

## Sur les prolongements des systèmes différentiels extérieurs.

A M. O. Varga à l'occasion de son cinquantième anniversaire.

Par MENDEL HAIMOVICI (Jasi).

### Introduction.

Etant donné un système de Pfaff

$$\theta_j = 0$$

en involution à  $p$  formes de Pfaff  $\omega_\alpha$  indépendantes, CARTAN ([1], p. 114, [2]) a démontré que le prolongement total de ce système est aussi en involution aux mêmes formes de Pfaff indépendantes.

Dans sa démonstration, CARTAN supposait que

$$d\theta_j = \bar{\omega}_{j\alpha} \wedge \omega_\alpha \pmod{\theta}$$

et que, par suite, le prolongement est donné par les relations

$$\bar{\omega}_{h\alpha} = \lambda_{h\alpha\beta} \omega_\beta,$$

où les  $\lambda_{h\alpha\beta}$  vérifient un certain système de relations algébriques.

Ce théorème a été démontré par M. Y. MATSUSHIMA [3] pour le prolongement total d'un système différentiel quelconque en involution à  $p$  pfaffiens indépendants.

Cependant, comme l'observait déjà CARTAN, ses conclusions cessent d'être toujours vraies, si au lieu des prolongements totaux, on considère des prolongements partiels.

Ces prolongements partiels peuvent ne pas être pourvus d'intérêt dans la recherche de certaines propriétés des systèmes en involution. CARTAN même ([1], pp. 115—117) et SCHOUTEN et VAN DER KULK ([4], pp. 461—510) les emploient pour la démonstration de certains théorèmes. Ils ont aussi intérêt dans l'étude des décompositions des systèmes extérieurs, comme nous aurons l'occasion de le montrer ailleurs.

C'est pourquoi nous avons cru utile d'étudier dans quelles conditions le théorème cité plus haut de CARTAN reste vrai pour ces prolongements partiels.

Tout d'abord, pour définir un tel prolongement général, nous définissons le prolongement algébrique (Chap. I) partiel ou total. Après quoi, nous précisons cette définition, en introduisant la notion de prolongement algébrique régulier.

A l'aide de ces notions, nous définissons le prolongement analytique, ou fermé, généré par le prolongement algébrique et enfin nous démontrons qu'un prolongement algébrique régulier donne lieu à un prolongement fermé en involution. Au cours de ces considérations nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de CARTAN, pour des systèmes différentiels quelconques, démonstration qui nous semble plus simple.

## I. Prolongement algébrique d'un système extérieur.

### 1. Rappel de quelques notions sur les systèmes extérieurs.

**Notations.** Soit un système algébrique  $\Sigma$  d'équations extérieures en  $n$  variables  $u_i (i = 1, 2, \dots, n)$

$$(\Sigma) \quad A_{\gamma\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p} u_{\alpha_1} \wedge u_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge u_{\alpha_p} = 0;$$

on dit qu'un plan à  $k$  dimensions qui passe par l'origine du système de coordonnées (élément plan par l'origine) appartient à ce système ou le vérifie, lorsque ses équations, introduites en  $(\Sigma)$ , donnent des identités. Nous désignerons un plan qui appartient à  $\Sigma$  par  $E_k$ , ou  $E'_k$  ou  $E_k^*$ .

Si les coordonnées grassmanniennes du  $k$ -plan sont  $p_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$ , la condition nécessaire et suffisante pour qu'il appartienne à  $\Sigma$  est

$$(1) \quad A_{\nu\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p} p_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p} p_{\nu+1\dots\nu+k} = 0$$

pour tout  $\nu \leq k [1]$ .

Etant donné un  $E_k$  appartenant à  $\Sigma$ , cherchons un  $E_1$  qui forme avec  $E_k$  un  $E_{k+1} = E_1 \times E_k$  appartenant à  $\Sigma$ . Les coordonnées de  $E_1$  doivent vérifier un système d'équations linéaires. Nous appellerons ce système  $S(E_k)$ . Le rang de  $S(E_k)$  est au plus  $n-k$ , puisqu'il a toujours  $k$  solutions indépendantes correspondant à  $k$  directions indépendantes contenues dans  $E_k$ . Si ce rang est précisément  $n-k$ , alors la direction  $E_1$  appartient à  $E_k$  et l' $E_{k+1}$  n'existe pas. Mais si ce rang est moindre, alors notre problème a des solutions.  $E_1$  en étant une, nous dirons qu'il est *associé* à  $E_k$ . Le lieu des éléments linéaires (par l'origine) associés à  $E_k$  est l'élément *plan polaire* de  $E_k$ . Il sera désigné par  $P(E_k)$ .

Lorsque, l'élément plan à  $k$  dimensions variant dans un certain voisinage de  $E_k$ , le rang de  $S(E_k)$  ne change pas, nous le désignerons par  $r_k$ .

On peut considérer une suite de plans appartenant à  $\Sigma$

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_q.$$

Une telle suite sera appelée une chaîne. Si les systèmes  $S(E_1), S(E_2), \dots, S(E_q)$  sont respectivement de rangs  $r_0, r_1, \dots, r_q$ , nous dirons que *la chaîne est régulière*.

D'après ce que nous venons de dire sur le rang des systèmes  $S$ , on aura

$$r_0 < n, \quad r_1 < n-1, \dots, r_q \leq n-q;$$

si  $r_q = n-q$ , nous dirons que  $q$  est le *genre* du système et nous le désignerons par  $p$ .

