASCHKE, Differentialgeometrie, Bd. I. (Berlin, 1930), S. 113.

Wir bezeichnen mit $m(s, \sigma)$ die Masse des Bogens $s - \sigma, s + \sigma$. Für die Fläche F gilt die folgende Differentialgleichung:

$$(4) \quad \mathbf{x}_{\sigma\sigma} + 2 \frac{m'_\sigma}{m} \mathbf{x}_\sigma = \mathbf{x}_{ss} + 2 \frac{m'_s}{m} \mathbf{x}_s,$$

wobei die Indizes Differentiation bedeuten.

Ist insbesondere $\mu(s) \equiv 1$, so ist $m(s, \sigma) = 2\sigma$, $m'_s = 0$, $m'_\sigma = 2$. In diesem Falle erhält unsere Differentialgleichung die Gestalt

$$(4') \quad \mathbf{x}_{\sigma\sigma} + \frac{2}{\sigma} \mathbf{x}_\sigma = \mathbf{x}_{ss}.$$

Für die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich folgende Darstellung:

$$(5) \quad \mathbf{x}(s, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n\pi}{l} \sigma}{\frac{2n\pi}{l} \sigma} \left(\mathbf{a}_n \cos \frac{2n\pi}{l} s + \mathbf{b}_n \sin \frac{2n\pi}{l} s \right),$$

wobei

$$\mathbf{x}(s, 0) = \mathbf{r}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbf{a}_n \cos \frac{2n\pi}{l} s + \mathbf{b}_n \sin \frac{2n\pi}{l} s \right).$$

Die Vektoren $\mathbf{a}_n$, bzw. $\mathbf{b}_n$ sind also die Fourierkoeffizienten von $\mathbf{r}(s)$.

Wir betrachten die Fläche in der Parameterdarstellung $\mathbf{x}(s_1, s_2)$. Dann genügt F folgender Differentialgleichung:

$$(6) \quad \mathbf{x}_{s_1 s_2} = \frac{\mathbf{x}_{s_1} - \mathbf{x}_{s_2}}{s_1 - s_2},$$

wobei die Indizes Differentiation bedeuten.

Bezüglich der Tangenten der s -bzw. σ -Parameterlinien durch einen Punkt der Fläche kann folgendes ausgesprochen werden:

Die Tangente der σ -Parameterlinien durch den Punkt s, σ ist parallel mit der Sehne $s - \sigma, s + \sigma$; die Tangente der Parameterlinie nach s läuft durch den Mittelpunkt der obigen Sehne.

Aus der letzten Behauptung und aus dem in § 1 ausgesprochenen Satze ergibt sich folgendes:

Die Kurve L ist eine Asymptotenlinie von F .

Ferner folgt, daß der Schwerpunkt der Kurve L dann und nur dann ein Regularitätspunkt von F ist, wenn L eine ebene Kurve ist. Im Schwerpunkt S_0 der Kurve sind die Tangenten der s -Parameterlinien nach dem Punkte $\mathbf{r}\left(s + \frac{l}{2}\right)$ gerichtet. Folglich F besitzt in S_0 nur dann eine Tangentenebene, wenn L eine ebene Kurve ist.

Für den Flächeninhalt von F ergibt sich folgende anschauliche Formel: Es bezeichne $t(s, \sigma)$ den Inhalt der durch die Punkte $s - \sigma$ und $s + \sigma$ von

L und den Punkt s, σ von F bestimmten Dreieckes. Dann ist der Flächeninhalt von F gleich

$$(7) \quad \int_0^l \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{t(s, \sigma)}{\sigma^2} ds d\sigma.$$

§ 3. Beweise.

Nun beweisen wir die ausgesprochenen Sätze.

Aus § 1 beweisen wir nur (1). (1') kann in analoger Weise durch etwas mehr Rechnung bewiesen werden.

