

Rösselsprungserien am unendlichen Schachbrette.

Herrn Professor O. Varga anlässlich seines 50-ten Geburtstages gewidmet.

Von FERENC KÁRTESZI (Budapest).

In vorliegender Abhandlung wird eine Darstellungsmethode des vierdimensionalen euklidischen Raumes verwendet die einen auf die axonometrische Darstellung des dreidimensionalen euklidischen Raumes erinnert. Diese Methode wurde vom Autor gelegentlich beim Studium eines mathematischen Problems ausgearbeitet und verwendet. Das Problem bezieht sich auf am Schachbrette durchgeführte Rösselsprungserien und fordert die Bestimmung eines gewissen kombinatorischen Minimums. Die Aufgabe ist auch mit anderer Methode unschwer zu lösen. Doch meinen wir, daß die Darlegung einer darstellendgeometrischen Methode zur Lösung dieses kombinatorisch-geometrischen Problems vielleicht nicht ganz uninteressant sein wird, ferner, daß die Verallgemeinerung der zu behandelnden Aufgabe und Methode nicht minder von Interesse sein kann.

1. Indem wir die Felder des unendlichen Schachbrettes mit ihren Mittelpunkten identifizieren, erhalten wir ein zweidimensionales Punktgitter. Aus einem gegebenen Felde sind achterlei Rösselsprünge möglich zu deren Charakterisierung acht Gittervektoren nötig sind; diese Gittervektoren

$$\mathbf{a}, -\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{b}, \mathbf{c}, -\mathbf{c}, \mathbf{d}, -\mathbf{d}$$

können mittels Koordinaten charakterisiert werden, und es genügen die Benennungen der Gittervektoren

$$\mathbf{a}(2, 1), \mathbf{b}(1, 2), \mathbf{c}(-1, 2), \mathbf{d}(-2, 1).$$

Die Angabe einer Rösselsprungserie kann mittels einer Summe geschehen, deren Glieder aus den erwähnten Gittervektoren zu nehmen sind. Sollte im Falle einer Rösselsprungserie nur das von Interesse sein, zu welchem Endpunkt (auf welches Feld) sie aus dem gegebenen Anfangspunkt (aus dem gegebenen Feld) führt, dann beschränken wir uns auf gewisse reduzierte und

geordnete Serien. So ist z. B. die der Summe

$$\mathbf{b} + \mathbf{b} + (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{c}) + (-\mathbf{b}) + (-\mathbf{d}) + \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

entsprechende Rösselsprungserie (indem wir die Reihenfolge der einzelnen Sprünge in die Folge $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ umordnen, dann die sich gegenseitig aufhebenden überflüssigen Schritte streichen) mit jener, der Summe

$$-\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}$$

entsprechenden Rösselsprungserie gleichwertig.

Im Folgenden wollen wir unter *Rösselsprungserie* nur die Realisierung einer Summe der Form

$$\xi_1 \mathbf{a} + \xi_2 \mathbf{b} + \xi_3 \mathbf{c} + \xi_4 \mathbf{d}$$

verstehen, wobei die Koeffizienten ξ ganze rationale Zahlen sind. Unter der Länge einer Rösselsprungserie verstehen wir die aus den absoluten Werten der Koeffizienten gebildete Summe

$$|\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3| + |\xi_4| = \lambda$$

Die Felder des unendlichen Schachbrettes können mit den aus ganzen Zahlen bestehenden Koordinatenpaaren (μ, ν) , die Rösselsprungserien aber mit den ganzzahligen Koordinatenquadrupeln $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ identifiziert werden.

Man kann von der Entfernung des Feldes (μ, ν) des Schachbrettes von dem Anfangsfelde $(0, 0)$, sowie von den zum Felde (μ, ν) gehörenden Rösselsprungserien sprechen: Wir wollen eine Rösselsprungserie $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ als zum Felde (μ, ν) gehörend nennen, wenn sie von $(0, 0)$ gerade zu (μ, ν) führt. Die Länge der zum Felde (μ, ν) gehörenden kürzesten Rösselsprungserie soll die Entfernung des Feldes von $(0, 0)$ genannt werden. Die Entfernung eines Feldes kann von mehreren zu ihr gehörenden Rösselsprungserien realisiert werden. So ist z. B. leicht einzusehen, daß die Entfernung des Feldes $(1, 0)$ gleich 3 ist und diese kann von beiden der Serien $(1, 0, -1, 1)$ $(-1, 1, 0, -1)$ realisiert werden.

