

## Erbliche Eigenschaften in der Theorie der Gleichverteilung.

Herrn Professor Dr. O. Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von EDMUND HLAWKA (Wien).

**§ 1.** Eine Folge  $\langle x_k \rangle$  reeller Zahlen  $x_1, x_2, \dots$  heißt bekanntlich gleichverteilt modulo 1, wenn für jede stetige periodische Funktion  $f(x)$  mit der Periode 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Dies ist nach H. WEYL genau dann der Fall, wenn für jede ganze Zahl  $l \neq 0$

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(lx_k) = 0 \quad (e(x) = e^{2\pi i x}).$$

Ist  $\langle \mathbf{r}_k \rangle$  eine Folge von reellen Vektoren im  $s$ -dimensionalen Raum  $R_s (s \geq 1)$ , so ist analog die Folge genau dann gleichverteilt modulo 1, wenn für jeden Gittervektor  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_s) \neq \mathbf{o} = (0, \dots, 0)$

$$(1') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(\mathbf{l} \mathbf{r}_k) = 0.$$

Daraus folgt, daß  $\langle \mathbf{r}_k \rangle$  genau dann gleichverteilt ist, wenn für jedes  $\mathbf{l} \neq \mathbf{o}$  die Zahlenfolge  $\langle \mathbf{l} \mathbf{r}_k \rangle$  modulo 1 gleichverteilt ist. VAN DER CORPUT<sup>1)</sup> hat gezeigt: Ist für jede natürliche Zahl  $h$  die Folge  $\langle \mathbf{r}_{k+h} - \mathbf{r}_k \rangle = \langle \mathbf{r}_{k+h}^{(h)} \rangle$  gleichverteilt, so ist auch  $\langle \mathbf{r}_k \rangle$  gleichverteilt. Der Beweis beruht, wenn wir uns auf Zahlenfolgen beschränken, auf der Fundamentalungleichung

$$(2) \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(\mathbf{l} \mathbf{r}_k) \right|^2 \leq 2q^{-1} \left( 1 + 2q^{-1} \sum_{h=1}^{q-1} (q-h) \left| \frac{1}{n-h} \sum_{j=1}^{n-h} e(\mathbf{l} \mathbf{r}_j^{(h)}) \right| \right)$$

( $q$  natürliche Zahl beliebig mit  $1 \leq q \leq n$ ).

<sup>1)</sup> *Acta Math.* **56** (1931), 373—456.

Ist  $\langle x_k \rangle$  gleichverteilt, so muß  $\langle y_k^{(h)} \rangle$  nicht gleichverteilt sein (Beispiel  $\langle \alpha k \rangle$ ,  $\alpha$  irrational).

N. M. KOROBOW und A. G. POSTNIKOW<sup>2)</sup> haben bemerkt, daß aus der Gleichverteilung von  $\langle y_k^{(h)} \rangle$  für jedes  $h$  folgt, daß sogar für jedes nichtnegative ganze  $s$  und  $r$  ( $s \geq 1$ ) die Folge  $\langle x_{ks+r} \rangle$  gleichverteilt ist. Dies sieht man am besten so: Es ist

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n e(\lfloor x_{ks+r} \rfloor) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \sum_{t=s+1}^{sn+r} e(\lfloor x_t + j(t-r)/s \rfloor)$$

also

$$\left| \sum_{k=1}^n e(\lfloor x_{ks+r} \rfloor) \right| \leq \max_{1 \leq j \leq s} \left| \sum_{k=s+1}^{sn+r} e(\lfloor x_k + jk/s \rfloor) \right|.$$