Un plan  $E_k$  de  $\Sigma$  est *régulier*, lorsqu'il appartient à une chaîne régulière qui va de l'indice 0 à  $p$ .

Les quantités  $s_0 = r_0, s_1 = r_1 - r_0, \dots, s_k = r_k - r_{k-1}$  sont les *caractères* du système. On a évidemment

$$s_0 + s_1 + \dots + s_k = r_k, \quad s_0 + s_1 + \dots + s_p + p = n.$$

Les premiers membres des équations du système  $\Sigma$  définissent, dans l'anneau des formes extérieures à  $n$  variables, un idéal, que nous désignerons par  $I(\Sigma)$ .

**2. Définition du prolongement algébrique.** Nous allons ajouter à  $\Sigma$  un système extérieur  $\Sigma_1$  dans les mêmes variables, dont les coefficients sont des polynômes en  $M$  paramètres  $x_a (a = 1, 2, \dots, M)$ , éventuellement liés par un système de relations algébriques

$$(1) \quad G_i(x) = 0.$$

Nous désignerons par  $\Sigma^*$  ou par  $\Sigma + \Sigma_1$  le système formé par les équations de  $\Sigma$  et par celles de  $\Sigma_1$ .

Le système  $\Sigma_1$  est supposé jouir des propriétés suivantes:

1) Etant donné un élément plan à  $p$  dimensions  $E_p$  régulier de  $\Sigma$ , la condition pour qu'il appartienne aussi à  $\Sigma$  détermine uniquement les valeurs de  $N (\leq M)$  fonctions rationnelles  $\lambda_q(x_a)$ , de manière que le système  $\Sigma + \Sigma_1$  devienne bien déterminé par la condition que les  $\lambda_q$  aient ces valeurs. Lorsque l'élément plan à  $p$  dimensions varie dans un certain voisinage de  $E_p$ , il détermine les mêmes fonctions  $\lambda_q(x_a)$ .

2) Etant donné un système de valeurs  $x_a$ , vérifiant (1) il existe des éléments plans à  $p$  dimensions  $E_p$  appartenant à  $\Sigma + \Sigma_1$ .

DÉFINITION I. Le système  $\Sigma^* = \Sigma + \Sigma_1$  sera appelé *prolongement algébrique* de  $\Sigma$ .

Tandis que l'idéal  $I(\Sigma^*)$  est uniquement défini, il n'en est évidemment pas de même pour l'idéal  $I(\Sigma_1)$ .

En particulier, on peut supposer qu'entre les équations de  $\Sigma_1$ , on ne peut pas éliminer les paramètres  $x_\alpha$  par des combinaisons linéaires à coefficients indépendants des variables  $u_i$ .

DÉFINITION II. Si, de quelque manière qu'on choisisse  $\Sigma_1$ , tous ses éléments plans pour un système quelconque de valeurs des  $x_\alpha$  (vérifiant (1)) sont solutions de  $\Sigma$ , nous dirons que  $\Sigma^*$  est un prolongement *quasi-total* de  $\Sigma$ . Si on peut choisir  $\Sigma_1$ , de manière qu'il existe de ses éléments plans qui n'appartiennent pas à  $\Sigma$ , le prolongement sera dit *partiel*.

DÉFINITION III. Si toutes les équations de  $\Sigma_1$  sont des équations de Pfaff, le prolongement sera dit *linéaire*.

DÉFINITION IV. Un prolongement quasi-total linéaire, sera dit *total*.

3. Considérons un prolongement total algébrique régulier et soit

$$U_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, k)$$

le système  $\Sigma_1$  (linéaire) correspondant. Tous ses éléments plans à  $n-k$  dimensions, appartiennent aussi à  $\Sigma$ . On en déduit aisément que  $n-k=p$ , c'est-à-dire

$$k = n - p.$$

En supposant que, sur un élément plan à  $p$  dimensions régulier de  $\Sigma$ , les variables  $u_1, u_2, \dots, u_p$  sont indépendantes, on peut résoudre le système  $\Sigma_1$  pour cet élément plan, par rapport aux variables  $u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n$ , que nous nommerons  $v_1, v_2, \dots, v_{n-p}$

$$(2) \quad v_h = \lambda_{h\alpha} u_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p; h = 1, 2, \dots, n-p).$$

Dans ce cas, la même propriété est vraie aussi pour un voisinage d'éléments plans à  $p$  dimensions de  $\Sigma$ .

Les coefficients  $\lambda_{h\alpha}$  sont, dans ce voisinage fonctions des paramètres  $x_\alpha$  et sont uniquement déterminés par un  $E_p$  de  $\Sigma$ . Ils vérifient un certain nombre de relations (multilinéaires) qui s'obtiennent en remplaçant (2) dans  $\Sigma$  et en annulant les coefficients des formes trouvées. Nous appellerons ce système

$$(T) \quad T_\tau(\lambda) = 0.$$

4. Considérons maintenant un prolongement algébrique quelconque. En introduisant (2) dans  $\Sigma_1$  et en imposant la condition que ce système soit vérifié identiquement, il résulte un système — soit  $(\sigma)$  — de relations entre les  $x_\alpha$  et les  $\lambda_{h\alpha}$ . D'après la définition du prolongement algébrique,

ces équations dépendent des  $x_\alpha$  par l'intermédiaire d'un nombre fini  $N$  de fonctions  $\lambda_\rho$ , dont les valeurs déterminent  $\Sigma_1$ . Ces  $\lambda_\rho$  sont déterminés par le système (o) en fonction des  $\lambda_{h\alpha}$ .