Nun wollen wir die Punkte des das unendliche Schachbrett vertretenden Punktgitters beziffern wie es Fig. 1 aufweist. Aus dem mit 0 bezeich-

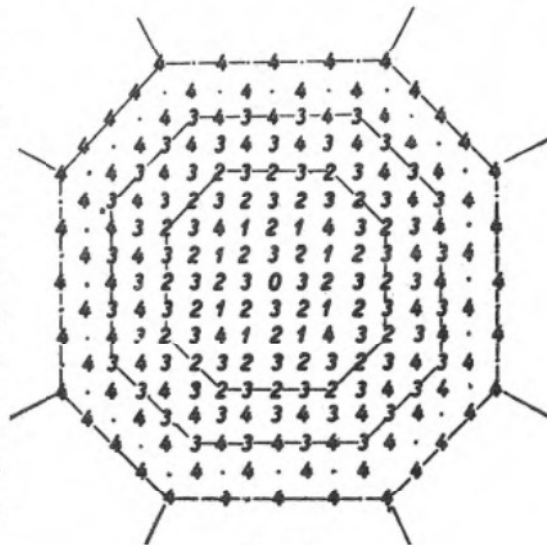


Fig. 1.

neten Anfangspunkte ausgehend, werden alle jene Gitterpunkte mit λ bezeichnet, die mit λ Rösselsprüngen, aber mit keinen kürzeren Serien erreichbar sind. Die auf diese Art definierte L-Tabelle kann mechanisch gewonnen werden, indem wir mit $(\lambda+1)$ jene bisher unbezeichneten Felder benennen, die aus den mit λ bezeichneten mit einem einzigen Rösselsprung erreichbar sind. (Die Numerierung der L-Tabelle ist natürlich ad Infinitum durchgeführt gedacht.) Wenn wir die auf das fixierte Punktgitter aufgelegte L-Tabelle einem Gittervektor (μ, ν) entsprechend verschieben, dann besagt die verschobene L,

wie gross die Entfernung jedweden Feldes von dem dem Gitterpunkte (μ, ν) entsprechenden ist.

Auf diese Weise wird das Punktgitter metrisiert; es kann leicht verifiziert werden, daß der hier gebrauchte Entfernungsbegriff jenen Postulaten entspricht, mit welchen die Entfernung immer eine ganze Zahl.

2. Die vom Anfangspunkt $O(0, 0)$ ausgehende und zu $P'(\mu, \nu)$ führende Rösselsprungserie $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ kann als ein vierseitiges Vektorpolygon dargestellt werden, wie in Fig. 2., wo $(\mu, \nu) = (1, 9)$ und $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (2, 1, 2, 1)$ ist.

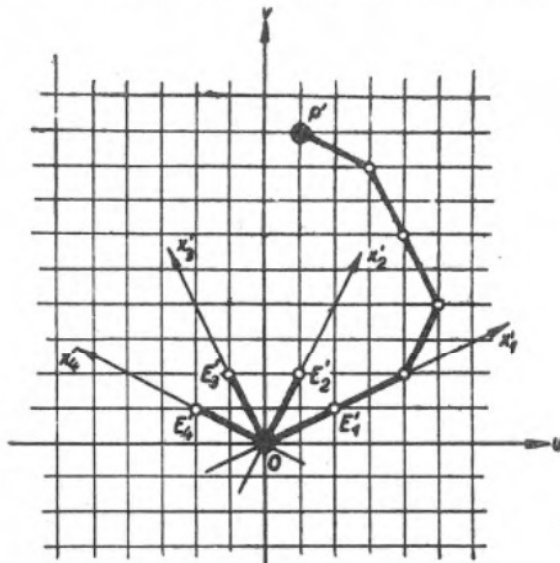


Fig. 2.

So kann das vierdimensionale Punktgitter eindeutig auf ein zweidimensionales Punktgitter abgebildet werden:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \rightarrow (\mu, \nu)$$

Graphisch wird diese Abbildung durch Zuordnung des genannten Vektorpolygons zum Endpunkt P' — realisiert. Diese Abbildung ist nicht ein-eindeutig, da zum Gitterpunkt P' alle jenen Rösselsprungserien entsprechenden (vierdimensional-räumlichen) Punkte $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ gehören, die vom Anfangspunkt zu P' führen.

Die genannte Abbildung $\varphi(P) = P'$ kann auch durch die lineare Transformation

$$(1) \quad \begin{cases} \mu = 2\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - 2\xi_4 \\ \nu = \xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4 \end{cases}$$

dargestellt werden, wenn sie auf die Punkte des vierdimensionalen Gitters verwendet wird.