Die Folge  $\langle z_k \rangle = \langle \lfloor x_k + jk/s \rfloor \rangle$  ist gleichverteilt für jedes  $j$ , da die Folge  $\langle z_k^{(h)} \rangle = \langle \lfloor y_k^{(h)} + jh/s \rfloor \rangle$  gleichverteilt ist, da ja nach Voraussetzung für jedes  $h$   $\langle y_k^{(h)} \rangle$  gleichverteilt sein soll und eine additive Konstante nicht stört. Wir nennen nun eine Eigenschaft  $E$  von Folgen  $\langle x_k \rangle$  erblich, wenn folgendes gilt: Besitzt für jede natürliche Zahl  $h$  die Folge  $\langle y_k^{(h)} \rangle = \langle x_{k+h} - x_k \rangle$  die Eigenschaft  $E$ , dann gilt sie auch für  $\langle x_k \rangle$  und alle Teilfolgen  $\langle x_{ks+r} \rangle$ . Diese Definition kann auch für Folgen  $\langle x_k \rangle$  von Vektoren und allgemeiner für Folgen  $\langle x_k \rangle$  von Gruppenelementen  $x_k$  aus einer Gruppe  $G$  formuliert werden, nur ist dann  $y_k^{(h)} = x_{k+h} x_k^{-1}$ . Man zeigt<sup>3)</sup> z. B. leicht, daß auf jeder kompakten Gruppe mit abzählbarer Basis die Gleichverteilung ebenfalls erblich ist.

Es sollen nun einige weitere Begriffe aus der Theorie der Gleichverteilung auf ihre Erblichkeit untersucht werden, wir wollen uns aber dabei auf Zahlenfolgen beschränken.

**§ 2.** Eine Folge  $\langle x_k \rangle$  heißt gleichmäßig-gleichverteilt, kurz g-g-Folge, wenn gleichmäßig in  $p$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ )  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(x_{k+p}) = 0$  ist. Ein Beispiel dafür ist  $\langle \alpha k \rangle$  ( $\alpha$  irrational). Diese Eigenschaft ist wieder erblich<sup>3)</sup>. Daraus folgt, daß  $\langle P(k) \rangle$  ( $P$  Polynom vom Grad  $\geq 1$ , der Koeffizient der höchsten Potenz von  $k$  irrational) g-g-Folge ist. Bei den g-g-Folgen gilt, (darauf beruht die Bedeutung des Begriffes): Ist  $\langle x_k \rangle$  eine g-g-Folge und  $\langle x'_k \rangle$  eine Folge mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x'_{k+1} - x'_k - (x_{k+1} - x_k)) = 0$$

(dies ist sicher der Fall, wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x'_k - x_k) = 0$ ) dann ist auch  $\langle x'_k \rangle$  eine g-g-Folge, also auch gleichverteilt. Die gleiche Eigenschaft haben die s-g-g-

<sup>2)</sup> *Dokladi Acad. Nauk SSSR* **84** (1952), 217–20.

<sup>3)</sup> *Rendiconti Circ. Mat. Palermo* **4** (2) (1955), 1–15.

Folgen. Darunter verstehe ich jene Folgen  $\langle x_k \rangle$ , für die<sup>4)</sup>

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{r=0}^H \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(lx_{rn+k}) \right| = 0.$$

Jede g-g-Folge ist eine s-g-g-Folge. Es soll nun gezeigt werden, daß auch diese letztere Eigenschaft erblich ist.

Es sei also  $\langle y_k^{(h)} \rangle$  für jedes  $h$  eine s-g-g-Folge und es soll nun gezeigt werden, daß dann  $\langle x_{ks+r} \rangle$  ebenfalls eine s-g-g-Folge ist. Es genügt, dies für  $\langle x_k \rangle$  zu zeigen.