Si le prolongement algébrique est quasi-total, alors, réciproquement, tous les systèmes de valeurs  $\lambda_{h\alpha}$  qui (avec un système quelconque de valeurs des  $x_\alpha$ -vérifiant (1)) vérifient (o), déterminent des  $E_p$  de  $\Sigma$ .

**5.** Soit  $E_k$  ( $k < p$ ) un élément plan régulier de  $\Sigma$ , qui, pour un système de valeurs des paramètres  $x_\alpha$ , appartient aussi à  $\Sigma_1$ .

Pour qu'un élément linéaire  $E_1$  soit associé à  $E_k$  dans  $\Sigma$ , ses coordonnées doivent vérifier le système  $S(E_k)$ , de rang  $r_k$  (v. no. 1), — pour qu'il soit associé à  $E_k$  dans  $\Sigma_1$  (avec le même système de valeurs des paramètres) ses coordonnées devront vérifier un autre système — soit  $S_1(E_k)$ . En tout, pour que  $E_1$  soit associé à  $E_k$  dans  $\Sigma^*$ , ses coordonnées doivent vérifier un système d'équations linéaires que nous désignons par  $S^*(E_k)$ .

Supposons que  $E_k$  soit régulier aussi pour  $\Sigma^*$  et soit, dans ce cas,  $\bar{r}_k$  le rang du système  $S^*(E_k)$ . Supposons de plus que, lorsque les paramètres  $x$  varient dans un certain voisinage, ce rang ne varie pas et, si cette condition est remplie, désignons  $\bar{r}_k$  par  $r_k^*$ .

Une chaîne régulière de  $\Sigma$

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_k,$$

telle que ses éléments plans appartiennent aussi à  $\Sigma^*$  et que les rangs de  $S^*(E_1), S^*(E_2), \dots, S^*(E_k)$  soient respectivement  $r_1^*, r_2^*, \dots, r_k^*$  sera appelée régulière de  $\Sigma$  et  $\Sigma^*$ .

Etant donnée une telle chaîne, si  $r_k^* + k < n$ , il y a en général par  $E_k$  un élément plan  $E_{k+1}$  à  $k+1$  dimensions, régulier de  $\Sigma$ , appartenant à  $\Sigma^*$  et tel que le rang de  $S^*(E_k)$  soit  $r_{k+1}^*$ . En effet, si, pour un système de valeurs des  $x_\alpha$  et pour tous les éléments plans à  $k+1$  dimensions de  $\Sigma^*$  par  $E_k$ , le rang  $\bar{r}_{k+1}$  est plus petit que  $r_{k+1}^*$ , alors on peut varier aussi peu que l'on veut les valeurs des  $x_\alpha$  de manière que ce rang atteigne la valeur  $r_{k+1}^*$ . Dans ce cas, il faut varier aussi les éléments plans  $E_1, E_2, \dots, E_k$  de la chaîne, de manière qu'elle continue à appartenir à  $\Sigma^*$ . Si cette variation est assez petite, on est sûr que la chaîne reste régulière pour  $\Sigma$  et pour  $\Sigma^*$  et on est arrivé à avoir le rang de  $S^*(E_{k+1})$  égal à  $r_{k+1}^*$ .

Si maintenant tous les éléments plans à  $k+1$  dimensions de  $\Sigma^*$  passant par  $E_k$  sont singuliers pour  $\Sigma$ , prenons par  $E_k$  un  $E'_{k+1}$  régulier de  $\Sigma$ , voisin d'un élément plan  $E_{k+1}$  régulier de  $\Sigma^*$  et contenant  $E_k$ . En variant les paramètres  $x_\alpha$ , on arrive à former le système  $\Sigma^*$  tel qu'il contienne l'élément  $E'_{k+1}$ . Il faut, comme plus haut, varier aussi les éléments de la chaîne, de manière que cela n'affecte pas sa régularité pour  $\Sigma$  et pour  $\Sigma^*$ .  $E'_{k+1}$  est ré-

gulier pour  $\Sigma$ . S'il n'est pas régulier pour  $\Sigma^*$ , on peut en prendre un autre  $E'_{k+1}$ , voisin de  $E_{k+1}$ , régulier pour  $\Sigma^*$ . Le rang de  $S^*(E_{k+1})$  est  $r_{k+1}^*$ , puisque le système de valeurs des paramètres est voisin de celui pris antérieurement, pour lequel ce rang était  $r_{k+1}^*$ .

Nous allons désigner par  $\varrho_k$  la différence  $r_k^* - r_k \cdot \varrho_k$  est le nombre d'équations de  $S_1(E_k)$  indépendantes entre elles et de  $S(E_k)$ .

On voit que la suite des  $r_k^*$  est non décroissante, et peut être prolongée jusqu'à un indice  $q$ , tel que

$$(3) \quad r_q^* + q = n.$$

L'élément plan  $E_q$  n'admet pas d'élément linéaire  $E_1$  associé dans  $\Sigma^*$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'élément plan  $E_{q+1}$  contenant  $E_q$  et appartenant à  $\Sigma^*$ .