Betrachten wir nämlich die paarweise senkrechten Einheitsvektoren $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3}, \overrightarrow{OE_4}$; so erhalten wir für den aus ganzen Zahlen bestehenden $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ in dem von diesen Vektoren bestimmten rechtwinkligen Koordinatensystem einen Gitterpunkt P . Dasselbe Koordinatenquadrupel kann auch als die Bestimmung einer Rösselsprungserie betrachtet werden. Diese Rösselsprungserie wird in dem das Schachbrett vertretenden zweidimensionalen Punktgitter von dem der Summe $\xi_1 \mathbf{a} + \xi_2 \mathbf{b} + \xi_3 \mathbf{c} + \xi_4 \mathbf{d}$ entsprechenden Gittervektorpolygon dargestellt. Dessen Endpunkt P kann mittels den Koordinaten der Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ und den Koeffizienten der genannten Summe ausgedrückt werden, und für seine Koordinaten ergibt sich eben die Darstellung (1). Eben deshalb kann die Abbildung φ auf alle Punkte des vierdimensionalen Raumes ausgedehnt werden, zu welchen Zwecke die Abbildung φ durch (1) definiert wird, und daher wollen wir sie im Folgenden immer in diesem erweiterten Sinne nehmen.

Durch die Abbildung φ wird eine lineare Kombination der Punkte in eine ebensolche lineare Kombination der Bildpunkte überführt, d. h.

$$(2) \quad \varphi(\rho A + \sigma B) = \rho \varphi(A) + \sigma \varphi(B)$$

es handelt sich folglich um eine *geradetreue* und *teilverhältnistreue* Abbildung. (2) ist aus der Definition (1) sogleich einzusehen. Die Eigenschaften der Teilverhältnis-, sowie der Geradetreue verlieren freilich ihren Sinn im Falle gewisser Geraden; eine solche Gerade wird durch ein Punktpaar A, B bestimmt, deren Elemente ungleich sind, aber $\varphi(A) = \varphi(B)$. Solche Punkte nennen wir ein *Deckpunktpaar*.

Nach dem Gesagten kann die Fig. 2 so aufgefaßt werden, daß die Vektoren $\mathbf{a} = \overrightarrow{OE_1}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OE_2}, \mathbf{c} = \overrightarrow{OE_3}, \mathbf{d} = \overrightarrow{OE_4}$ die durch φ entstandene Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ sind, die ihrerseits die Axen des das vierdimensionale Punktgitter zustande bringenden Koordinatensystems sind. Die Geraden x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 aber sind die Bilder der Koordinatenachsen. Das aus O nach P' führende Vektorpolygon-Bild hat auch seinen Gegenstand im vierdimensionalen Raume, u. zw. jenes die Summe $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ realisierende Vektorpolygon, das vom Anfangspunkte zum Gitterpunkt P führt.

3. Nun wollen wir noch zeigen, daß die Abbildung φ durch orthogonale Projektion des vierdimensionalen Punktraumes auf eine geeignete Ebene Σ durchgeführt werden kann; vorher müssen wir aber die orthogonale Projektion des vierdimensionalen Punktraumes auf eine Ebene definieren.

Es sei die Ebene Σ im vierdimensionalen Euklidischen Raum R_4 von der Ebene II linear unabhängig, sie sollen daher nur einen gemeinsamen Punkt haben. Zwei derartige Ebenen sind orthogonal, wenn die Vektoren des

einen auf alle Vektoren des anderen senkrecht sind. Wenn die auf einander senkrechten Ebenen Σ und Π nur einen gemeinsamen Punkt P' haben und P ein willkürlicher Punkt von Π ist dann sagen wir, daß die orthogonale Projektion von P auf die Bildebene Σ der Bildpunkt P' , und Π die projizierende Ebene des P sind. Die Gesamtheit der auf Σ projizierenden Ebenen kann aus einer einzigen solchen abgeleitet werden, indem man diese mit allen den Vektoren der Bildebene entsprechenden Verschiebungen transponiert. Gleichzeitig wird auch der Schnittpunkt P' der projizierenden mit der Bildebene verschoben indem er sämtlich Punkte der Bildebene beschreibt.

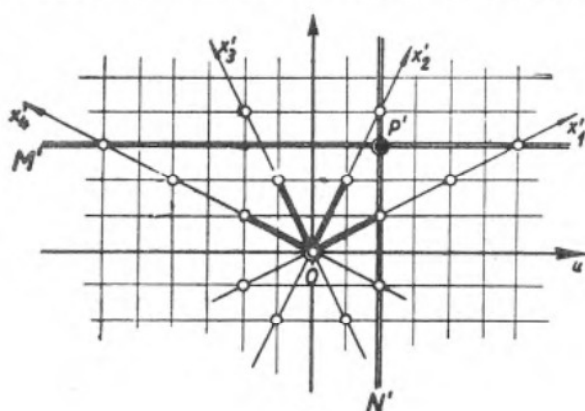


Fig. 3.