Es sei $\mathbf{r}(s)$ der nach den Punkten von L weisende Ortsvektor; wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Punkt $\mathbf{r}(0)$ betrachten. Im Falle $\mu(s) = 1$ ist die Masse des Bogens zwischen s_1 und s_2 gleich $s_2 - s_1$; der nach dem Massenmittelpunkt weisende Ortsvektor ist gleich

$$\frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{r}(t) dt,$$

während der nach dem Mittelpunkt der Sehne weisende Vektor ist

$$\frac{1}{2} (\mathbf{r}(s_1) + \mathbf{r}(s_2)).$$

Daher ist

$$\vec{SM} = \frac{1}{s_1 - s_2} \int_{s_2}^{s_1} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{r}(s_1) + \mathbf{r}(s_2)) - \mathbf{r}(t) \right] dt.$$

Wegen der Voraussetzung über die Differenzierbarkeit von $\mathbf{r}(s)$ ist

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + s\mathbf{r}'(0) + \frac{1}{2}s^2\mathbf{r}''(0) + o(s^2)\mathbf{r}^*(s),$$

wobei $\mathbf{r}^*(s)$ einen beschränkten Vektor bedeutet. Daher ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s_1) + \mathbf{r}(s_2) - 2\mathbf{r}(t) &= (s_1 + s_2 - 2t)\mathbf{r}'(0) + \\ &+ \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 - 2t^2)\mathbf{r}''(0) + o(s_1^2)\mathbf{r}_1^* + o(s_2^2)\mathbf{r}_2^* + \mathbf{r}_3^* o(t^2), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$ und $\mathbf{r}_3^*$ beschränkte Vektoren bedeuten. Nach Integration und Kürzung durch $s_2 - s_1$ erhält man

$$\vec{SM} = \frac{1}{12}(s_2 - s_1)^2 \mathbf{r}''(0) + o(s_1^2)\mathbf{r}_4^* + o(s_2^2)\mathbf{r}_5^* + o(s_2 - s_1)^2 \mathbf{r}_6^*.$$

Hieraus erhält man

$$\lim_{s_1, s_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{SM}}{(s_2 - s_1)^2} = \frac{1}{12} \mathbf{r}''(0),$$

w.z.b.w.

Auf die Beweise von (2) und (2') werden wir bei der Behandlung der „Schwerpunktfläche“ zurückkommen.

Wir beweisen (3).

Es sei $f(\mathbf{r})$ eine skalare Vektorfunktion, definiert in einer Umgebung des Nullpunktes; wir nehmen an, daß die partiellen Derivierten nach allen Variablen stetig sind. Es sei $g(\mathbf{r})$ definiert durch die Gleichung

$$g(\mathbf{r}) = e^{f(\mathbf{r})}.$$

Dann ist wegen den Voraussetzungen

$$(*) \quad g(\mathbf{r}) = g(\mathbf{0}) + [\mathbf{r} \text{ grad } g(\mathbf{0})] + o(|\mathbf{r}|) \mathbf{r}^*,$$

wobei $\mathbf{0}$ den Nullvektor bedeutet, während $\mathbf{r}^*$ einen Vektor mit beschränktem absolutem Betrag bezeichnet. Die eckige Klammer bedeutet das skalare Produkt.

Der Schwerpunkt der Massenverteilung in der Kugel um den Nullpunkt vom Halbmesser ϱ ist gleich

$$(3') \quad \frac{\iiint g(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV}{\iiint g(\mathbf{r}) dV}$$

wobei die Integration über die Kugel zu erstrecken ist.

Der Ausdruck (3') stimmt mit dem Vektor $\vec{PS}$ des (3) überein, weil wir ja $P=0$ angenommen haben. Aus (3') und (*) ergibt sich für den Schwerpunkt der Belegung

$$(3'') \quad \frac{\iiint \mathbf{r} [\mathbf{r} \text{ grad } g(\mathbf{0})] dV + o(\varrho^5)}{\frac{4}{3} \pi \varrho^3 g(\mathbf{0}) + o(\varrho^3)}$$

wobei der Integrationsbereich derselbe ist, wie bei (3'). Da $\text{grad } g(\mathbf{0}) = \mathbf{e} |\text{grad } g(\mathbf{0})|$ mit irgendeinem Einheitsvektor $\mathbf{e}$ gesetzt werden darf, ist das Integral im Zähler von (3'') gleich

$$|\text{grad } g(\mathbf{0})| \iiint \mathbf{r} [\mathbf{r} \mathbf{e}] dV.$$

Wir zerlegen nun $\mathbf{r}$ in zwei Komponenten, die parallel mit $\mathbf{e}$, bzw. senkrecht auf $\mathbf{e}$ sind. Es ist also

$$\mathbf{r} = [\mathbf{r} \mathbf{e}] \mathbf{e} + [\mathbf{r} \mathbf{n}] \mathbf{n}, \quad [\mathbf{r} \mathbf{e}] \mathbf{r} = [\mathbf{r} \mathbf{e}]^2 \mathbf{e} + [\mathbf{r} \mathbf{e}] [\mathbf{r} \mathbf{n}] \mathbf{n}.$$