DÉFINITION V. Si, quelles que soient les valeurs des paramètres  $\alpha_a$ , on a  $q = p$ , nous dirons que le prolongement est *algébriquement régulier*.

**6. Un prolongement total est algébriquement régulier.** Il est, en effet, clair que le genre du système (2) est égal à  $p$ . Or, en vertu de (2), les équations de  $\Sigma$  sont identiquement vérifiées; donc on a

$$(4) \quad r_k^* = n - p < n - k$$

ce qui prouve la proposition.

**7.** Soit donné un prolongement algébrique régulier  $\Sigma^*$  de  $\Sigma$ . On a

$$(5) \quad r_p^* + p = r_p + \varrho_p + p = n.$$

d'où on tire

$$\varrho_p = 0.$$

Les caractères de  $\Sigma^*$  sont en général

$$s_0^* = r_0^*, \quad s_1^* = r_1^* - r_0^*, \dots, s_p^* = r_p^* - r_{p-1}^*$$

et par suite

$$s_0^* = s_0 + \sigma_0, \quad s_1^* = s_1 + \sigma_1, \dots, s_p^* = s_p + \sigma_p,$$

où nous avons posé

$$\sigma_0 = \varrho_0, \quad \sigma_1 = \varrho_1 - \varrho_0, \dots, \sigma_p = \varrho_p - \varrho_{p-1}.$$

## II. Prolongement fermé d'un système différentiel extérieur.

**1.** Considérons maintenant un système différentiel extérieur fermé  $\Sigma$ , de genre  $p$ . Nous supposons que les coefficients sont des fonctions analytiques dans le domaine où nous considérons ce système. Cette supposition est justifiée par le fait que les théorèmes d'existence de CARTAN sont démontrés seulement dans cette hypothèse. En réalité, nous aurions pu sup-



poser que les coefficients sont de classe  $C^2$ , puisque nous n'utilisons que les dérivées du 2-e ordre.

Observons encore que les propriétés, que nous étudions, ont un caractère local.

Au système  $\Sigma$  nous pouvons appliquer les considérations algébriques du chapitre précédent et avec les mêmes notations. Un élément plan de  $\Sigma$  est appelé *élément plan intégral*.

DÉFINITION VI. La fermeture  $\Sigma'$  du système  $\Sigma^*$  est appelée *le prolongement fermé* ou, plus simplement, *le prolongement* de  $\Sigma$ . Ce prolongement sera *partiel*, *quasi-total*, ou *total* selon que  $\Sigma^*$  est resp. un prolongement algébrique partiel, quasi-total ou total.

Nous pouvons désigner les variables  $x_a$  par  $x_r$  ( $r = n+1, n+2, \dots$ ).

DÉFINITION VII. Un élément plan intégral  $E'_k$  de  $\Sigma'$  sera appelé *prolongement de l'élément plan intégral*  $E_k$  de  $\Sigma$  si les coordonnées grassmanniennes, dont tous les indices sont compris entre 1 et  $n$ , sont les coordonnées grassmanniennes de  $E_k$ . Dans ce cas  $E_k$  sera appelé *projection* de  $E'_k$ .

DÉFINITION VIII. Si tout élément plan  $E_k$  intégral régulier de  $\Sigma$  a un prolongement dans  $\Sigma'$ , nous disons que ce prolongement est *compatible*.

DÉFINITION IX. Si les éléments plans intégraux de  $\Sigma$ , appartenant à une chaîne régulière [1, 4, 5]

$$(7) \quad P = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_p,$$

ont dans  $\Sigma'$  des prolongements appartenant à une chaîne régulière

$$(8) \quad P'_0 = E'_0 \subset E'_1 \subset \dots \subset E'_p,$$

nous disons que le prolongement est *régulier*.

**2.** Nous démontrerons maintenant le

**Théorème.** *Un prolongement total est régulier.*

Ce théorème a été démontré par CARTAN [2] pour les systèmes du 2-e degré formés par la fermeture d'un système de Pfaff, dans le cas où les équations du 2-e degré peuvent être mis sous la forme

$$A_{gh\alpha} \bar{\omega}_h \wedge \omega_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p; h = 1, 2, \dots, n-p-s_0),$$

où  $s_0$  est le nombre d'équations de Pfaff indépendantes, qui appartiennent au système,  $\bar{\omega}_h, \omega_\alpha$  sont des formes de Pfaff indépendantes et sur un élément plan intégral régulier (d'un certain voisinage d'éléments plans intégraux réguliers) les formes  $\omega_\alpha$  sont indépendantes entre elles. M. Y. MATSUSHIMA a démontré le même théorème en général. Nous donnerons, dans ce qui suit,

une autre démonstration — qui nous semble plus simple — du même théorème général.

A cette fin, considérons d'abord un point  $P = E_0$ , intégral régulier de  $\Sigma$ . Il admet un prolongement  $P' = E'_0$ . D'après la définition du prolongement algébrique (no. 2 chap. I) — et d'après la proposition démontrée au no. 6 chap. I, il suit que, au point  $P$ , le nombre d'équations linéaires indépendantes de  $\Sigma^*$ , qui est en même temps le nombre d'équations linéaires indépendantes de  $\Sigma'$ , est  $s_0^* = s_0 + \sigma_0 = n - p$ .