In diesem Sinne sind sämtliche projizierende Ebenen unter sich parallel, weiterhin entsteht zwischen der Menge der projizierenden Ebenen, sowie der Menge der Punkte der Bildebene eine eindeutige Verbindung. Zwei Punkte derselben projizierenden Ebene bilden ein Deckpunktpaar, und zu den Punkten eines Deckpunktpaares gehört eine (gemeinsame) projizierende Ebene. Nun wollen wir aber die durch die

erste und zweite Gleichung von (1) definierten Hyperebenen N und M , sowie die auf jene Hyperebenen senkrechten Geraden u und v betrachten. Diese zwei Geraden spannen eine Ebene Σ auf und sind, wie aus dem Skalarprodukt der Koeffizienten der Gleichungen (1) ersichtlich, aufeinander senkrecht, können also auf der Ebene Σ als Koordinatenachsen fungieren. Wir wollen im System $O(u, v)$ eine Einheitsstrecke wählen, deren $\sqrt{10}$ -faches mit der Einheitsstrecke des Systems $O(x_1, x_2, x_3, x_4)$ übereinstimmt. Wenn die Rolle von N , resp. von M durch die von den Axen x_1, x_2, x_3, x_4 aus O beginnende und der Reihe nach Strecken von der Länge

$$\mu/2, \mu, -\mu, -\mu/2 \quad \text{resp.} \quad \nu, \nu/2, \nu/2, \nu$$

abschneidende Hyperebenen übernommen wird, dann wird Σ von diesen genau in den Geraden mit der Gleichung $u = \mu$, resp. $v = \nu$ (die Geraden N' resp. M' der Fig.) geschnitten, die auf Σ senkrecht sind. Die Hyperebenen M und N schneiden sich in einer gewöhnlichen Ebene Π . Die Punkte dieser Ebene sind durch das Gleichungssystem (1) definiert; diese Ebene ist auf Σ senkrecht, und schneidet diese im Punkte $P'(\mu, \nu)$, im übereinstimmenden Bildpunkte sämtlicher Punkte der projizierenden Ebene Π . Also wurde φ als

orthogonale Projektion des Punktraumes R_4 auf die Bildebene Σ definiert. Aus dem Gesagten ist auch klar, daß die Projektionen der Punkte der genannten Hyperebenen nur je eine Gerade ausfüllen, d. h. die Geraden M', N' der Fig. sind die zu Geraden zusammengeschrumpften Bilder der Hyperebenen. (Im Falle der Fig. $\mu = 2, \nu = 3$.)

Unsere Feststellungen bezüglich φ wollen wir ergänzen, indem wir den Zusammenhang des in der Rede stehenden vierdimensionalen Punktgitters und der Gesamtheit der durch die Gitterpunkte gehenden projizierenden Ebenen Π charakterisieren.

Die durch jedweden Gitterpunkt eines vierdimensionalen Punktgitters gehende projizierende Ebene Π enthält unendlich viele Gitterpunkte. Auf der Ebene Π bilden die Gitterpunkte ein zweidimensionales Grundgitter, dessen leeres Gitterquadrat die Seitenlänge $\sqrt{10}$ hat.

Betrachten wir nämlich die gegenseitig inversen Transformationen

$$(3) \quad \begin{cases} \mu = 2\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - 2\xi_4 & \xi_1 = \mu + 0 + 2\varrho + \sigma \\ \nu = \xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4 & \xi_2 = 0 + \nu - \varrho - 2\sigma \\ \varrho = -\xi_1 - \xi_2 + 0 + \xi_4 & \xi_3 = -\mu - \nu - \varrho + 2\sigma \\ \sigma = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + 0 & \xi_4 = \mu + \nu + 2\varrho - \sigma. \end{cases}$$

Die Determinante beider ist gleich -1 . Es ist klar, daß wenn eines der $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ und $(\mu, \nu, \varrho, \sigma)$ von ganzen Zahlen besteht, auch das andere solcher Art ist. Betrachten wir ferner die speziell gewählten Punkte

$$(4) \quad R(\mu, \nu, -\mu - \nu, \mu + \nu) \quad \text{und} \quad S(2\varrho + \sigma, -\varrho - 2\sigma, -\varrho + 2\sigma, 2\varrho - \sigma).$$

Zu diesen gehören laut (1) die Bildpunkte

$$(5) \quad \varphi(R) = R'(\mu, \nu) \quad \text{und} \quad \varphi(S) = S'(0, 0) = O.$$

Der den Raum beschreibende Punkt P aber kann laut (3) aus den speziell gewählten Punkten R, S durch die lineare Kombination

$$(6) \quad P = R + S$$

immer dargestellt werden. Daher ergibt sich laut (2) und (5) für den Bildpunkt $P' = R'$. Wenn wir daher zum fixierten Gitterpunkt R sämtliche Gitterpunkte S addieren, erhalten wir alle jene Gitterpunkte P , die in den gemeinsamen Punkt R' projiziert werden. Die erwähnten Punkte sind dann Gitterpunkte, wenn die Parameter μ, ν , resp. ϱ, σ ganzzahlig sind. Es bleibt nun noch zu bestätigen, daß die durch (4) definierten S -Punkte einen Grundgitter bilden.