Integriert man über die Kugel um den 0-Punkt und vom Halbmesser ϱ , so verschwindet aus Symmetriegründen der zweite Term. Daher ist

$$\iiint [\mathbf{r} \mathbf{e}] \mathbf{r} dV = \mathbf{e} \iiint [\mathbf{r} \mathbf{e}]^2 dV,$$

wobei das Integral auf der rechten Seite nicht mehr von $\mathbf{e}$ abhängt. Setzt man insbesondere $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$, so erhält man

$$\iiint x^2 dV = \frac{4}{15} \pi \varrho^5;$$

hieraus ergibt sich sofort (3) wegen

$$\frac{\text{grad } g(\mathbf{0})}{g(\mathbf{0})} = \text{grad } f(\mathbf{0}).$$

Wir leiten nur die Differentialgleichung (4') für F bei; (4) und (6) können in völlig analoger Weise gewonnen werden.

Der nach dem Punkt s, σ von F weisende Radiusvektor kann sehr einfach gewonnen werden. Es ist nämlich

$$\mathbf{x}(s, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} \int_{s-\sigma}^{s+\sigma} \mathbf{r}(t) dt.$$

$$\mathbf{x}_s = \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x}(s, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} (\mathbf{r}(s+\sigma) - \mathbf{r}(s-\sigma)),$$

$$\mathbf{x}_\sigma = \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbf{x}(s, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\mathbf{r}(s+\sigma) + \mathbf{r}(s-\sigma)}{2} - \mathbf{x}(s, \sigma) \right);$$

ferner besteht

$$\mathbf{x}_{ss} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathbf{x}(s, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} (\mathbf{r}'(s+\sigma) - \mathbf{r}'(s-\sigma))$$

$$\mathbf{x}_{\sigma\sigma} = \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \mathbf{x}(s, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\mathbf{r}'(s+\sigma) - \mathbf{r}'(s-\sigma)}{2} - 2\mathbf{x}_\sigma \right).$$

Aus den letzten beiden Gleichungen ergibt sich (4').

Aus den Ausdrücken für $\mathbf{x}_s$ und $\mathbf{x}_\sigma$ können die für die Tangente der Parameterlinien in s und σ ausgesprochenen Behauptungen abgelesen werden.

Zur Lösung der Differentialgleichung (4') schreiben wir sie für eine Komponente von $\mathbf{x}(s, \sigma)$ an. Es bezeichnen $u(s, \sigma)$, bzw. $v(s, \sigma)$, bzw. $w(s, \sigma)$ die Komponenten von $\mathbf{x}(s, \sigma)$. Dann ergibt sich für die Komponente u

$$u_{\sigma\sigma} + \frac{2}{\sigma} u_\sigma = u_{ss},$$

dies ist eine Gleichung, die durch Trennung der Variablen lösbar ist. Macht man den Ansatz $u(s, \sigma) = U(s) V(\sigma)$, so ergeben sich für $U(s)$, bzw. $V(\sigma)$ die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 U}{ds^2} + k^2 U = 0$$

bzw.

$$\frac{d^2 V}{d\sigma^2} + \frac{2}{\sigma} \frac{dV}{d\sigma} + k^2 V = 0.$$

Die erste Gleichung ist diejenige der harmonischen Schwingung, deren allgemeine Lösung

$$A \cos ks + B \sin ks$$

ist; die zweite ist die Gleichung der räumlichen Kugelwelle, die die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$\frac{\cos k\sigma}{k\sigma} \quad \text{und} \quad \frac{\sin k\sigma}{k\sigma}$$

besitzt; da aber die Lösung für jedes σ endlich sein muß, kommt nur die zweite Lösung in Betracht. Daher wird die Lösung aus Funktionen von der Gestalt

$$\frac{\sin k\sigma}{k\sigma} (A \cos ks + B \sin ks)$$

zusammengesetzt; da u im s periodisch ist, mit der Periode l , so ist

$$k = \frac{2n\pi}{l}, \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots,$$

womit wir (5) bewiesen haben.