Soit maintenant  $E_k$  un élément plan intégral régulier de  $\Sigma$ . Il fait partie d'une chaîne régulière (7) d'éléments plans intégraux réguliers de  $\Sigma$ . Supposons que les prolongements  $E'_0, E'_1, \dots, E'_k$  des éléments plans  $E_0, E_1, \dots, E_k$  forment une chaîne

$$(9) \quad E'_0 \subset E'_1 \subset \dots \subset E'_k$$

et qu'un élément plan  $E'_l$  ( $0 \leq l \leq k$ ) de cette chaîne a la propriété que son élément plan polaire a précisément  $n - \nu'_l$  dimensions, où nous avons désigné par  $\nu'_l$  le nombre d'équations linéaires indépendantes auxquelles doit satisfaire un élément linéaire  $E'^{(k+1)}$  pour être associé à  $E'_k$  — étant supposé que ce nombre reste constant quand  $E'_k$  varie dans un voisinage d'un élément plan intégral.

Pour que les éléments plans de la chaîne (9) soient réguliers, il faut encore démontrer que cette chaîne peut être prolongée jusqu'à l'indice  $p$ , avec les mêmes propriétés.

**3.** Dans ce but, considérons le prolongement total algébrique  $\bar{\Sigma}^*$  qui génère le prolongement total fermé  $\bar{\Sigma}'$

$$(10) \quad \varphi_h = \bar{\omega}_h - \lambda_{h\alpha} \omega_\alpha = 0.$$

Supposons que la chaîne (7) soit déterminée par les éléments linéaires  $E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, \dots, E_1^{(p)}$  déterminés resp. par les systèmes de différentielles  $d_1, d_2, \dots, d_p$ , avec

$$(11) \quad \omega_\alpha(d_\beta) = \delta_{\alpha\beta},$$

de manière que

$$E_1 = E_1^{(1)}, E_2 = E_1^{(1)} \times E_1^{(2)}, \dots, E_p = E_{p-1} \times E_1^{(p)}.$$

Les éléments plans de la chaîne (9) sont déterminés respectivement par une suite correspondante d'éléments linéaires  $E_1'^{(1)}, E_1'^{(2)}, \dots, E_1'^{(k)}$  qui ont  $E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, \dots, E_1^{(k)}$  comme projections. Les coordonnées d'un  $E_1'^{(l)}$  ( $0 \leq l \leq k$ ) sont, outre  $\omega_\alpha(d_l), \bar{\omega}_h(d_l)$ , encore un système d'accroissements  $d_l \lambda_{h\alpha}$ . Pour trouver un élément linéaire  $E_1'^{(k+1)}$ , associé à  $E'_k$ , nous avons d'abord à satisfaire aux équations de  $\Sigma$  jusqu'au degré  $k+1$ . A tel but, nous pouvons



prendre  $E_1^{(k+1)}$  comme nous avons fait plus haut pour les éléments de la chaîne (7). Ensuite, il faut que soit vérifié le système

$$(12) \quad d\varphi_h = -d\lambda_{h\alpha} \wedge \omega_\alpha - \lambda_{h\alpha} d\omega_\alpha + d\bar{\omega}_h = 0,$$

qui ferme le système  $\Sigma^*$ . En posant  $d_{k+1}\lambda_{h\alpha} = \delta\lambda_{h\alpha}$  et, en général,  $\delta = d_{k+1}$ , nous avons de (12), en tenant compte de (11),

$$(13) \quad \delta\lambda_{h\beta} - d_\beta\lambda_{h, k+1} + \lambda_{h\alpha} d\omega_\alpha(\delta, d_\beta) - d\bar{\omega}_h(\delta, d_\beta) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k).$$

Les valeurs  $\delta\lambda_{h\beta}$  en résultent pour  $\beta = 1, 2, \dots, k$ . Les valeurs des mêmes différentielles pour  $\beta = h+1, h+2, \dots$ , restent indéterminées.

4. Mais, outre (12), les  $\delta\lambda_{h\beta}$  doivent encore vérifier un système d'équations, qui résulte en différentiant (T)

$$(T') \quad \delta T_t = 0.$$

Nous allons démontrer que ce système est identiquement vérifié, si l'on prend  $\delta\lambda_{h\beta} (\beta = 1, 2, \dots, k)$  comme nous l'avons montré plus haut et  $\delta\lambda_{h, k+1}, \delta\lambda_{h, k+2}, \dots, \delta\lambda_{hp}$  arbitrairement (sauf la restriction de vérifier (T')).

A ce but, observons les équations de  $\Sigma$ , soit

$$F_r(\bar{\omega}, \omega) = 0.$$

En y remplaçant  $\bar{\omega}_h$  des relations

$$\varphi_h = \bar{\omega}_h - \lambda_{h\alpha} \omega_\alpha,$$

on trouve le même système sous la forme

$$(14) \quad K_r(\varphi, \omega) = 0.$$

$K_r$  sont des formes extérieures en  $\varphi, \omega$ . Les coefficients des termes qui ne contiennent pas  $\varphi$ , mais seulement  $\omega$ , s'annulent en vertu de (T) et c'est précisément leur annulation qui donne les relations (T), car elle exprime que les relations (14) sont vérifiées en vertu du système  $\bar{\Sigma}^*$ , c'est-à-dire (10).