Betrachten wir zu dem Ende die Gitterpunkte

$$A(2, -1, -1, 2) \quad \text{und} \quad B(1, -2, 2, -1).$$

Die S -Punkte lassen sich aus diesen durch die lineare Kombination

$$\varrho A + \sigma B = S$$

ableiten. Durch (7) wird eben gesagt, daß die S -Punkte ein zweidimensionales Punktgitter bilden. Aus den Koordinaten der Grundvektoren $\vec{OA}$ und $\vec{OB}$ ist feststellbar, daß es sich um aufeinander senkrechte Gittervektoren handelt, und daß die Länge beider $\sqrt{10}$ beträgt; hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

4. Unter Benutzung der Abbildung φ kann die axonometrische Darstellungsmethode des vierdimensionalen Punktraumes einfach konstruiert werden. Die graphische Darstellung eines Punktraumes R_4 mittels einer zweidimensionalen Bildform kann (ähnlich wie im Falle R_3) folgenderweise durchgeführt werden:

Die Angabe eines Bildpunktes P' zeigt noch nicht, zu welchem Punkt des Raumes R_4 derselbe gehört. Von den Punkten die zu den Bildpunkt führten, wissen wir nur, dass sie beliebige Punkte einer gewissen Ebene Π sein können. Wenn wir aber zum Bildpunkt P' noch ein von O ausgehendes und in P' endendes Vektorpolygon mit zu x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 resp. parallelen Seiten hinzufügen, haben wir hiermit einen einzigen Punkt P der genannten Ebene Π bestimmt, d. h. wir haben den Punkt P durch

$$„P' + \text{Vektorpolygon}”$$

dargestellt, womit der Punkt P in R_4 eindeutig rekonstruierbar ist.

So ist z. B. der zweidimensionale Gitterpunkt P' — wenn wir auch wissen, daß er ein Element des vierdimensionalen Punktgitters darstellt — noch das gemeinsame Bild unendlich vieler Gitterpunkte P . Wenn wir aber dem Bildpunkte P' noch das die Summe $2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c} + \mathbf{d}$ realisierende Vektorpolygon anschließen, dann haben wir einen der unendlich vielen vierdimensionalen Gitterpunkte ausgewählt, u. zwar jenen, der dem Koordinatenquadrupel $(2, 1, 2, 1)$ entspricht.

Nun kann auf Fig. 1 zurückblickend gefragt werden, welcher Konfiguration des vierdimensionalen Punktgitters die mit demselben λ bezeichneten Punkte entsprechen? Um diese Frage zu klären, wollen wir uns vorderhand mit einem Sechzehnzelle genannten regelmäßigen konvexen Polytop beschäftigen.

5. Betrachten wir jene Hyperebenen, die im Raume R_4 bei fixiertem Werte $\lambda \geq 0$ durch die Gleichungen

$$(8) \quad \pm \xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3 \pm \xi_4 = \lambda$$

bestimmt sind. Den 16 Variationen der unbestimmten Vorzeichen entsprechen

16 verschiedene Hyperebenen. Jede solche Hyperebene ist die Grenze eines geschlossenen, den Punkt O enthaltenden vierdimensionalen Halbraumes. Der gemeinsame Teil dieser Halbräume ist ein geschlossener vierdimensionaler konvexer Bereich T^λ , dessen Grenzpunkt-Formation eine Hyperfläche θ^λ , die sogenannte *regelmäßige Sechzehnzelle* ist.

Die Grenzpunkte von T^λ — die Formationen werden in der Reihenfolge der Dimensionen 3, 2, 1, 0 benannt — bilden *Zellen, Flächen, Kanten, Scheitelpunkte*; alle diese vereint erschöpfen sämtliche Punkte der Hyperfläche θ^λ . Es gibt 8 Scheitelpunkte; sie sitzen paarweise auf den Axen x_1, x_2, x_3, x_4 , so z. B. auf x_1 die Scheitel $(-\lambda, 0, 0, 0)$ und $(\lambda, 0, 0, 0)$. Die Kanten sind 24 kongruente Strecken. Die Flächen sind kongruente regelmäßige Dreiecke; ihre Ahnzahl beträgt 32. Die Zellen sind kongruente regelmäßige Tetraeder, die Anzahl der Zellen ist 16, daher der Name: *regelmäßige Sechzehnzelle*.