Mit  $M_{r,n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(lx_{k+rn})$  folgt aus (2)

$$\frac{1}{H} \sum_{r=0}^H |M_{r,n}(x)|^2 \leq 2q^{-1} (1 + 2q^{-1} \sum_{h=1}^{q-1} (q-h) H^{-1} \sum_{r=0}^H |M_{r,n-h}(y^{(h)})|$$

also mit  $n \rightarrow \infty$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{r=0}^H |M_{r,n}(x)|^2 \leq 2q^{-1}$$

und da  $q$  beliebig, folgt die Behauptung, da ja

$$\left( H^{-1} \sum_{r=0}^H |M_{r,n}| \right)^2 \leq H^{-1} \sum_{r=0}^H |M_{r,n}|^2.$$

**§ 3.** Eine Folge  $\langle x_k \rangle$  heiße eine v-n-g-Folge (gleichverteilt zur Stufe  $v$ ) ( $v$  = natürliche Zahl), wenn die Folge  $\langle x_{k,v} \rangle = \langle (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+v-1}) \rangle$  im  $R_v$  gleichverteilt ist. Aus (1') folgt sofort, daß eine solche Folge eine w-n-g-Folge für jedes  $w \leq v$  ist, also auch gleichverteilt ist. Beispiel  $\langle \alpha k^v \rangle$  ( $\alpha$  irrational). Ist nämlich  $l = (l_1, \dots, l_v) \neq 0$ , so ist

$$\sum_{j=0}^{v-1} l_{j+1} (k+j)^v = \sum_{r=0}^v \binom{v}{r} c_r k^{v-r}$$

wo die  $c_r = \sum_{j=0}^{v-1} l_{j+1} j^r$  ( $r = 0, 1, \dots, v-1$ ) nicht alle Null sein können, also ist  $l_{x_{k,v}}$  ein Polynom von einem Grad  $\geq 1$  mit irrationalen Koeffizienten, also ist  $\langle x_{k,v} \rangle$  gleichverteilt. Die Eigenschaft v-n-g-Folge ist natürlich erblich, aber jetzt gilt: Ist  $\langle x_k \rangle$  eine v-n-g-Folge, so ist  $\langle y_k^{(h)} \rangle$  für jedes  $h < v$  eine  $(v-h)$ -n-g-Folge. Der Beweis ist einfach: Ist  $w = v-h$  und  $l_w = (l_1, \dots, l_w) \neq 0$ , so ist zu zeigen

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(l_w y_{k,w}^{(h)}) = 0.$$

<sup>4)</sup> Arch. Math. 6 (1955), 115–20.

Wir setzen  $m_v = (0, \dots, 0, l_1, \dots, l_v)$ ,  $n_v = (l_1, \dots, l_v, 0, \dots, 0)$  dann ist mit  $p_v = m_v - n_v$  die Summe in (5) gleich  $\sum_{k=1}^n e(p_v x_{k,v})$ . Es ist  $p_v \neq 0$ , denn nehmen wir an  $p_v = 0$ , dann wäre, wenn  $h > w$  für  $j > h$ ,  $p_j = l_{j-h} = 0$  also  $l = 0$ . Ist aber  $h \leq w$ , so wäre zunächst für  $j \leq h \leq w$ ,  $p_j = -l_j = 0$ . Jetzt wendet man vollständige Induktion an. Ist nämlich  $h < j \leq w$ , so folgt aus  $p_j = l_{j-h} - l_j = 0$ ,  $l_j = 0$ , da  $1 \leq j-h < j$ .

§ 4. Es liegt daher nahe, Folgen zu betrachten, welche für jedes  $v$  Folgen von der Stufe  $v$  sind. Wir nennen sie normal gleichverteilt oder kurz n-g-Folgen<sup>5)</sup>. Diese Eigenschaft ist natürlich erblich, aber jetzt ist diese Eigenschaft auch notwendig, denn aus § 3 folgt: Ist  $\langle x_k \rangle$  ein n-g-Folge, so auch  $\langle y_k^{(h)} \rangle$  für jedes  $h$  (es kann also z. B.  $\langle ak^h \rangle$  für kein  $v$  eine n-g-Folge sein) eine n-g-Folge und daraus folgt nach § 1, daß auch  $\langle x_{ks+r} \rangle$  für jedes  $s$  und  $r$  eine n-g-Folge ist. Es ist ja für jedes  $s, r, v$  die Folge  $\langle x_{ks+r,v} \rangle$  gleichverteilt, also für jedes  $s, r$  mit  $0 \leq r < s$ ,  $\langle x_{ks+r,s} \rangle$  gleichverteilt (Eigenschaft B) daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( e \left( \sum_{j=1}^v l_j x_{(k+j-1)s+r} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(m_{(j-1)s+1} x_{ks+r, (v-1)s+1}) = 0$$