Mais,  $\Sigma$  étant un système fermé, cela veut dire qu'en vertu des mêmes relations, on a

$$dK_r = 0.$$

En supposant  $K_r$  du degré  $\gamma$ , écrivons

$$K_r = A_{r\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\gamma} \omega_{\alpha_1} \wedge \omega_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \omega_{\alpha_\gamma} + A_{r\beta_1\alpha_2\dots\alpha_\gamma} \varphi_{\beta_1} \wedge \omega_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \omega_{\alpha_\gamma} + \dots,$$

où les termes non écrits contiennent au moins deux facteurs  $\varphi$ . Le système  $A_{r\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\gamma} = 0$  est équivalent au système (T). On voit, par suite de (11), que les relations qui résultent d'ici pour  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\gamma \leq k$  sont les relations (T) pour  $\lambda_{h\beta}$  avec  $\beta \leq k$ .

On déduit immédiatement, en vertu des mêmes relations (T),

$$(15) \quad dK_p = dA_{p\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} \wedge \omega_{\alpha_1} \wedge \omega_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_\gamma} + \\ + A_{ph_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} d\varphi_{h_1} \wedge \omega_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_\gamma} \pmod{\varphi_h}.$$

Supposons maintenant  $\gamma \leq k$  et qu'on ait pris (15) pour  $\gamma + 1$  systèmes de différentielles dont un est  $\delta$  et les autres correspondent à  $\gamma$  des éléments linéaires  $E'_1{}^{(1)}, E'_1{}^{(2)}, \dots, E'_1{}^{(k)}$ . En tenant compte du fait que  $E'_k$  est un élément plan intégral et que  $E'_1(\delta)$  a été pris de manière qu'on ait (12), il suit

$$dA_{p\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} \wedge \omega_{\alpha_1} \wedge \omega_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{\alpha_\gamma} = 0.$$

Remarquons qu'on a

$$d_1 A_{p\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} = \cdots = d_k A_{p\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} = 0,$$

car les éléments linéaires  $E'_1{}^{(1)}, E'_1{}^{(2)}, \dots, E'_1{}^{(k)}$  sont contenus dans  $E'_k$  et celui-ci est élément plan intégral de  $\Sigma'$ . Vu (11), il résulte

$$\delta A_{p\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\gamma} = 0 \quad (\alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_\gamma \leq k).$$

Ces équations forment un système équivalent à celui qui s'obtient de (T') pour  $\delta\lambda_{h\beta}$  ( $\beta \leq k$ ) et ainsi notre affirmation est démontrée.

Puisqu'elle est vraie pour  $k=0$ , il suit qu'elle est vraie pour tout  $0 \leq k \leq p-1$  et ainsi le théorème est démontré.

**5.** Faisons encore l'observation suivante: Le système (13) détermine uniquement  $\delta\lambda_{h\beta}$  pour  $\beta=1, 2, \dots, k$ . Pour trouver  $\delta\lambda_{h, k+1}, \delta\lambda_{h, k+2}, \dots$ , nous avons à utiliser les relations (T') restantes. Celles-ci nous offrent pour  $\delta\lambda_{h, k+1}, \delta\lambda_{h, k+2}, \dots$  un système linéaire du même rang que celui du système offert par (T) pour  $\lambda_{h, k+1}, \lambda_{h, k+2}, \dots$ .

Si l'élément plan  $E'_k$  est régulier, alors ce rang (qui est le nombre d'équations indépendantes que doivent vérifier les coordonnées d'un élément plan intégral à  $p$  dimensions de  $\Sigma$  contenant  $E_k$ ) est le même pour tout élément intégral à  $k$  dimensions, voisin à  $E_k$ . On peut donc affirmer que le rang du système d'équations, que doivent vérifier  $\delta\lambda_{h, k+1}, \delta\lambda_{h, k+2}, \dots$  est le même quand  $E_k$  varie dans le même voisinage. Il suit le

**Théorème.** *Le prolongement total d'un élément plan intégral régulier  $E_k$ , est régulier.*

**6.** Considérons maintenant un prolongement quelconque  $\Sigma'$  de  $\Sigma$ . Nous supposons que  $\Sigma'$  a été obtenu comme fermeture d'un prolongement algébrique régulier  $\Sigma^*$  de  $\Sigma$ .

Si, sur un élément plan régulier à  $p$  dimensions de  $\Sigma$ , les pfaffiens  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$  sont indépendants, alors, d'après ce qui a été établi antérieurement, le prolongement total  $\bar{\Sigma}'$  existe, et on sait qu'il est régulier et qu'on peut l'obtenir à partir du prolongement algébrique (10). Soient

$$(16) \quad L_\mu(\bar{\omega}, \omega, \lambda_\varrho) = 0$$

les équations  $\Sigma_1$ , qu'on ajoute à  $\Sigma$  pour former le prolongement algébrique  $\Sigma^*$ . Les  $L_\mu$  sont des formes différentielles extérieures en  $\omega, \bar{\omega}$ , dont les coefficients dépendent des  $\lambda_\varrho$ . Si nous remplaçons, dans (16), les formes  $\bar{\omega}$  par  $\varphi$  comme nous l'avons fait au no. 10, nous trouvons (16) sous la forme