Die Punkte von T^λ werden durch die Bedingung

$$|\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3| + |\xi_4| \leq \lambda$$

definiert; wenn das Zeichen „ $<$ “ gilt, dann wird von *inneren* — sonst von *Grenzpunkten* gesprochen. Der Hyperfläche θ^λ entspricht die zu λ gehörende Gleichung

$$(9) \quad |\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3| + |\xi_4| = \lambda.$$

Betrachten wir nun die durch die Parameterwerte $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ definierte Serie von Hyperflächen. Da jeder vierdimensionale Gitterpunkt auf irgendeiner solchen Hyperfläche liegt, und jede solche Hyperfläche einen Gitterpunkt enthält, aber zwei verschiedene solche Hyperflächen keinen gemeinsamen Punkt enthalten, leuchtet es ein, daß das vierdimensionale Punktgitter mittels der genannten Flächenserie in Klassen einteilbar ist. Die Klassen werden von den Gitterpunkten der zu den verschiedenen λ -Werten gehörigen Hyperflächen θ^λ gebildet, indem $\lambda (\geq 0)$ alle ganzzahligen Werte durchläuft. Das zu dem Wert $\lambda = 0$ gehörige Element der Flächenserie ist die zum Anfangspunkt O degenerierte Hyperfläche, die weiteren Elemente aber sind aus θ^1 mittels Homothetie herzuleiten, deren Mittelpunkt der Punkt O , und deren Modul λ ist, so daß es sich um ganzzahligen Vergrößerungen handelt.

Nun werden wir untersuchen, wie sich die Klassenaufteilung des vierdimensionalen Punktgitters auf der zur Σ -Ebene orthogonalen Projektion spiegelt.

6. Auf Grund der Gerade- und Teilverhältnisbeständigkeit der Abbildung φ ist die Richtigkeit folgender Feststellungen leicht einzusehen.

Die Projektionen der Hyperfläche θ^λ füllen ein konvexes Polygon aus. Dieses Polygon ist ein zum Mittelpunkt 0 symmetrisches Achteck $A'_1 A'_2 \dots A'_4$ (Fig. 5.). Seine Scheitelpunkte sind die den Scheitelpunkten der Hyperfläche entsprechenden Projektionen. Mit A_k und $-A_k$ wurden die Endpunkte der mit λ und $-\lambda$ multiplizierten Einheitsvektoren der Koordinatenaxe bezeichnet, sobald deren Anfangspunkt der Punkt 0 ist. Die zu den ganzzahligen Werten des Parameters $\lambda (> 0)$ gehörenden Bildachtecke können aus den zum

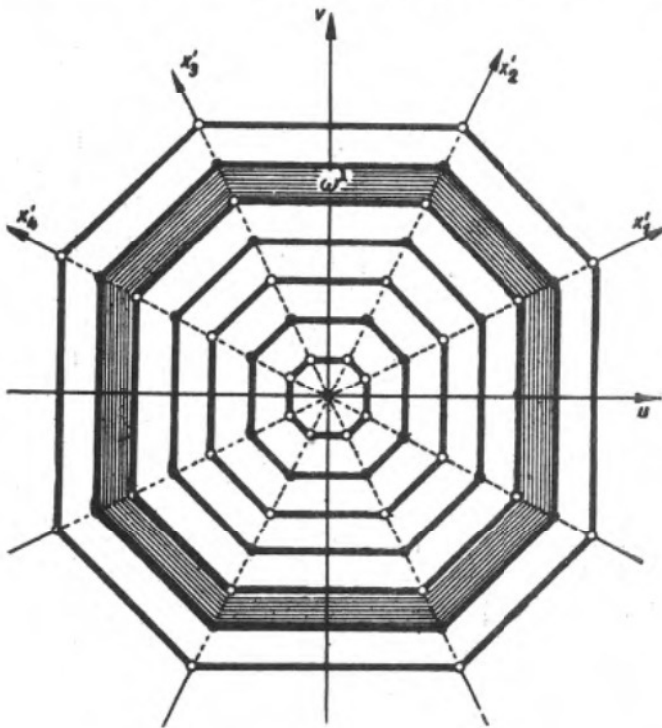


Fig. 4.

Werte $\lambda=1$ gehörenden mittels einer λ -fachen Vergrößerung mit dem Zentrum 0 abgeleitet werden (Fig. 4). Es ist zweckmäßig, die Gitterpunkte des das Schachbrett vertretenden Punktgitters — die helle und dunkle Färbung der Felder folgend — zu färben, was in Fig. 4 für die Gitterpunkte der Hauptdiagonalen durchgeführt ist. (Der Anfangspunkt ist in Fig. 4 und 5 ein dunkler.) Der Bildbereich zu θ^λ soll $\mathcal{G}^\lambda$ heißen, die durch die Bildbereiche erzeugten von aussen geschlossene Zonen (Fig. 4) seien mit ω^λ bezeichnet. Zum Zonenbereich ω^λ wollen wir die

Grenzlinie von $\mathcal{G}^\lambda$ hinzurechnen, nicht aber jene von $\mathcal{G}^{\lambda-1}$.