mit  $m_{(j-1)s+1} = l_j$  ( $j = 1, \dots, v$ ) und 0 sonst. Wir nennen jede Folge  $\langle x_k \rangle$  mit Eigenschaft B eine B-normalgleichverteilte Folge, kurz B-n-g-Folge, weiter soll jede Folge  $\langle x_k \rangle$ , für die für jedes  $s$ ,  $\langle x_{ks,s} \rangle$  gleichverteilt ist, eine P-normalgleichverteilte Folge, kurz P-n-g-Folge genannt werden.

Wir haben also gezeigt, daß jede n-g-Folge eine B-n-g-Folge<sup>6)</sup>, also auch eine P-n-g-Folge ist. Wir zeigen nun: Jede B-n-g-Folge ist eine n-g-Folge. Dies sieht man sofort. Ist nämlich  $v \geq 1$  und  $l_v = (l_1, \dots, l_v) \neq 0$ , dann ist

$$\sum_{k=1}^n e(l_v x_{k,v}) = \sum_{k=1}^{v-1} + \sum_{v=0}^{v-1} \sum_{t=1}^{[(N-j)/v]} e(l_v x_{tv+v,v})$$

und da nach Voraussetzung  $\langle x_{tv+v,v} \rangle$  gleichverteilt ist, folgt alles. Wir werden

<sup>5)</sup> *Anzeiger d. math.-naturwits. Kl. d. Öster. Akad. d. Wiss.* (1957), 94–96.  
*Math. Nachr.* **18** (1958), 188–202.

Hier werden gleich allgemeine Mittelbildungen und belie kompakte Räume mit abzählbarer Basis betrachtet.

*International Congress of Math. Edinburgh 1958*. S. 30. In Zeile 17 v. u. ist „eine solche Folge“ durch „k-n-g-Folge“ zu ersetzen.

Wie ich dem *Zentralblatt* **72**, 38 entnehme, hat schon N. M. KOROBOV n-g-Folgen eingeführt und konstruiert. *Uspechi Matem. Nauk* (NS) **4** No. 1. (29) 189–90 (1949).

<sup>6)</sup> Dies entspricht bekannten Sätzen aus der Theorie der normalen Zahlen, vgl. J. NIVEN, *Irrational Numbers*, New York, 1956, Ch. 8. Die hier entwickelte Methode liefert auch den einfachsten Beweis dieser Sätze.

nun zeigen, daß jede P-n-g-Folge eine n-g-Folge, also auch eine B-n-g-Folge ist. Wir werden gleich mehr zeigen<sup>7)</sup>:

*Gibt es eine monoton wachsende Folge  $(s_j)$  natürlicher Zahlen, so daß für alle  $s = s_j$   $\langle x_{ks, s} \rangle$  gleichverteilt ist, dann ist  $\langle x_k \rangle$  eine n-g-Folge, also eine B-n-g-Folge.*

BEWEIS. Es sei wieder  $v$  beliebig,  $\varepsilon > 0$  und  $s = s_j$  so groß gewählt, daß  $v/s < \varepsilon$ , dann  $n$  so groß, daß  $s/n < \varepsilon$ , dann ist mit  $s = s_j$ ,  $l_v = (l_1, \dots, l_v) \neq 0$