Nun wenden wir uns den Beweisen von (2), bzw. (2') zu. Wir nehmen an, $\mathbf{r}(s)$ sei viermal differenzierbar. Für $\mathbf{x}(s, \sigma)$ gilt dann folgende Darstellung:

$$\mathbf{x}(s, \sigma) = \mathbf{r}(s) + \frac{\mathbf{r}''(s)}{3!} \sigma^2 + \frac{\mathbf{r}^{IV}(s)}{5!} \sigma^4 + \mathbf{r}^*(s) o(\sigma^4),$$

wobei $\mathbf{r}^*(s)$ einen beschränkten Vektor bedeutet.

Wir benötigen die infinitesimalen Hauptgrößen erster und zweiter Ordnung, E, F, G , bzw. L, M, N . Für diese erhalten wir

$$E = E(s, \sigma) = \mathbf{x}_s^2 = 1 + \frac{1}{3} [\mathbf{r}' \mathbf{r}'''] \sigma^2 + o(\sigma^3)$$

$$F = F(s, \sigma) = [\mathbf{x}_s \mathbf{x}_\sigma] = c_0 \sigma^3 + o(\sigma^4),$$

$$G = G(s, \sigma) = \mathbf{x}_\sigma^2 = \frac{1}{9} \mathbf{r}''^2 \sigma^2 + o(\sigma^3),$$

wobei $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \dots$, an der Stelle s zu verstehen ist, während c_0 von σ unabhängig ist.

Hieraus folgt

$$W^2 = EG - F^2 = \frac{1}{9} \mathbf{r}''^2 \sigma^2 + o(\sigma^3).$$

Im Weiteren bezeichnen wir das Vektorprodukt mit $\times$. Wir erhalten

$$WL = [(\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\sigma) \mathbf{x}_{ss}] = c_1 \sigma^3 + o(\sigma^4),$$

$$WM = [(\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\sigma) \mathbf{x}_{s\sigma}] = c_2 \sigma^2 + o(\sigma^4),$$

$$WN = [(\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\sigma) \mathbf{x}_{\sigma\sigma}] = \frac{1}{45} [(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \mathbf{r}'''] \sigma^3 + o(\sigma^4).$$

Da

$$[(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')\mathbf{r}''']' = \frac{1}{\tau \sigma^2}$$

besteht, ferner gilt

$$[(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')\mathbf{r}''']' = [(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')\mathbf{r}^{IV}] = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\tau \sigma^2} \right)$$

und

$$W^3 = \frac{1}{27} \sqrt{\mathbf{r}''^2}^3 \sigma^3 + o(\sigma^3),$$

daher ergibt sich aus der Relation

$$2H(s, \sigma) = \frac{EN - 2FM + GL}{W^2} = \frac{\frac{1}{45} [(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')\mathbf{r}^{IV}] \sigma^3 + o(\sigma^3)}{\frac{1}{27} \sqrt{\mathbf{r}''^2}^3 \sigma^3 + o(\sigma^3)}$$

die Relation (2').

(2) ist eine Konsequenz des Satzes von BELTRAMI und ENNEPER, welcher besagt, daß die GAUSSsche Krümmung in jedem Punkt der Asymptotenlinie einer Fläche gleich $-\frac{1}{\tau^2}$ ist. — Aus dem obigen Ausdruck für $x(s, \sigma)$ ergibt sich

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{x}(s, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1}{12} \mathbf{r}''(s),$$

also außer dem Tangentenvektor fällt auch der Hauptnormalenvektor in jedem Punkte von L in die Tangentenebene der Fläche.

Zum Schluß beweisen wir die Formel (7). Es seien Q_1 bzw. Q_2 die zu den Parameterwerten $s - \sigma$, bzw. $s + \sigma$ gehörigen Punkte von L , Q_0 der Mittelpunkt der Sehne zwischen Q_1 und Q_2 ; ferner bezeichne S den Schwerpunkt der Belegung auf dem Bogen $\widehat{Q_1 Q_2}$. Die für $\mathbf{x}_s$ und $\mathbf{x}_\sigma$ gegebenen Ausdrücke können dann in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$\mathbf{x}_s = \frac{1}{2\sigma} \overrightarrow{Q_1 Q_2}, \quad \mathbf{x}_\sigma = \frac{1}{\sigma} \overrightarrow{S Q_0}.$$

Der absolute Betrag des Vektorprodukts $\overrightarrow{Q_1 Q_2} \times \overrightarrow{S Q_0}$ ergibt den zweifachen Inhalt des Dreiecks $Q_1 Q_2 S$; daher ist

$$|\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\sigma| = \frac{t(Q_1, Q_2)}{\sigma^2}$$

woraus (7) folgt.

(Eingegangen am 12. Oktober, 1954.)