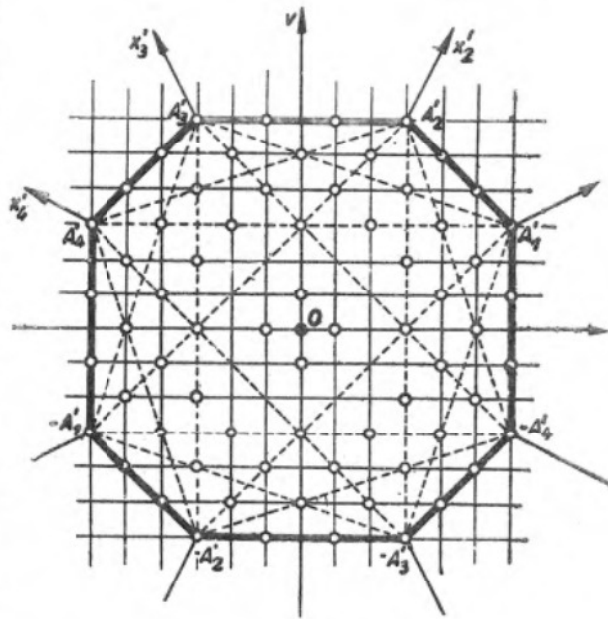
Betrachten wir nun jene Gitterpunkte des einen Bildbereiches $\mathcal{G}^\lambda$, die als Projektionen der vierdimensionalen Gitterpunkte entstanden sind. So zeigt Fig. 5 den Fall $\lambda=3$. Nachdem in Rösselsprung aus irgend einem Felde auf ein Feld entgegengesetzter Farbe führt, und O diesmal ein dunkler Punkt ist wird eine in O beginnende Rösselsprungserie von der Länge $\lambda=3$ in einem hellen Punkte enden. Wenn also λ eine ungerade Zahl ist, dann werden die Gitterpunkte von θ^i in der Projektion einen hellen Gitterpunkt liefern. (Sollte λ einen geraden Wert haben, dann sind die Gitterpunkte der Projektion dunkel.) Es werden aber nicht sämtliche hellen Gitterpunkte des Bereiches $A'_1 A'_2 \dots A'_4$ als Projektionen der entsprechenden Gitterpunkte von θ^λ auftreten; Im Falle der Figur sind die Projektionen von θ^1 jene hellen

Gitterpunkte, welche nicht als Endpunkte der von O ausgehenden aus drei Rösselsprüngen bestehenden Serien entstehen können. Wir ordneten also jedem λ -Wert eine zum Bereiche $\mathcal{Q}^\lambda$ gehörend aus lauter hellen, oder lauter dunklen Gitterpunkten bestehende Konfiguration zu, je nachdem der λ -Wert ungerade, oder gerade ist. Wir wollen diese Gitterpunktkonfiguration K^λ nennen. Die mit kleinen Kreisen bezeichneten Punkte der Fig. 5 bilden K^3 . (Der Punkt O gehört nicht dazu.)

Wir betrachten jetzt die Bildebene Σ als aus unendlich vielen Schichten bestehend und wir bezeichnen die Schichten mit den Werten $\lambda=1, 2, 3, \dots$. Die Schichte mit dem Index λ bilden Tabelle L^λ , die aus der Konfiguration K^λ dadurch entsteht, dass an die Stellen der mit kleinen Kreisen bezeichneten Punkte überall die Zahl λ geschrieben wird. Die Schichten sind in der Reihenfolge der Indizes geordnet, d. h. so, daß die mit $\lambda+1$ bezeichnete Schicht jene mit λ bedeckt. Auf diese Weise erhält ein jeder Gitterpunkt des das Schachbrett vertretenden Punktgitters unendlich viele Bezifferungen (wenn es ein dunkler Punkt ist, eine ungerade, im Falle eines hellen, eine gerade Zahl). Wenn wir für die Gitterpunkte immer nur die Bezifferung mit dem kleinsten Index behalten und die übrigen löschen, dann ist es klar, dass wir die Zifferntabelle L — wie diese bei Fig. 1 definiert wurde — erhalten.

Mit der Bestimmung der Struktur der Konfiguration K^λ wollen wir uns nicht beschäftigen, da uns nur die Frage interessiert, welche Indizes in den Zonen $\omega^\lambda (\lambda=1, 2, 3, \dots)$ vorkommen und nach welcher Regel sie geordnet sind, falls wir das ganze der Zifferntabelle L betrachten. Hierbei wird uns die Ableitung von L aus der Serie $L^1, L^2, L^3, \dots$ mit dem erwähnten Verfahren Aufklärung erteilen. Diese Frage soll nun detailliert werden.