$$(16') \quad \bar{L}_\mu(\varphi, \omega, \lambda_\varrho) = 0.$$

Dans les coefficients des formes  $L$ , entrent encore les paramètres  $\lambda_{h\alpha}$ , dont on sait qu'ils vérifient le système (T). En vertu des relations (10), il faut que soient vérifiées (16'), ce qui impose un système de conditions, qui (avec (1)) déterminent uniquement les  $\lambda_\varrho$  en fonction des  $\lambda_{h\alpha}$  (et, naturellement, des  $x$ )

$$(17) \quad \lambda_\varrho = \lambda_\varrho(\lambda_{h\alpha}).$$

**7.** Pour examiner si le prolongement  $\Sigma'$  est régulier, il faut considérer les équations

$$(18) \quad dL_\mu = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18') \quad d\bar{L}_\mu(\varphi, \omega, \lambda_\varrho) = 0.$$

Evidemment, ces dernières équations ne dépendent de  $d\lambda_{h\alpha}$  qu'en apparence, car elles sont identiques aux équations (18) qui n'en dépendent pas.

En remplaçant dans (18') les coordonnées d'un élément plan  $\bar{E}'_k$  intégral du prolongement total  $\bar{\Sigma}'$  — et en tenant compte du fait que les  $\lambda_\varrho$  sont donnés par (17) et

$$(17') \quad d\lambda_\varrho = \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial \lambda_{h\alpha}} d\lambda_{h\alpha} + \frac{\partial \lambda_\varrho}{\partial x_i} dx_i,$$

il est évident que les (18') sont vérifiées, comme le sont d'ailleurs (16) et (18).

**8.** Soit  $\Sigma^*$  un prolongement algébrique régulier de  $\Sigma$  et  $E_k$  un élément plan intégral régulier de  $\Sigma$  et  $\Sigma^*$  (v. no. 5, chap. I). Nous supposons que  $\Sigma'$  est la fermeture de  $\Sigma^*$ . Il y a un système de valeurs  $\lambda_\varrho$  tel que  $E_k$  soit un élément plan intégral régulier de  $\Sigma^*$ . Les  $\lambda_\varrho$  étant remplacés par ce système de valeurs, il existe par  $E_k$  un  $E_p$  intégral régulier de  $\Sigma^*$ . Cet  $E_p$  est défini par un système de valeurs  $\lambda_{h\alpha}$  vérifiant le système (T).

L'élément plan  $E'_k$  peut être défini par  $k$  éléments linéaires  $E'_1^{(\gamma)}(d_\gamma)$  ( $\gamma = 1, 2, \dots, k$ ) se projetant respectivement sur les  $k$  éléments linéaires  $E_1^{(\gamma)}(d_\gamma)$  de  $\Sigma$ . Pour trouver les  $E'_1^{(\gamma)}(d_\gamma)$ , il est nécessaire de connaître les différentielles  $d_\gamma \lambda_\rho$ . Celles-ci peuvent être données de la manière suivante. Considérons les éléments linéaires  $\bar{E}_1^{(\gamma)}(d_\gamma)$  — prolongements de  $E_1^{(\gamma)}(d_\gamma)$  dans le prolongement total  $\bar{\Sigma}'$ . Cela veut dire considérer aussi les différentielles  $d_\gamma \lambda_{h\alpha}$ , correspondantes à ces prolongements totaux. Pour  $d_\gamma \lambda_\rho$  on peut alors prendre les expressions données par (17'). Avec cela, on obtient en effet un élément plan  $E'_k$  intégral de  $\Sigma'$ , comme il résulte des considérations faites à la fin du no. précédent.

Donc un élément plan  $E_k$  intégral régulier de  $\Sigma$  a un prolongement  $E'_k$  dans  $\Sigma'$ .

Supposons maintenant que l' $E'_k$  trouvé de cette manière, fasse partie d'une chaîne d'éléments plan intégraux

$$E'_0 \subset E'_1 \subset \dots \subset E'_k$$

qui ont la propriété que l'élément plan polaire de l'un d'entre eux,  $E'_i$ , a  $n - r'_i$  dimensions. Cela veut dire que la dimension du plan polaire ne varie pas, lorsqu'on remplace  $E'_i$  par un autre élément plan d'un certain voisinage.

Par cette méthode, on peut trouver un élément linéaire  $E'_1(\delta)$  associé à  $E'_k$  — dont la projection est un  $E_1$  associé à  $E_k$  — de manière que l'élément plan  $E'_{k+1} = E'_1 \times E'_k$  jouisse des mêmes propriétés. En effet, on n'a qu'à trouver d'abord un élément linéaire  $\bar{E}_1(\delta)$  associé à  $\bar{E}_k$  dans  $\bar{\Sigma}'$ ; on trouve ainsi un  $\bar{E}'_{k+1}$  prolongement d'un  $E_{k+1}$  de  $\Sigma$ , contenant  $E_k$ . L' $E'_1(\delta)$  trouvé comme plus haut en déterminant les  $\delta \lambda_\rho$ , à l'aide des  $\delta \lambda_{h\alpha}$  correspondants à  $\bar{E}_1$ , répond à notre question.

9. Mais on peut montrer qu'inversement, étant donné un  $E'_1$  associé à  $E'_k$ , il peut être trouvé par la même méthode.