$$\sum_{k=1}^n e(l_v x_{ks, v}) = \sum_{k=1}^{s-1} + \sum_{r=0}^{s-1} \sum_{t=1}^{[(n-r)/s]} e(l_v x_{st+r, v}) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Es sei  $\Sigma_2 = \sum_{r=1}^{s-v} + \sum_{r=s-v+1}^{s-1} = \Sigma_3 + \Sigma_4$ . Es ist  $|\Sigma_4| \leq vn/s$ . In  $\Sigma_3$  führen wir die Vektoren  $m_{r,s} = (m_{r,1}, \dots, m_{r,s})$  mit  $m_{r,n} = l_{n-r}$  für  $r+1 \leq u \leq r+v \leq s$  und  $m_{r,u} = 0$  für die übrigen  $u$  ein. Dann haben wir

$$\Sigma_3 = \sum_{r=1}^{s-v} \left( \sum_{t=1}^{[(n-r)/s]} e(m_{r,s} x_{st, s}) \right).$$

Jeder Klammerausdruck kann nach Voraussetzung für genügend großes  $n$  sicher kleiner als  $\varepsilon n/s$  gemacht werden, also erhalten wir

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(l_v x_{ks, v}) \right| \leq s/n + \varepsilon \sum_{r=0}^{s-v} 1/s + v/s < 3\varepsilon.$$

Zur Rechtfertigung des Namens „Normalgleichverteilung“ zeigen wir noch, daß fast alle Folgen  $\omega = \langle x_k \rangle$  mit  $0 \leq x_k \leq 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) normalgleichverteilt sind (fast alle in bezug auf das Torusmaß der Folgen  $\omega$ ). Dazu genügt es, zu zeigen, daß fast alle Folgen P-n-g-Folgen sind. Nun ist für jedes  $l_s$

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e(l_s x_{ks, s}) \right|^2 dx_1 \dots dx_{ns+s-1} = 1/n$$

also für fast alle Folgen  $\omega$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m^2} e(l_s x_{ks, s}) = 0$  und da stets jedes  $n$  zwischen einem  $m^2$  und  $(m+1)^2$  liegt, folgt alles. Es sei noch bemerkt, daß jede Folge  $\omega = \langle x_k \rangle$  dicht in  $(0, 1)$  so umgeordnet werden kann, daß sie eine n-g-Folge ist.<sup>8)</sup> Nehmen wir nämlich eine P-n-g-Folge  $\langle z_k \rangle$  her, dann gibt es zu jedem  $k$  ein  $x'_k$  aus  $\omega$ , so daß  $|x'_k - z_k| < 1/k$ , da  $\omega$  dicht in  $(0, 1)$ .

<sup>7)</sup> Für Normale Zahlen von C. T. LONG gezeigt.

<sup>8)</sup> Vgl. auch die zweite Arbeit unter <sup>5)</sup>.

Dabei seien die  $x'_k$  so gewählt, daß sie in  $\omega$  verschiedene Indizes tragen. Dann ist also  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x'_k - z_k) = 0$ , also ist auch

$$\lim (e(l_{s, r'_{ks, s}}) - e(l_{s, j_{ks, s}})) = 0 \quad \text{für jedes } s \text{ und } l_s.$$

Da  $\langle z_k \rangle$  eine n-g-Folge, so ist also auch  $\langle x'_k \rangle$  eine n-g-Folge. Die übrigen Glieder aus  $\omega$  und jene  $x'_k$  mit  $k$ -Quadrat denken wir uns in einer Folge  $\langle t_k \rangle$  angeordnet. Wir setzen nun  $u_k = x'_k$ , wenn  $k$  kein Quadrat und  $u_k = t_k$  sonst. Die so entstehende Folge  $\langle u_k \rangle$  ist eine Umordnung von  $\omega$  und ist eine n-g-Folge, denn es sind die Glieder in der Summe  $\frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n (e(l_{s, u_{ks, s}}) - e(l_{s, x'_{ks, s}})) \right)$  höchstens für jene  $k$  ungleich 0, für die es ein  $j \leq s$  gibt, so daß  $ks + j - 1$  ein Quadrat ist. Die Anzahl ist aber höchstens  $O(\sqrt{n})$  also ist  $\langle u_k \rangle$  eine n-g-Folge.

(Eingegangen am 11. Februar 1959.)