7. Die Indizierung der im Bereiche $\mathcal{Q}^2$ und auf dessen Grenze gelegenen Gitterpunkte ist nach dem zu Fig. 1 gegebenen mechanischen Verfahren rasch durchführbar. Zur konzentrischen Verbreitung der L -Tabelle über die Grenze von $\mathcal{Q}^2$ hinaus wird es vorteilhafter sein folgende Feststellung zu benützen:



In der Zone ω^λ und in deren äußeren Grenze bekommen die dort befindlichen Gitterpunkte (wenn $\lambda > 2$) je nach den zweierlei Farben die Indizes λ , oder $\lambda+1$, so aber, daß den äußeren Scheitelpunkten das Index λ zukommt.

Der Beweis kann mittels vollkommener Induktion geführt werden. Fig. 1 zeigt, daß die erste Zone, deren Bezifferung der mitgeteilten Regel entspricht, wirklich die Zone ω^3 ist. Betrachten wir nun die Zone ω^λ und nehmen wir an, daß für diese die Regel gilt.

Die Zonen ω^λ und $\omega^{\lambda+1}$ sind aus vier solchen Teilen zusammengesetzt, wie in Fig. 6. Aus an der Grenzlinie (und umso weniger in deren Innerem) liegenden Gitterpunkten kann man mittels eines einzigen Rösselsprungs

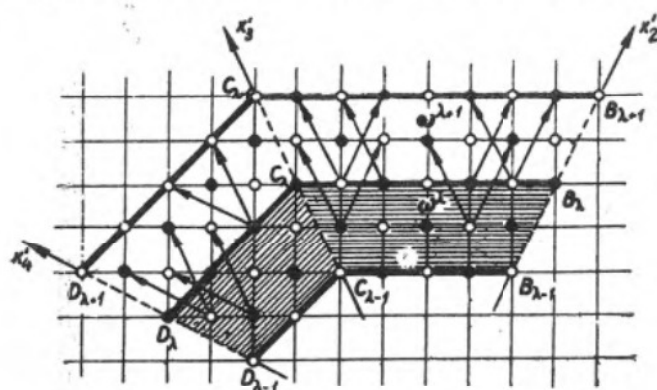


Fig. 6.

nach keinem Gitterpunkt der Zone $\omega^{\lambda+1}$ gelangen. Aus den an der Grenze der Zone ω^λ befindlichen Gitterpunkten können sämtliche Gitterpunkte der Grenzlinie von $\omega^{\lambda+1}$ erreicht werden, aber weiter können wir mit einem einzigen Rösselsprunge in die Zone $\omega^{\lambda+2}$ nicht eindringen. Die inneren Gitterpunkte der Zone $\omega^{\lambda+1}$ können auch

aus den inneren Gitterpunkten von ω^λ mit einem Rösselsprunge erreicht werden. Alle diese sind aus Fig. 6 unmittelbar ablesbare Tatsachen. Die Gitterpunkte der Zone ω^λ führen jedoch die Indizes λ (dunkel) und $\lambda+1$ (hell): dies war die Annahme. Folglich führen die Gitterpunkte der Zone $\omega^{\lambda+1}$ die Indizes $\lambda+1$ (hell) und $\lambda+2$ (dunkel). Unsere Behauptung ist also richtig.

Bezüglich L_1 kann noch gefragt werden, wo sich die Gitterpunkte mit dem Index λ befinden? Wenn $\lambda \geq 5$, dann sind die Gitterpunkte mit dem Index λ dunkle, oder helle Gitterpunkte der zusammengesetzten Zone $\omega^{\lambda-1} + \omega^\lambda$, je nachdem λ ungerade oder gerade ist, angenommen, daß der Anfangspunkt O dunkel gewählt wurde. Dies folgt unmittelbar aus dem bisher Gesagten.

Die durch Zonen charakterisierbare einfache Strukturregel ist also von $\lambda = 5$ an gültig, kann aber bei niedrigeren Indizes wegen dem zu den Gitterpunkten $(\pm 2, \pm 2)$ gehörenden Index 4 nicht verwendet werden.

8. Es bietet sich folgende Aufgabe: Es soll ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (m < n)$$

mit rationalen ganzen Koeffizienten gegeben sein, das eine aus ganzen Zahlen bestehende Lösung $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ besitzt. Betrachten wir die mit den ganzzahligen Lösungen definierte kleinste Zahl

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = l,$$

weiterhin das System jener Lösungen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, die das gewünschte Minimum herbeiführen. Wir wollen dieses das zu den ganzen Zahlen gehörende minimale Lösungssystem nennen. Die linke Seite des Gleichungssystems sei derart, daß es bei beliebigen $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ eine ganzzahlige Lösung $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ besitzt. Es wird gefragt: *welche Struktur hat die Menge L der minimalen Lösungssysteme?*

Die Punkte 1—7. enthalten die Erledigung eines speziellen Falles dieser Frage. Es scheint nicht uninteressant zu sein, die angeführte allgemeine Frage mittels einer ähnlichen geometrischen Methode zu erledigen. Darauf möchte ich in einer künftigen Arbeit zurückkommen.

(Eingegangen am 4. November 1958.)