En effet, si  $E'_k$  est donné, cela veut dire qu'on connaît les différentielles  $d_\gamma \lambda_i$ ,  $d_\gamma \lambda_\rho$  et par hypothèse elles s'expriment comme fonctions des  $d_\gamma \lambda_i$ ,  $d_\gamma \lambda_{h\alpha}$  par l'intermédiaire de (17'). Si l'on connaît encore  $E'_1(\delta)$  associé à  $E'_k$ , cela veut dire qu'on connaît  $\delta \lambda_i$ ,  $\delta \lambda_\rho$  et, pour l'exprimer à l'aide des (17'), il faut encore connaître les  $\delta \lambda_{h\alpha}$  vérifiant (T') et les relations qui expriment que  $\bar{E}_1(\delta)$  est associé à  $\bar{E}'_k$  dans  $\bar{\Sigma}'$ .

Partons de (18) et observons que, cette relation étant vérifiée sur  $E'_{k+1}$ , (18') l'est aussi, sans que cela implique d'autres conditions pour  $\lambda_{h\alpha}$  ou leurs différentielles. Les formes  $\bar{L}_\mu$  ont l'expression

$$\begin{aligned} \bar{L}_\mu = & B_{\mu h_1 h_2 \dots h_\gamma} \varphi_{h_1} \wedge \varphi_{h_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{h_\gamma} + \\ (19) \quad & + B_{\mu h_1 h_2 \dots h_{\gamma-1} \beta_\gamma} \varphi_{h_1} \wedge \varphi_{h_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{h_{\gamma-1}} \wedge \omega_{\beta_\gamma} + \dots \\ & \dots + B_{\mu h_1 \beta_2 \dots \beta_\gamma} \varphi_{h_1} \wedge \omega_{\beta_2} \wedge \dots \wedge \omega_{\beta_\gamma} + B_{\mu \beta_1 \beta_2 \dots \beta_\gamma} \omega_{\beta_1} \wedge \omega_{\beta_2} \wedge \dots \wedge \omega_{\beta_\gamma}, \end{aligned}$$

quoiqu'elles ne dépendent effectivement que des  $\lambda_q$  et non des  $\lambda_{h\alpha}$ . Si on impose, à ces dernières, la condition de vérifier (T) et  $\varphi_h = 0$  et à leurs différentielles la condition de vérifier les équations  $d\varphi_h = 0$ , il résulte de (19) et (18')

$$d\bar{L} = dB_{\mu\beta_1\beta_2\dots\beta_\gamma} \wedge \omega_{\beta_1} \wedge \omega_{\beta_2} \wedge \dots \wedge \omega_{\beta_\gamma}.$$

Vu que

$$d_1 B_{\mu\beta_1\beta_2\dots\beta_\gamma} = d_2 B_{\mu\beta_1\beta_2\dots\beta_\gamma} = \dots = d_k B_{\mu\beta_1\beta_2\dots\beta_\gamma} = 0,$$

il résulte de (19), par un raisonnement analogue à celui du no. 4, que

$$(20) \quad \delta B_{\mu\beta_1\beta_2\dots\beta_\gamma} = 0.$$

Les relations

$$(21) \quad B_{\mu\beta_1\beta_2\dots\beta_\gamma} = 0$$

étant équivalentes aux (17), il suit que les (20) sont équivalentes aux (17').

Les systèmes (21) et (T) étant, avec nos hypothèses, compatibles en  $\lambda_{h,k+1}, \lambda_{h,k+2}, \dots, \lambda_{h,p}$ , il suit que (20) et (T') sont compatibles en  $\delta\lambda_{h,k+1}, \delta\lambda_{h,k+2}, \dots, \delta\lambda_{h,p}$ , les  $\delta\lambda_{h,\gamma}$  ( $\gamma = 1, 2, \dots, k$ ) étant donnés par (13).

Avec cela, notre affirmation est démontrée. Cela veut dire que l' $\bar{E}'_{k+1}$ , trouvé par la méthode décrite au no. 8, est le plus général qui satisfasse aux conditions requises.

**10.** Il résulte de ces considérations qu'on peut trouver par  $E'_k$  un prolongement  $E'_{k+1}$  de  $E_{k+1}$ , qui constitue une continuation de la chaîne  $E'_0 \subset E'_1 \subset \dots \subset E'_k$  et qui jouisse de la propriété que le système  $S'(E'_{k+1})$  que doit vérifier un élément linéaire, pour être intégral et associé à lui, ait le même rang que pour tout élément plan intégral à  $k+1$  dimensions voisin.

On en conclut le

**Théorème.** *Etant donné le système  $\Sigma$  de genre  $p$ , la condition nécessaire et suffisante pour qu'un prolongement soit régulier est que ce prolongement soit généré par un prolongement algébrique régulier.*

### Bibliographie.

- [1] E. CARTAN, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris, 1945.
- [2] E. CARTAN, Sur la structure des groupes infinis. *Oeuvres Complètes*, Partie II, 2, 571—573, *Annales Éc. Norm.* 21 (1904), 153—175.
- [3] Y. MATSUSHIMA, On a theorem concerning the prolongation of a differential system, *Nagoya Math. J.* 6 (1953), 1—17.
- [4] I. J. SCHOUTEN et W. v. D. KULK, Pfaff's Systems and its generalisations, Oxford, 1949.
- [5] E. KÄHLER, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Leipzig, 1934.

(Reçu le 27 avril 1959.)